МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 531.36

О ГЛОБАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМ

КАЮМОВ О. Р.

Рассматривается некоторый класс механических колебательных систем, включающий в себя, например, многозвенные маятники, мостовые краны, роботы-манипуляторы и т. п. Предлагаются достаточные условия управляемости во всем фазовом пространстве таких объектов, когда количество управляющих параметров меньше числа степеней свободы. Такой подход позволяет синтезировать сосредоточенные управления для аналогичных систем с распределенными параметрами, взятых в конечномерном приближении.

1. Рассмотрим класс механических систем, представляющий собой многозвенники с кинематической структурой «дерева», составленные, в частности, из соединенных цилиндрическими шарнирами стержней, пружин, зубчатых колес без трения и т. д. К ним относятся, например, многозвенные маятники, мостовые краны, роботы-манипуляторы.

Функция Лагранжа таких систем $L={}^1/_2\mathbf{q}^{\cdot T}A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}-B(\mathbf{q})$, где $\mathbf{q}=\|q_1\ldots q_n\|^T$, $A(\mathbf{q})$ — определенно-положительная матрица кинетической энергии, $B(\mathbf{q})$ — скалярный потенциал. Уравнения управляемого движения

$$d/dt(\partial L/\partial\mathbf{q}^{\cdot})=\partial L/\partial\mathbf{q}+\mathbf{u},\quad |\mathbf{u}|\leqslant\mathbf{a}\tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}=\|u_1\ldots u_n\|^T$ — вектор управлений; вектор $\mathbf{a}=\|a_1\ldots a_n\|^T$ задан. В общем случае интеграл энергии (при $\mathbf{u}\equiv0$) $E(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})={}^1/_2\mathbf{q}^{\cdot T}A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}+B(\mathbf{q})$ может быть периодической функцией от некоторых (например, угловых) координат $q_i(i=\overline{k,\ l},\ 1\leqslant k\leqslant l\leqslant n)$. Будем считать конфигурационным пространством системы $CM=S^r\times R^{(n-r)}$ (где $r=l-k+1$). Если $B(\mathbf{q})\geqslant\mathrm{const}$, то заменой переменной получим $B(\mathbf{q})\geqslant0$, $B(0)=0$. В этом случае в фазовом пространстве $TCM=S^r\times R^{(2n-r)}$ множество положений равновесия $(\mathbf{q}^*,0)\in Q$, где $Q=\{(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot}):\mathbf{q}^{\cdot}=0,\ \partial B/\partial\mathbf{q}=0,\ \mathbf{u}=0\}$, непустое; число этих многообразий считаем конечным. Полагаем, что у функции $B(\mathbf{q})$ среди критических точек нет локальных минимумов, кроме, быть может, одного глобального, т. е. среди матриц $\partial^2B/\partial\mathbf{q}^2(\mathbf{q}^*)$ есть не более одной положительно-определенной. Этими свойствами далее наделяется система (1.1), под которой будем понимать многозвенники с кинематической структурой дерева. Обозначим через $Q_a=\{(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot}):\mathbf{q}^{\cdot}=0,\ -\partial B/\partial\mathbf{q}+\mathbf{u}=0,\ |\mathbf{u}|\leqslant\mathbf{a}\}$ множество состояний равновесия под действием управления. Любой гладкой функции $\mathbf{u}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})$ из допустимой области будем ставить в соответствие множество $\Omega(\mathbf{u}(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot}))$ сепаратрисных поверхностей на TCM, движение по которым к особым точкам $(\mathbf{q}^*,0)\in Q$ в силу (1.1) происходит за бесконечное время.

2. Рассмотрим следующую задачу: для системы управления (1.1) определить вектор-функцию $\mathbf{u}(t)$ из допустимой области, переводящую объект из положения $(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1^{\cdot})$ в $(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2^{\cdot})$ за конечное время. В настоящее время отсутствует универсальный алгоритм построения искомого управления, необходимого в качестве первого приближения для решения, например, задачи оптимального быстродействия известными численными методами. Особенную трудность представляет случай, когда число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы. Предлагаемые дальше достаточные условия стабилизируемости и управляемости для системы

(1.1) основаны на идеях второго метода Ляпунова, в частности используется теорема Барбашина — Красовского [1] об асимптотической устойчивости в целом. Подобный подход использовался в [2, 3].

Систему (1.1) будем называть стабилизируемой на $P\subset TCM$ по входам u_i ($i=\overline{1, m}$), если ее можно перевести из каждой точки $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\in P$ в любую ε-окрестность нуля при $u_j=0$ ($j=\overline{m+1, n}$).

Непрерывную однозначную функцию $B(q_1\ldots q_n)$ на CM будем называть определенно-положительной бесконечно большой по координатам $q_1\ldots q_s$, если

$$B=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{s} q_i^2=0,\quad \lim_{p\to\infty} B=\infty,\quad p=\sum_j q_j^2,\quad j\in(\overline{1, s})\diagdown(\overline{k, l})$$

В случае $s=n$ функцию $B(\mathbf{q})$ будем называть определенно-положительной бесконечно большой на CM.

Утверждение 1. Пусть функция $B(\mathbf{q})$ — определенно-положительная бесконечно большая на CM. Если система (1.1) при $\mathbf{u}=0$ не допускает частного решения $q_j=q_j^*$ (исключая $(\mathbf{q}^*, 0)\in Q$), то она стабилизируема по входу u_j ($j\in\overline{1, n}$) на многообразии $TCM\backslash\Omega(u_j)$.

Доказательство. Выберем гладкую функцию $u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$, такую, чтобы $|u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})|\leqslant a_j$, $\operatorname{sign} u_j=-\operatorname{sign} q_j^{\cdot}$. Ввиду ограниченности $B(\mathbf{q})$ решения могут быть продолжены на бесконечном интервале времени [4] (§ 13, с. 151). Правая часть системы с обратной связью, записанной в нормальной форме, непрерывная гладкая. Если $\Omega=\Omega(u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}))$, то $\dim\Omega<2n$. Тогда область $TCM\backslash\Omega$ будет открытая, всюду плотная в TCM ввиду некомпактности TCM и непрерывности $E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$. Функция Ляпунова $E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ — определенно-положительная бесконечно большая на TCM, причем $dE/dt=u_jq_j^{\cdot}\leqslant 0$. На многообразии $dE/dt=0$ нет целых траекторий системы, ибо $u_j=0$ при $q_j^{\cdot}=0$, а частное решение $q_j^{\cdot}\equiv 0$ (при $\mathbf{u}\equiv 0$) отсутствует по условию. В силу свойств $B(\mathbf{q})$ (п. 1) функция $E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ имеет только один минимум. Система с обратной связью $u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ асимптотически устойчива в области $TCM\backslash\Omega(u_j)$ (по теореме Барбашина — Красовского), так как поверхности уровня $E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})=c$, $c>0$ ограничены в TCM. Таким образом, имеет место стабилизируемость системы (1.1) по входу u_j ($j\in\overline{1, n}$) на $TCM\backslash\Omega(u_j)$.

Можно синтезировать не только гладкие стабилизирующие управления (типа $u_j=-(a_j/\pi)\operatorname{arctg} q_j^{\cdot}$), но и релейные, например

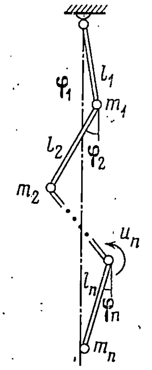
$$\check{u}_j={}^1/_2a_j[\operatorname{sign} q_j^{\cdot\cdot}|_{\mathbf{u}=0}-\operatorname{sign} q_j^{\cdot}] \tag{2.1}$$

Здесь под $q_j^{\cdot\cdot}|_{\mathbf{u}=0}=f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ понимается правая часть j-го уравнения Эйлера — Лагранжа в форме $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}=\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})+A^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{u}$ при свободном движении ($\mathbf{u}\equiv 0$).

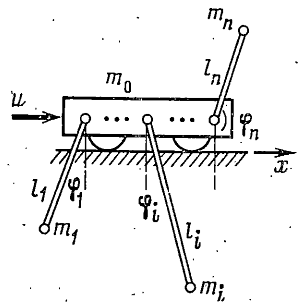
Покажем, что полученная система с обратной связью (2.1) будет асимптотически устойчивой на некотором открытом всюду плотном в TCM множестве $TCM\backslash\Omega_1(\check{u}_j)$, которое определим дальше. Производная от функции $E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ в силу уравнений движения $dE/dt=\check{u}_jq_j^{\cdot}=-{}^1/_2a_j|q_j^{\cdot}|\{1-\operatorname{sign}[q_j^{\cdot}f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})]\}\leqslant 0$. Поэтому остается показать $dE/dt\not\equiv 0$. Управление (2.1) наделяет правую часть системы (1.1) переменной структурой, т. е. на поверхностях разрывов возможны скользящие режимы, и движение будет описываться новыми уравнениями. Их можно получить формальной заменой $\check{u}_j$ на эквивалентное u_e (ввиду линейности системы по $\mathbf{u}$) по правилу Филиппова [5]. Скользящий режим на поверхности $q_j^{\cdot}=0$ невозможен, так как условие его существования (при $f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\neq 0$):

$$|f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})+{}^1/_2a_j\alpha_{jj}(\mathbf{q})\operatorname{sign} f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})|<{}^1/_2a_j\alpha_{jj}(\mathbf{q})$$

не выполнимо (здесь $A^{-1}(\mathbf{q})=\{\alpha_{ij}(\mathbf{q})\}$, $\alpha_{jj}(\mathbf{q})>0$). Скользящий режим на пересечении поверхностей $f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})=0$ и $q_j^{\cdot}=0$ невозможен, так как из $q_j^{\cdot}=0$ следует $u_e=-f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})/\alpha_{jj}(\mathbf{q})=0$, а при $\check{u}_j=0$ частное решение $q_j^{\cdot}\equiv 0$ не имеет места (по условию). Эквивалентное управление, найденное из условия $d/dt f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})=0$, равно $u_e={}^1/_2a_j[\mu-\operatorname{sign} q_j^{\cdot}]$, $|\mu|\leqslant 1$, причем тождество $|\mu(t)|\equiv 1$ невозможно. Поэтому $dE/dt=u_eq_j^{\cdot}=-{}^1/_2a_j|q_j^{\cdot}|(1-\mu\operatorname{sign} q_j^{\cdot})\leqslant 0$, $dE/dt\not\equiv 0$. В случае, когда $\operatorname{sign} q_j^{\cdot}=\operatorname{sign} f_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ — движение свободное ($\check{u}_j=0$), т. е. $d/dt(q_j^{\cdot 2})>0$. Это возможно лишь на ограниченном интервале времени, так как ограничена величина $q_j^{\cdot 2}(t)$ (в силу $E\leqslant E(t_0)$).



Фиг. 1



Фиг. 2

Предел $\lim\limits_{t\to\infty} q_j^{\cdot 2}=M<\infty$ не имеет места, ибо на многообразии $q_j^{\cdot 2}=M$ не выполняется условие $\operatorname{sign} q_j^{\cdot}=\operatorname{sign} f_j(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})$, что ведет к противоречию с непрерывной зависимостью решений от начальных условий. Итак, синтезированное управление (2.1) разбивает фазовое пространство на области постоянства управления $u_j=\pm a_j, 0$, причем возможны скольжения по границам $f_j(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot})=0$ этих областей (движение при u_e). Кроме того, здесь будут иметь место «зоны застоя» (неустойчивые многообразия Q_a), характерные для систем с сухим трением. Таким образом, множество $\Omega_1=\Omega_1(\breve{u}_j(\mathbf{q},\mathbf{q}^{\cdot}))$ образовано из Q_a (исключая устойчивое подмножество, содержащее $(0,0)$) и тех сепаратрисных поверхностей $\Omega(0)$, $\Omega(a_j)$, $\Omega(-a_j)$, движение по которым внутри описанных областей постоянства управления будет происходить за бесконечное время. В силу уравнений системы справедливо $dE/dt\leqslant 0$, $dE/dt\not\equiv 0$. Функция $\breve{u}_j(t)$, совпадающая на интервалах скольжения с $u_e(t)$, имеет разрывы только первого рода. Распространенная на этот случай теорема Барбашина – Красовского доказывает асимптотическую устойчивость системы на $TCM\setminus\Omega_1(\breve{u}_j)$.

Пример 1. Рассмотрим плоский n-звенный маятник без трения; точка подвеса зафиксирована (фиг. 1). Здесь

$$\mathbf{q}=\|\varphi_1\ldots\varphi_n\|^T,\quad A(\mathbf{q})=\{a_{ij}(\varphi)\}$$

$$E={}^1\!/_2\mathbf{q}^{\cdot T}A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(gl_i\sum_{j=i}^{n}m_j\right)(1-\cos\varphi_i)\right\}$$

где φ_i – углы от вертикали, m_i – массы жестких звеньев, сосредоточенные в шарнирах, l_i – длины звеньев. Система не может иметь, например, частного интеграла $\varphi_n^{\cdot}\equiv 0$ при свободном движении (исключая положения равновесия). Это можно показать от противного. Введя безразмерные параметры и время

$$b_i=l_i\Big/\sum_{j=1}^{n}l_j,\quad d_i=m_i\Big/\sum_{j=1}^{n}m_j\quad (i=\overline{1,n}),\qquad \tau=t\left(g\Big/\sum_{i=1}^{n}l_i\right)^{1/2}$$

получим уравнения свободного движения

$$\left(b_i\sum_{j=i}^{n}d_j\right)(b_i\varphi_i^{\cdot\cdot}+\sin\varphi_i)=-\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\varphi)\varphi_j^{\cdot}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\sum\sum_{i\neq j}\frac{a_{ij}}{2}(\varphi)\varphi_i^{\cdot}\varphi_j^{\cdot}\qquad(i=\overline{1,n})$$

$$a_{ij}(\varphi)=\left[b_ib_j\sum_{k=\max(i,j)}^{n}d_k\right]\cos(\varphi_j-\varphi_i)=s_{ij}\cos(\varphi_j-\varphi_i)$$

Преобразуем правую часть

$$\left(b_i\sum_{j=i}^{n}d_j\right)(b_i\varphi_i^{\cdot\cdot}+\sin\varphi_i)=$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} s_{ij} [\varphi_j^{\cdot\cdot} \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \varphi_j^{\cdot 2} \sin(\varphi_j - \varphi_i)] \qquad (i = \overline{1, n})$$

Итак, примем $\varphi_n \equiv \varphi_{n0}$. Тогда из

$$b_n d_n \sin \varphi_{n0} = -\frac{d^2}{dt^2} \Big(\sum_{j=1}^{n} s_{nj} \sin(\varphi_j - \varphi_{n0}) \Big)$$

получим (ввиду ограниченности суммы в скобках правой части) $\sin \varphi_{n0} = 0$, $\sum_{j=1}^{n} s_{nj} \sin \varphi_j = \text{const}$ $(j = \overline{1, n})$. В силу обозначения s_{ij} отсюда следует $\sum_{j=1}^{n} l_j \sin \varphi_j = \text{const}$ $(j = \overline{1, n})$, т. е. движение свободного конца многозвенника происходит по вертикальной прямой. Рассматривая проекцию на горизонтальную ось сил, действующий на $(n-1)$-й стержень, взятый отдельно, приходим к выводу

$$\sin \varphi_{n-1} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n-2} l_j \sin \varphi_j = \text{const}$$

Последовательно «отделяя» звенья, получим $\sin \varphi_i = 0$ $(i = \overline{1, n})$. Итак, частный интеграл $\varphi_n^{\cdot} \equiv 0$ возможен лишь для положений равновесия системы. Следовательно, прикладывая в n-м шарнире маятника ограниченный момент $u_n^{\vee} = {}^1/_2 a_n [\operatorname{sign} \varphi_n^{\cdot\cdot}|_{u=0} - \operatorname{sign} \varphi_n^{\cdot}]$, можно перевести его из произвольной точки многообразия $TCM \backslash \Omega_1(u_n^{\vee})$ в любую ε-окрестность нуля за конечное время.

3. Пусть гладкое синтезированное управление $u_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ (для негладких $u_j^{\vee}(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ рассуждения аналогичны) переводит систему из любой точки $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0^{\cdot}) \in TCM \backslash \Omega(u_j)$ в ε-окрестность нуля за конечное время. В случае $(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0^{\cdot}) \in \Omega(u_j)$ время движения на $\Omega(u_j)$ до ε-окрестности неустойчивого положения равновесия $(q^*, 0) \in Q$ также конечно. Если в окрестности точки $(\mathbf{q}^*, 0) \in Q$ имеется локальная управляемость, то внутри ее допустимым управлением можно перевести объект на $TCM \backslash \Omega(u_j)$, причем на меньший уровень энергии. Итак, если система (1.1) стабилизируема по входу u_j на $TCM \backslash \Omega(u_j)$ и при этом локально управляема в окрестностях всех точек $(\mathbf{q}^*, 0) \in Q$, то областью нуль-управляемости [6] будет все фазовое пространство TCM, из любой точки которого объект можно перевести в $(0, 0)$ за конечное время (в ε-окрестности нуля можно синтезировать управление для линеаризованной системы, используя результаты [7]). Тогда ввиду симметрии $t \to -t$ для рассматриваемой натуральной лагранжевой системы существует допустимое управление, переводящее ее из $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^{\cdot})$ в $(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2^{\cdot})$ (с промежуточным положением $(0, 0)$) за конечное время. Таким образом, имеет место глобальная управляемость по входу u_j, достаточным условием которой для (1.1) является стабилизируемость на $TCM \backslash \Omega(u_j)$ и локальная управляемость в окрестностях $(\mathbf{q}^*, 0) \in Q$, которую достаточно [6] обнаружить в линейном приближении, т. е. для системы $A_* \mathbf{q}^{\cdot\cdot} = -B_* (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) + \mathbf{u}$, где $A_* = A(\mathbf{q}^*)$, $B_* = (\partial^2 B / \partial \mathbf{q}^2) \mathbf{q}^*$. Заменой переменной $A_* (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) = \mathbf{z}$ получим

$$\mathbf{z}^{\cdot\cdot} = -B_* A_*^{-1} \mathbf{z} + \mathbf{u} \qquad (3.1)$$

при этом управление рассмотрим в виде $\mathbf{u} = \|0 \ldots u_j \ldots 0\|^T$, $|u_j| \leqslant a_j$.

Для системы (3.1) условие Калмана сводится ([8], с. 225) к следующему: для управляемости по входу u_j необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы $A_*^{-1} B_*$ были различные, а в j-х элементах ее собственных векторов не было нулей. Иногда удобно использовать другое равносильное условие ([8]): для управляемости системы $\mathbf{z}^{\cdot\cdot} = -D\mathbf{z} + \mathbf{b} V$ (где матрица D — диагонализуемая, $\mathbf{b}$ — вектор, V — скалярное управление) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\operatorname{rank} K=n$, где $K=\|\mathbf{b}, D\mathbf{b}, \ldots, D^{n-1}\mathbf{b}\|$.

К примеру, рассмотрим n-звенный маятник (фиг. 1) в случае $m_i=m$, $l_i=l$ $(i=\overline{1, n})$. Здесь $B_*(0)=mgl\operatorname{diag}(n+1-i)$ $(i=\overline{1, n})$:

$$A(0)=ml^2\begin{Vmatrix} n & n-1 & \ldots & 1 \\ n-1 & n-1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & & 1\end{Vmatrix}, \quad A^{-1}(0)=\frac{1}{ml^2}\begin{Vmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & & & -1 & 2\end{Vmatrix}$$

т. е. матрица $D(0)=B(0)A^{-1}(0)$ — трехдиагональная, не имеющая нулей на трех диагоналях. Можно убедиться, что этим свойством обладают матрицы $D(\mathbf{q}^*)$ во всех положениях равновесия n-звенника, ибо они получаются из $D(0)$ лишь изменением знаков некоторых элементов. Допустим, единственный управляющий момент приложен в последнем шарнире маятника, т. е. $\mathbf{b}=\|0\ldots 01\|^T$. В этом случае матрица $K=\|\mathbf{b}, D\mathbf{b}, \ldots, D^{n-1}\mathbf{b}\|^T$ треугольного вида, на ее диагонали — произведения ненулевых элементов D, а значит, $\operatorname{rank} K=n$. Таким образом, система локально управляема по входу u_n во всех окрестностях $(\mathbf{q}^*, 0)\in Q$. Учитывая изложенное выше, можно, например, построить управление $|u_n(t)|\leqslant a_n$, переводящее n-звенный маятник из нижнего положения равновесия в неустойчивое верхнее за конечное время. Для этого достаточно обратить во времени стабилизирующее управление из примера 1 и управления, действующие в линеаризованной около верхнего и нижнего положений равновесия системе, взяв их в необходимой очередности.

4. Очевидно, что в силу свойств матрицы $A(\mathbf{q})$ энергия $E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)$ — всегда функция определенно-положительная бесконечно большая по координатам $q_1^\cdot \ldots q_n^\cdot$. Если потенциал $B(\mathbf{q})$ и некоторая непрерывная однозначная функция $\Psi(q_{s+1}\ldots q_n)$ будут обладать этим свойством соответственно по координатам $q_1\ldots q_s$ и $q_{s+1}\ldots q_n$, то функция $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)=E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)+\Psi(q_{s+1}\ldots q_n)$ будет определенно-положительной бесконечно большой на TCM. Выберем искусственный потенциал $\Psi(q_{s+1}\ldots q_n)$ из условия: существует $\partial\Psi/\partial\mathbf{q}$, причем $|\partial\Psi/\partial\mathbf{q}|\leqslant{}^1/_2\mathbf{a}$. Например, возьмем $\Psi(q_{s+1}\ldots q_n)=\sum \Psi_i(q_i)$ $(i=\overline{s+1, n})$, где $\Psi_i(q_i)$ в зависимости от типа координат (угловых или нет) будут иметь вид

$$\Psi_i(q_i)=a_i/\pi[q_i\operatorname{arctg} q_i-{}^1/_2\ln(q_i^2+1)] \quad \text{при } i\notin(\overline{k, l}) \tag{4.1}$$

$$\Psi_i(q_i)={}^1/_2a_i(1-\cos q_i) \quad \text{при } i\in(\overline{k, l}) \tag{4.2}$$

Пусть в системе (1.1) $u_m\equiv 0$ $(m=\overline{1, s})$, тогда $dE/dt=\sum u_iq_i^\cdot$, $i=\overline{s+1, n}$. Выберем $u_i=u_i^*+u_{i0}$, где $\operatorname{sign} u_i^*=-\operatorname{sign} q_i^\cdot$, $u_{i0}=-\partial\Psi/\partial q_i$, $|u_i^*|\leqslant{}^1/_2a_i$ $(i=\overline{s+1, n})$. Тогда производная по времени от функции Ляпунова $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)=E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^\cdot)+\Psi(q_{s+1}\ldots q_n)$ в силу уравнений движения будет

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=s+1}^{n} u_iq_i^\cdot+\sum_{i=s+1}^{n}\frac{\partial\Psi}{\partial q_i}q_i^\cdot=\sum_{i=s+1}^{n} u_i^*q_i^\cdot\leqslant 0, \quad |u_i|\leqslant a_i \quad (i=\overline{s+1, n})$$

Система управления с лагранжианом $L_1=L-\Psi(q_{s+1}\ldots q_n)$ обладает всеми свойствами из условий утверждения 1. Поэтому справедливо

Утверждение 2. Пусть в системе (1.1) функция $B(\mathbf{q})$ — определенно-положительная бесконечно большая по $q_1\ldots q_s$. Если существует определенно-положительная бесконечно большая $\Psi(q_{s+1}\ldots q_n)$, $|\partial\Psi/\partial\mathbf{q}|\leqslant{}^1/_2\mathbf{a}$, такая, что у системы с лагранжианом $L_1=L-\Psi$ при свободном движении выполняется $\sum q_i^{\cdot 2}\not\equiv 0$ $(i=\overline{s+1, n})$ (исключая положения равновесия), то система (1.1) стабилизируема при $u_m\equiv 0$ $(m=\overline{1, s})$ на многообразии $TCM\setminus\Omega(u_{s+1}\ldots u_n)$. Если при этом в окрестностях $(\mathbf{q}^*, 0)\in Q$ в случае $u_m\equiv 0$ $(m=\overline{1, s})$ имеет место локальная управляемость, то система (1.1) будет глобально управляема по входам u_k $(k=\overline{s+1, n})$.

Пример 2. Рассмотрим плоскую систему n маятников, точки подвеса которых находятся на твердом теле массы m_0, совершающем прямолинейное движение (координата x) под действием внешней горизонтальной силы u (фиг. 2). Трение отсутствует

$$\mathbf{q}=\|x, \varphi_1 \ldots \varphi_n\|^T, \quad E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})=\frac{x^{\cdot 2}}{2}\left(m_0+\sum_{i=1}^{n} m_i\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i l_i^2 \varphi_i^{\cdot 2}+x^{\cdot}\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \varphi_i^{\cdot}\cos\varphi_i+g\sum_{i=1}^{n} l_i m_i(1-\cos\varphi_i)$$

Здесь φ_i — углы отклонения математических маятников от вертикали, m_i — их массы, l_i — длины $(i=\overline{1, n})$. Функция $B(\mathbf{q})$ — определенно-положительная бесконечно большая по φ_i $(i=\overline{1, n})$. Выберем $\Psi(x)=$ $=a/\pi[x \operatorname{arctg} x-{}^1/_2\ln(x^2+1)]$. Тогда $V(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})=E(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})+\Psi(x)$ — функция определенно-положительная бесконечно большая на TCM. Для системы с лагранжианом $L_1=L-\Psi(x)$ при $u\equiv 0$ частное решение $x^{\cdot}\equiv 0$ возможно лишь для положений равновесия $(\mathbf{q}^*, 0)\in Q$ и «зеркальных» движений (т. е. при совпадении собственных частот малых колебаний некоторых маятников). Действительно, из уравнения $d/dt(\partial L/\partial x^{\cdot})=\partial L/\partial x-a/\pi \operatorname{arctg} x$ при $x\equiv x_0$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i l_i \sin\varphi_i={}^1/_2 at^2/\pi \operatorname{arctg} x_0+c_1t+c_2$$

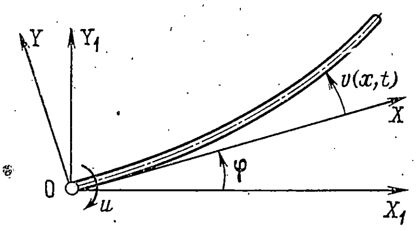
откуда, в силу ограниченности левой части при $t\to\infty$, следует $c_1=0$, $x_0=0$, т. е. движение по φ, $\varphi^{\cdot}$ эквивалентно распавшейся системе однозвенных маятников. При этом $\sum m_i l_i^2 \varphi_i^{\cdot}=0$, $i=\overline{1, n}$, т. е. они либо покоятся, либо совершают симметричные движения. Следовательно, если собственные частоты малых колебаний всех маятников различны, то систему можно перевести из $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})\in TCM\backslash\Omega_1(u^{\vee})$ в любую окрестность нуля с помощью ограниченной силы, например $u^{\vee}=u_0+{}^1/_4 a[\operatorname{sign} x^{\cdot\cdot}|_{u=u_0}-\operatorname{sign} x^{\cdot}]$, $u_0=$ $=-a/\pi \operatorname{arctg} x$. При этом же условии, как показано для случая $m_0\gg m_i$ $(i=\overline{1, n})$ в [9, с. 339], в окрестности всех положений равновесия объект локально управляем. Можно убедиться, что и в случае произвольных $m_i\sim m_0$ (в рамках физических ограничений типа неотрицательности веса «тележки» и т. п.) условие локальной управляемости остается таким же. Здесь

$$\det K=\prod_{i=1}^{n}(1/l_i)\prod_{j\geqslant k}(\lambda_j-\lambda_k), \quad \lambda_j=\left(1-\sum_{i=1}^{n}(c_i/l_i)\right)\Big/\, l_j+\sum_{i=1}^{n} c_i/l_i^2$$

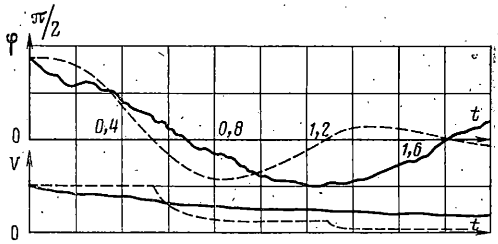
$$c_i=m_i l_i\Big/\left(m_0+\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \qquad (i, j, k=\overline{1, n})$$

Ввиду того что моменты инерции стержней в модели не рассматриваются (они учтены приведением m_0, m_i, l_i $(i=\overline{1, n})$), условие локальной управляемости $l_i\neq l_j$ $(i\neq j)$ здесь равносильно требованию различных собственных частот. При его выполнении в силу утверждения 2 имеется глобальная управляемость по скалярному входу, т. е. существует $|u(t)|\leqslant a$, переводящее систему из $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1^{\cdot})$ в $(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2^{\cdot})$ за конечное время.

Пример 3. Рассматривается плоское движение упругого стержня (фиг. 3). Один конец его соединен шарниром с неподвижной точкой O, в которой приложен ограниченный момент $|u|\leqslant a$. Поле тяготения отсутствует. Вращающуюся в инерциальной системе X_1OY_1 ось OX зададим по направлению касательной к нейтральной линии стержня в точке O. Угол φ между осями OX_1 и OX, а также $\vartheta(x, t)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ — упругие отклонения точек стержня от оси OX, полностью определяют конфигурацию системы. Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность, E_1 — модуль Юнга, $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба, I — момент инерции стержня относительно точки O. Тогда



Фиг. 3



Фиг. 4

выражение для энергии (без учета продольных перемещений точек стержня и с точностью до членов не выше второго порядка малости):

$$E=\frac{\dot\varphi^2}{2}\left\{I+\int_0^1\rho(x)\,[x^2+\vartheta^2]\,dx+\dot\varphi\int_0^1\rho(x)\,x\dot\vartheta\,dx+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\rho(x)\,\dot\vartheta^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 E_1J(x))\,[\vartheta_{xx}'']^2\,dx$$

Поставим задачу перевода системы из произвольного начального состояния в положение ($\varphi=0$, $\dot\varphi=0$) с гашением упругих колебаний. Аппроксимируем систему конечномерной (φ, $\dot\varphi$, $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$), $\mathbf{q}=\|q_1\ldots q_n\|^T$, используя сплайн-интерполяцию с кубическим локальным носителем:

$$\vartheta(x,t)\approx\sum B_i(x)\,q_i(t)\qquad (i=\overline{1,n})$$

Граничные сплайны определяются из учета краевых условий: $\vartheta(t,0)=\vartheta_x'(t,0)=0$, $\vartheta_{xx}''(t,1)=0$. Введя обозначения $G=\left\{\int_0^1\rho B_iB_j\,dx\right\}$

$H=\left\{\int_0^1\rho E_1JB_i''B_j''\,dx\right\}$, $c=\int_0^1\rho x^2\,dx$, $f_i=\int_0^1\rho B_i dx$ $(i,j=\overline{1,n})$, получим

$$E(\varphi,\dot\varphi,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})={}^1/_2\dot\varphi^2[I+c+\mathbf{q}^TG\mathbf{q}]+$$
$$+\dot\varphi\mathbf{F}^T\dot{\mathbf{q}}+{}^1/_2\dot{\mathbf{q}}^TG\dot{\mathbf{q}}+{}^1/_2\mathbf{q}^TH\mathbf{q}$$

Здесь матрицы G, H определенно-положительные, как и матрица кинетической энергии

$$A(\mathbf{q})=\left\|\begin{array}{c|c} I+c+\mathbf{q}^TG\mathbf{q} & \mathbf{F}^T\\ \hline \mathbf{F} & G\end{array}\right\|;\qquad \mathbf{F}=\|f_1\ldots f_n\|^T$$

Энергия системы $E(\varphi,\dot\varphi,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ — функция определенно-положительная бесконечно большая по координатам ($\dot\varphi$, $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$). Выберем $\Psi(\varphi)=a/2(1-\cos\varphi)$, тогда $u_0=-\partial\Psi/\partial\varphi=-a/2\sin\varphi$. Управляемое движение описывается уравнением

$$\|\ddot\varphi,\ \ddot{\mathbf{q}}^T\|^T=A^{-1}(\mathbf{q})\,\|u-2\dot\varphi\mathbf{q}^TG\dot{\mathbf{q}},\ \ \mathbf{q}^T(\dot\varphi^2G-H)\|^T$$

Частное решение $\dot\varphi\equiv0$ при $u=u_0$, $(E+\Psi)>0$ не имеет места (физически это означает, что при свободном движении стержня с защемленным концом момент в точке защемления не равен тождественно нулю). Стабилизирующее управление можно выбрать, например, в виде

$$u=u_0+{}^1/_4a[\operatorname{sign}\ddot\varphi|_{u=u_0}-\operatorname{sign}\dot\varphi]\tag{4.3}$$
$$\ddot\varphi|_{u=u_0}=\delta[u_0-2\dot\varphi\dot{\mathbf{q}}^TG\dot{\mathbf{q}}-\mathbf{F}^TG^{-1}(G\dot\varphi^2-H)\mathbf{q}],\quad \delta>0$$

Полученное управление, в силу равномерности сплайн-интерполяции, переводит бесконечномерную систему из окрестности (задаваемой естественной нормой) точки $(\varphi, \dot\varphi, \vartheta(x, t), \dot\vartheta(x, t))$ в ε-окрестность точки $(0, 0, 0, 0)$.

Расчеты на ЭВМ проводились для однородного стального стержня длиной 1 м с квадратным сечением площади 10^{-5} м^2. В начальном состоянии $\varphi={}^1/_2\pi$, $\dot\varphi=0$ система покоилась. Ограничение на управляющий момент (4.3) было равно 1 Нм. На фиг. 4 изображены зависимости от времени (в c) угла φ и функции $V=E+{}^1/_2a\cdot(1-\cos\varphi)$.

Пунктирные кривые соответствуют случаю абсолютной жесткости стержня. Численные эксперименты показали, что для высокой точности сплайн-интерполяции достаточно взять $n=8$ участков разбиения.

Использованный в примере 3 подход применим для всех рассмотренных маятниковых систем с учетом упругости стержней.

Автор благодарит И. Ф. Борецкого, предложившего, в частности, пример 3, за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова.— В кн.: *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, с. 463—474.
2. *Румянцев В. В.* Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 6, с. 966—976.
3. *Блинов А. П.* Об оценке области управляемости в нелинейных системах.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 593—600.
4. *Формальский А. П.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.
5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Мат. сб., 1960, т. 51, № 1, с. 99—128.
6. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
7. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости.— Мат. сб., 1979, т. 109, № 4, с. 582—606.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
9. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

Казань

Поступила в редакцию 28.VIII.1985