МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОЙ СФЕРЫ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

МЕХТИЕВ М. Ф.

В [1] была предпринята попытка изучить распространение упругих волн в полой сфере по трехмерной теории упругости. Однако при исследовании частотного уравнения рассмотрены некоторые вырожденные случаи, которые не позволяют получить полной информации о спектре частот. Кроме того, как было отмечено в [2], сложность анализа не позволила представить формы колебаний в явном виде.

В [3] методом однородных решений были исследованы вынужденные колебания сферического пояса, находящегося под действием осесимметричных нагрузок. В зависимости от частоты вынуждающих сил изучена возможная форма волнообразования.

В публикуемой работе предлагается асимптотический процесс для нахождения частот свободных осесимметричных колебаний полой сферы. Подробно асимптотический процесс строится для замкнутой сферы со свободными боковыми поверхностями. Приводится сравнение результатов, полученных по теории Кирхгофа — Лява, с результатами, полученными по трехмерной теории упругости.

1. Для замкнутой полой сферы выпишем уравнения движения в векторной форме:

$$(1-2\nu)^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U}=m_0G^{-1}\partial^2\mathbf{U}/\partial t^2 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{U}=(U_r, U_\theta)$ — вектор перемещения, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, m_0 — плотность материала оболочки.

Предположим, что граница свободна от напряжений, т. е.

$$\sigma_r=0,\quad \tau_{r\theta}=0 \quad \text{при } r=R_s\ (s=1,\ 2) \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1), используя результаты [3], представим в виде

$$[U_r, U_\theta]=\left[U(\rho)P_n(\cos\theta), W(\rho)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right]e^{i\omega t} \tag{1.3}$$

$$U(\rho)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\alpha Z_z'(\alpha\rho)-\frac{1}{2\rho}Z_z(\alpha\rho)-\frac{1}{\rho}(z^2-{}^1/_4)Z_z(\lambda\rho)\right]$$

$$W(\rho)=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left[\frac{1}{\rho}Z_z(\alpha\rho)-\lambda Z_z'(\lambda\rho)-\frac{1}{2\rho}Z_z(\lambda\rho)\right] \tag{1.4}$$

$$\alpha^2=[(1-2\nu)/2(1-\nu)]\lambda^2,\quad \lambda^2=[2(1+\nu)m_0R_0^2\omega^2]/E$$

$$z^2=n(n+1)+{}^1/_4,\quad Z_z(x)=c_1J_z(x)+c_2Y_z(x)$$

где $\rho=r/R_0$, $R_0={}^1/_2(R_1+R_2)$ — радиус срединной поверхности оболочки, $P_n(\cos\theta)$ — функции Лежандра, $J_z(x)$, $Y_z(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, c_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — произвольные постоянные.

Удовлетворяя однородным граничным условиям (1.2), получаем частотное уравнение относительно λ:

$$\Delta(z,\lambda,\rho_1,\rho_2)=-32\pi^{-2}(z^2-{}^1/_4)\varphi_1(z,\rho_1)\varphi_1(z,\rho_2)-$$

$$-F_1(\alpha,z,\rho_1,\rho_2)G_1(\lambda,z,\rho_1,\rho_2)+(z^2-{}^1/_4)[F_2(\alpha,z,\rho_1,\rho_2)G_2(\lambda,z,\rho_1,\rho_2)+ \tag{1.5}$$

$$+F_2(\alpha,z,\rho_2,\rho_1)G_2(\lambda,z,\rho_2,\rho_1)]-(z^2-{}^1/_4)^2F_3(\alpha,z,\rho_1,\rho_2)G_3(\lambda,z,\rho_1,\rho_2)=0$$

$$F_1(\alpha, z, \rho_1, \rho_2) = \varphi_2(z, \rho_1)\varphi_2(z, \rho_2) L_z^{(0,0)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) - 4\alpha\rho_1\varphi_2(z, \rho_2) L_z^{(1,0)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) -$$
$$-4\alpha\rho_2\varphi_2(z, \rho_1) L_z^{(0,1)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) + 16\alpha^2\rho_1\rho_2 L_z^{(1,1)}(\alpha, \rho_1, \rho_2)$$
$$G_1(\lambda, z, \rho_1, \rho_2) = \varphi_3(z, \rho_1)\varphi_3(z, \rho_2) L_z^{(0,0)}(\lambda, \rho_1, \rho_2) - 2\lambda\rho_1\varphi_3(z, \rho_2) L_z^{(1,0)}(\lambda, \rho_1, \rho_2) -$$
$$-2\lambda\rho_2\varphi_3(z, \rho_1) L_z^{(0,1)}(\lambda, \rho_1, \rho_2) + 4\lambda^2\rho_1\rho_2 L_z^{(1,1)}(\lambda, \rho_1, \rho_2) \qquad (1.6)$$
$$F_2(\alpha, z, \rho_1, \rho_2) = 3\varphi_2(z, \rho_1) L_z^{(0,0)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) - 12\alpha\rho_1 L_z^{(1,0)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) -$$
$$-2\alpha\rho_2\varphi_2(z, \rho_1) L_z^{(0,1)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) + 8\alpha^2\rho_1\rho_2 L_z^{(1,1)}(\alpha, \rho_1, \rho_2)$$
$$G_2(\lambda, z, \rho_1, \rho_2) = 3\varphi_3(z, \rho_1) L_z^{(0,0)}(\lambda, \rho_1, \rho_2) - 6\lambda\rho_1 L_z^{(1,0)}(\lambda, \rho_1, \rho_2) -$$
$$-2\lambda\rho_2\varphi_3(z, \rho_1) L_z^{(0,1)}(\lambda, \rho_1, \rho_2) + 4\lambda^2\rho_1\rho_2 L_z^{(1,1)}(\lambda, \rho_1, \rho_2)$$
$$F_3(\alpha, z, \rho_1, \rho_2) = 9 L_z^{(0,0)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) - 6\alpha\rho_1 L_z^{(1,0)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) -$$
$$-6\alpha\rho_2 L_z^{(0,1)}(\alpha, \rho_1, \rho_2) + 4\alpha^2\rho_1\rho_2 L_z^{(1,1)}(\alpha, \rho_1, \rho_2), \qquad G_3(\lambda) = F_3(\lambda)$$
$$L_z^{(l,s)} = J_z^{(l)}(\psi\rho_1) Y_s^{(s)}(\psi\rho_2) - J^{(s)}(\psi\rho_2) Y_z^{(l)}(\psi\rho_1) \qquad (s, l = 0, 1)$$
$$\varphi_1(z, \rho) = 2z^2 - {}^9/_2 - \lambda^2\rho^2, \quad \varphi_2(z, \rho) = 2z^2 + {}^3/_2 - \lambda^2\rho^2, \quad \varphi_3(z, \rho) = 2z^2 - {}^3/_2 - \lambda^2\rho^2$$

Уравнение (1.5) имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности.

2. Уравнение (1.5) имеет весьма сложную структуру, поэтому точному анализу оно не поддается. Нули функции (1.5) могут быть найдены численно. Однако в случае тонких оболочек асимптотический метод является более эффективным и позволяет определить любую частоту с любой наперед заданной точностью. Поэтому проведем асимптотический анализ частотного уравнения. Для этого, как в [3], положим

$$\rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon, \quad 2\varepsilon = (R_2 - R_1)/R_0 = 2h/R_0 \qquad (2.1)$$

Считаем, что ε — малый параметр. Подставляя (2.1) в (1.5), получим

$$D(z, \lambda, \varepsilon) = \Delta(z, \lambda, \rho_1, \rho_2) = 0 \qquad (2.2)$$

Случай $z^2 = {}^1/_4$ является особым и рассматривается отдельно.

Для любого конечного z [$z = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$] функция $D(z, \lambda, \varepsilon)$ имеет два нуля со следующими асимптотическими свойствами: $\Lambda_k = O(1)$ ($k = 1, 2$) ($\Lambda^2 = m_0 R_0^2 \omega^2 / E$).

Приведем схему доказательства этого утверждения. Для этого используем разложения $D(z, \lambda, \varepsilon)$ в ряд по ε, приведенные в [3]:

$$D(z, \lambda, \varepsilon) = \frac{64}{3\pi^2}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2 \Lambda^4\varepsilon^2 \langle -12(1-\nu^2)^2\Lambda^4 + 12(1-\nu^2)\Lambda^2 z^2 +$$
$$+9(1-\nu^2)(4\nu+1)\Lambda^2 - 12(1-\nu^2)z^2 + 27(1-\nu^2) + \{-4z^6 + [3 + 16\nu^2 +$$
$$+2(1+\nu)(3-2\nu)\Lambda^2]z^4 + [24\nu^2 - {}^{195}/_4 + 4(1+\nu)(16 - 13\nu - 12\nu^2)\Lambda^2 - \qquad (2.3)$$
$$-4(1+\nu)^{-2}(4\nu^2 - 16\nu + 11)\Lambda^4]z^2 + {}^{2241}/_{16} - 135\nu^2 +$$
$$+30(1-\nu^2)\Lambda^2[3(2\nu + {}^1/_2) - 2(1-\nu^2)\Lambda^2]\}\varepsilon^2 + {}^1/_{15}(-32z^8 + \ldots)\varepsilon^4 + \ldots\rangle = 0$$

Ищем Λ_k в виде следующего разложения

$$\Lambda_k = \Lambda_{k0} + \varepsilon^2\Lambda_{k2} + \ldots \quad (k = 1, 2) \qquad (2.4)$$

После подстановки (2.4) в (2.3) получаем

$$\Lambda_{k0}^2 = 2^{-3}(1-\nu^2)^{-1}\{4z^2 + 12\nu + 3 +$$
$$+ (-1)^k[16z^4 + (64\nu^2 + 96\nu - 40)z^2 + 72\nu + 153]^{1/2}\}$$

$$
\begin{gathered}
\Lambda_{k2}=6^{-1}(1-\nu^2)^{-1}\Lambda_{k0}^{-1}[8(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2+4z^2-12\nu- \\
-3]^{-1}\{-4z^6+[3+16\nu^2+2(1+\nu)(3-2\nu)\Lambda_{k0}^2]z^4+ \\
+[24\nu^2-{}^{195}/_4+4(1+\nu)(16-13\nu-12\nu^2)\Lambda_{k0}^2- \\
-4(1+\nu)^{-2}(4\nu^2-16\nu+11)\Lambda_{k0}^4]z^2+{}^{2241}/_{16}-135\nu^2+ \\
+30(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2[3(2\nu+{}^1/_2)-2(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2]\}
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Итак, доказано, что при фиксированных конечных z имеется две частоты собственных колебаний.

Рассмотрим случай, когда z безгранично растет при $\varepsilon\to 0$. Отдельно будем рассматривать следующие предельные случаи: $z\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$; $z\varepsilon\to \mathrm{const}$ при $\varepsilon\to 0$.

Определим вначале такие Λ_k, когда $z\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Допустим, что главные члены асимптотики Λ_k и z имеют вид

$$
\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{-q},\quad z=z_0\varepsilon^{-\beta},\quad \Lambda_{k0}=O(1),\quad z_0=O(1)\quad (0<q<1,\quad 0<\beta<1)
\tag{2.6}
$$

Подставляя (2.4) в (2.3), из условия непротиворечивости построенного асимптотического процесса получаем, что здесь возможен только случай $q\leqslant\beta$. Случай $q=0$ рассматривается отдельно.

Отметим, что иногда основной интеграл изменения параметров q и β будем разбивать на подынтервалы, так как в зависимости от того, на каком интервале находятся q и β, нули функции $D(z,\ \lambda,\ \varepsilon)$ имеют различные асимптотические представления.

Отдельно будем рассматривать случаи, когда $q=0$ и $q=\beta$. В первом случае из разложения (2.3) получаем, что $0<\beta<{}^1/_2$. Случай $\beta={}^1/_2$ рассматривается отдельно. Отыскиваем Λ_k $(k=1)$ в виде

$$
\begin{gathered}
\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^{2\beta}\Lambda_{k2}+\ldots\quad (0<\beta\leqslant{}^1/_3) \\
\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^{2-4\beta}\Lambda_{k2}+\ldots\quad ({}^1/_3<\beta<{}^1/_2)
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

После подстановки этих разложений в (2.3) получаем

$$
\begin{gathered}
\Lambda_{k0}^2=1,\quad \Lambda_{k2}=-{}^1/_2(1+\nu)(2+\nu)z_0^{-2}\quad (0<\beta<{}^1/_3) \\
\Lambda_{k2}=-{}^1/_2(1+\nu)(2+\nu)+{}^1/_6(1+\nu^2)^{-1}z_0^4\quad (\beta={}^1/_3) \\
\Lambda_{k2}={}^1/_6(1-\nu^2)^{-1}z_0^4\quad ({}^1/_3<\beta<{}^1/_2)
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

В случае, когда $q=0$, $\beta={}^1/_2$, будем иметь

$$
\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon\Lambda_{k1}+\ldots
\tag{2.9}
$$

$$
\Lambda_{k0}^2=1+{}^1/_3z_0^4/(1-\nu^2)
\tag{2.10}
$$

$$
\Lambda_{k1}=-(2z_0)^{-2}[(3-8\nu^2)/\Lambda_{k0}+5\nu(1+2\nu)\Lambda_{k0}+(1+\nu)\Lambda_{k0}^3]
$$

Аналогично в случае $q=\beta$ из (2.3) найдем

$$
\begin{gathered}
\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{-\beta}+\Lambda_{k2}\varepsilon^{\beta}+\ldots\quad (k=2,\quad 0<\beta\leqslant{}^1/_2) \\
\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{-\beta}+\Lambda_{k2}\varepsilon^{2-3\beta}+\ldots\quad (k=2,\ {}^1/_2<\beta<1)
\end{gathered}
\tag{2.11}
$$

$$
\Lambda_{k0}^2=\frac{z_0^2}{1-\nu^2},\quad \Lambda_{k2}=\frac{4\nu^2+12\nu-1}{8(1-\nu^2)\Lambda_{k0}}\quad (0<\beta<{}^1/_2)
\tag{2.12}
$$

$$
\Lambda_{k2}=\frac{4\nu^2+12\nu-1}{8(1-\nu^2)\Lambda_{k0}}-\frac{\nu^5+3\nu^4+2\nu^3+6\nu^2-35\nu+21}{12(1-\nu^2)(1+\nu)^2}\Lambda_{k0}^3\quad (\beta={}^1/_2)
$$

$$
\Lambda_{k2}=-\frac{\nu^5+3\nu^4+2\nu^3+6\nu^2-35\nu+21}{12(1-\nu^2)(1+\nu)^2}\Lambda_{k0}^3\,({}^1/_2<\beta<1)
$$

В случае $q\neq 0$, $q<\beta$, подставив (2.6) в (2.3) и сохраняя только главные члены, для Λ_{k0} получаем следующие предельные уравнения

$$D(z,\lambda,\varepsilon)=\frac{64}{3\pi^2}\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^2\Lambda_{k0}^4\varepsilon^2\langle[12(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2z_0^2+O(\varepsilon^{2\beta-2q})]\rangle\varepsilon^{-2\beta-2q}+$$
$$+\{-4z_0^6+O[\max(\varepsilon^{2\beta-2q},\varepsilon^{2-2\beta})]\}\varepsilon^{2-6\beta} \qquad (2.13)$$

Отсюда имеем $q=2\beta-1$. Из условия $q>0$ найдем $\beta>{}^1/_2$. Таким образом, ${}^1/_2<\beta<1$. Отыскиваем теперь Λ_k в следующем виде:

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{1-2\beta}+\Lambda_{k2}\varepsilon^{2\beta-1}+\ldots \quad ({}^1/_2<\beta<{}^2/_3)$$
$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{1-2\beta}+\varepsilon^{3-4\beta}\Lambda_{k2}+\ldots \quad ({}^2/_3\leqslant\beta<1) \qquad (2.14)$$

После подстановки (2.14) в (2.3) получаем

$$\Lambda_{k0}^2={}^1/_3z_0^4/(1-\nu^2),\quad \Lambda_{k2}={}^1/_2\Lambda_{k0}\quad ({}^1/_2<\beta<{}^2/_3) \qquad (2.15)$$
$$\Lambda_{k2}=\frac{1}{2\Lambda_{k0}}-\frac{1+\nu}{4z_0^2}\Lambda_{k0}^3 \quad (\beta={}^2/_3)$$
$$\Lambda_{k2}=-\frac{1+\nu}{4z_0^2}\Lambda_{k0}^3 \quad ({}^2/_3<\beta<1)$$

Рассмотрим случай, когда $z\varepsilon\to0$ при $\varepsilon\to0$, $\lambda\varepsilon\to\text{const}$ при $\varepsilon\to0$. Отыскиваем λ_n ($n=k-2$, $k=3,4,\ldots$) в следующем виде

$$\lambda_n=\delta_n/\varepsilon+O(\varepsilon),\quad z=z_0\varepsilon^{-\beta}\quad (0<\beta<1) \qquad (2.16)$$

После подстановки (2.16) в уравнение (1.5) и преобразования его с помощью асимптотических разложений функций $J_z(x)$, $Y_z(x)$ при больших значениях аргумента и индекса для δ_n получаем следующие уравнения

$$\sin[2(1-2\nu)/(1-\nu)]^{1/2}\delta_n=0,\quad \sin 2\delta_n=0 \qquad (2.17)$$

Как было отмечено в [1], частоты, определяемые из этих уравнений, соответствуют простым формам поперечных колебаний бесконечной пластины (растяжения — сжатия и сдвига).

Для построения асимптотики второй группы нулей $\lambda\sim z$, $z\varepsilon\to\text{const}$, $\lambda\varepsilon\to\text{const}$ при $\varepsilon\to0$, задавая $z=z_0\varepsilon^{-1}$, отыскиваем λ_p ($p=1,2,\ldots,p\neq k$) в следующем виде:

$$\lambda_p=\gamma_p/\varepsilon+O(\varepsilon) \qquad (2.18)$$

Как и раньше, после подстановки (2.18) в уравнение (1.5) и преобразования его с помощью асимптотических разложений $J_z(x)$, $Y_z(x)$ при больших z и x для γ_p получаем следующее уравнение:

$$[(\gamma_p^2+\varkappa_p^2)^2\operatorname{sh}\alpha_p\operatorname{ch}\varkappa_p-$$
$$-4\alpha_p\varkappa_p\gamma_p^2\operatorname{ch}\alpha_p\operatorname{sh}\varkappa_p][(\gamma_p^2+\varkappa_p^2)^2\operatorname{ch}\alpha_p\operatorname{sh}\varkappa_p- \qquad (2.19)$$
$$-4\alpha_p\varkappa_p\gamma_p^2\operatorname{sh}\alpha_p\operatorname{ch}\varkappa_p]=0$$
$$\alpha_p^2=z_0^2-{}^1/_2(1-2\nu)/(1-\nu)\gamma_p^2,\quad \varkappa_p^2=z_0^2-\gamma_p^2$$

При заданных z уравнение (2.18) определяет счетное множество γ_p. Отметим, что уравнение (2.19) фактически совпадает с частотным уравнением Релея — Лемба для упругого слоя и достаточно хорошо изучено. В принципе, возможен случай

$$z=z_0\varepsilon^{-1},\quad \lambda=\lambda_0\varepsilon^{-\beta}\quad (0<\beta<1) \qquad (2.20)$$

Подставляя (2.20) в (1.5) и преобразуя его с помощью асимптотических разложений функции Бесселя в первом члене асимптотики, получаем

$$D(z,\lambda,\varepsilon)=\sin^2 2z_0-4z_0^2+O(\varepsilon) \qquad (2.21)$$

Вещественный параметр z_0 не может быть решением уравнения

$\sin^2 2z_0-4z_0^2=0$, так как это уравнение имеет только комплексные нули. Поэтому в этом случае получаем, что $D(z,\ \lambda,\ \varepsilon)\neq 0$. Таким образом, в указанном случае колебаний не существует.

Как было отмечено, случай $z^2={}^1/_4$ $(n=0)$ является особым. В этом случае

$$U_r=U_0(\rho)e^{i\omega t},\qquad U_\theta\equiv 0,\quad \tau_{r\theta}\equiv 0 \tag{2.22}$$

Подставляя (2.22) в уравнение Ламе и граничные условия (1.2), получаем

$$U_0''+2U_0'/\rho-2U_0/\rho^2+\alpha^2 U_0=0 \tag{2.23}$$

$$[(1-\nu)U_0'+2\nu U_0/\rho]_{\rho=\rho_s}=0\quad (s=1,\ 2) \tag{2.24}$$

Общее решение уравнения (2.23) имеет вид

$$U_0=\rho^{-1}[(\alpha\cos\alpha\rho-\rho^{-1}\sin\alpha\rho)c_1+(\alpha\sin\alpha\rho+\rho^{-1}\cos\alpha\rho)c_2] \tag{2.25}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.24), получаем частотное уравнение

$$\begin{gathered}D_0(\lambda,\ \varepsilon)=[\lambda^4-8\nu\lambda^2/(1-\nu)+16-12\lambda^2(\lambda^2+4\nu/(1-\nu))\varepsilon^2+\lambda^4\varepsilon^4]\sin 2\alpha\varepsilon-\\ -8\alpha(4+\lambda^2-\lambda^4\varepsilon^2)\varepsilon\cos 2\alpha\varepsilon=0\end{gathered} \tag{2.26}$$

Уравнение (2.26) при $\varepsilon\to 0$ имеет один ограниченный нуль со следующими асимптотическими свойствами:

$$\lambda_k=\lambda_{k0}+\varepsilon^2\lambda_{k2}+\ldots \tag{2.27}$$

Из (2.26) получаем

$$\lambda_{k0}^2=4(1+\nu)/(1-\nu)$$

$$\lambda_{k2}=-4(3\nu^3+14\nu^2-35\nu+14)/3(1-\nu)^3\lambda_{k0}$$

Уравнение (2.26) при $\varepsilon\to 0$ имеет еще счетное множество нулей, каждый из которых стремится к бесконечности. Ищем λ_n в виде следующего разложения:

$$\lambda_n=S_n/\varepsilon+O(\varepsilon)\qquad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{2.28}$$

После подстановки (2.28) в (2.26) получаем

$$\sin[2(1-2\nu)/(1-\nu)]^{1/2}S_n=0 \tag{2.29}$$

В первом члене асимптотики эти частоты совпадают с частотами, определяемыми из формул (2.18), и соответствуют чисто радиальным колебаниям сферы.

3. Приведем для сравнения частотные уравнения, получаемые по теории Кирхгофа — Лява. Частотное уравнение, основанное на соотношениях упругости А. И. Лурье, имеет вид [2]:

$$\begin{gathered}(1-\nu^2)[-4(1-\nu^2)\Lambda^4+4\Lambda^2z^2-4z^2+3(4\nu+1)\Lambda^2+9]+\\ +{}^1/_3\{-4z^6+[19+(1-\nu^2)\Lambda^2]z^4-[4\nu^2-8\nu+{}^{51}/_4+2(1-\nu^2)(3-2\nu)\Lambda^2]z^2+\\ +{}^{33}/_{16}-2\nu+\nu^2+{}^1/_4(1-\nu^2)(5-4\nu)\Lambda^2\}\varepsilon^2+{}^1/_9(4z^6-3z^4+{}^3/_4z^2-{}^1/_{16})\varepsilon^4=0\end{gathered} \tag{3.1}$$

Проведем асимптотический анализ частотного уравнения Кирхгофа — Лява для наиболее характерных случаев.

Из (3.1) можно получить следующие группы нулей:

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon^2\Lambda_{k1}+\ldots\qquad (q=0,\ \beta=0)$$

$$\Lambda_{k0}^2=2^{-3}(1-\nu^2)^{-1}[4z^2+12\nu+3+(-1)^k[16z^4+(64\nu^2+96\nu-40)z^2+72\nu+153]^{1/2}$$

$$\begin{gathered}\Lambda_{k2}=6^{-1}(1-\nu^2)^{-1}\Lambda_{k0}^{-1}[8(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2-4z^2-12\nu-3]^{-1}\{-4z^6+\\ +[19+(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2]z^4-[4\nu^2-8\nu+{}^{51}/_4+2(1-\nu^2)(3-2\nu)\Lambda_{k0}^2]z^2+\\ +{}^{33}/_{16}-2\nu+\nu^2+{}^1/_4(1-\nu^2)(5-4\nu)\Lambda_{k0}^2\}\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}+\varepsilon\Lambda_{k1}+\ldots\qquad (q=0,\ \beta={}^1/_2)$$

$$\Lambda_{k0}^2=1+3^{-1}z_0^4/(1-\nu^2) \tag{3.3}$$

$$\Lambda_{k1}=8^{-1}z_0^{-2}[10-(\nu^2+12\nu+21)\Lambda_{k0}^2+3(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^4]/\Lambda_{k0}$$

$$\Lambda_k=\Lambda_{k0}\varepsilon^{1-2\beta}+\Lambda_{k2}\varepsilon^{3-4\beta}+\ldots \quad (^2/_3\leqslant\beta<1)$$

$$\Lambda_{k0}^2={}^1/_3 z_0^4/(1-\nu^2), \quad \Lambda_{k2}=(2\Lambda_{k0})^{-1}+{}^3/_8 z_0^{-2}(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2 \quad (\beta={}^2/_3) \tag{3.4}$$

$$\Lambda_{k2}={}^3/_8 z_0^{-2}(1-\nu^2)\Lambda_{k0}^2 \quad (^2/_3<\beta<1)$$

Сравнивая (3.2)–(3.4) с точным разложением (2.4), (2.19), (2.14), получаем, что первые члены разложения совпадают, последующие же члены существенно отличаются. Частоты собственных колебаний, определяемые формулами (2.16), (2.19) и (2.28), в прикладной теории оболочек отсутствуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шах, Рамкришнан, Датта.* Исследование распространения упругих волн в полой сфере по трехмерной теории упругости и по теории оболочек. Ч. I. Аналитическое исследование.– Тр. Америк. о-ва инж.-мех. Прикл. механика, 1969, т. 36, № 3, с. 52–62.
2. *Чернина В. С.* Свободные колебания тонкой замкнутой сферической оболочки.– Тр. 8-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 575–579.
3. *Мехтиев М. Ф.* Асимптотический анализ динамической задачи теории упругости для полой сферы.– Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук, 1983, № 5, с. 56–63.
4. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.

Баку

Поступила в редакцию
24.X.1985