

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ РАССЛОЕНИЙ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ ОБОЛОЧЕК

ЖЕЛЕЗКО И. П., ОБОДАН Н. И.

Оценка несущей способности тонкостенных конструкций из композиционных материалов, имеющих зону расслоения, требует построения моделей, описывающих процесс деформирования оболочки и роста дефекта. Оба этих процесса взаимосвязаны и определяют различные формы разрушения конструкций. Значительный интерес представляет случай, когда развитию дефекта предшествует потеря устойчивости слоя в зоне расслоения. Исследованию этой задачи посвящен целый ряд работ [1-3], в которых расчет на устойчивость сжатых слоев в зоне расслоения предшествует решению задачи разрушения в рамках энергетической теории Гриффитса. Для построения модели процесса потери устойчивости при наличии расслоения используют линеаризованный подход.

В предлагаемой работе строится нелинейная модель деформирования и разрушения оболочек с расслоениями. Учитывается возможность существования зон нормального контакта между слоями в зоне дефекта с учетом изменения их размеров в процессе деформации. Влияние трения между слоями не рассматривается, принимаются обычно используемые в рассматриваемой задаче уравнения, основанные на гипотезе Кирхгофа - Лява [1-4]. Использование энергетического критерия разрушения позволяет построить решение, описывающее рост дефекта в процессе деформирования.

1. Поведение тонкостенных оболочечных конструкций с расслоениями исследуется на примере осесимметричного сферического сегмента полураствора Φ_b , имеющего участок расслоения полураствора Φ_a . Радиус оболочки R , толщина внутреннего и наружного слоев на участке расслоения h_1 и h_2 соответственно, толщина монолитного участка $h = h_1 + h_2$. Слои могут иметь различные упругие характеристики. На сегмент действует равномерное внешнее давление q .

На участке расслоения существуют чередующиеся участки отдельного деформирования слоев с отсчитываемыми от нуля координатами $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ и участки нормального контакта слоев с координатами $(\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2})$, где $i=1, 3, \dots, n-3$, причем $\varphi_1=0$, $\varphi_{n-1}=\varphi_a$, $\varphi_n=\varphi_b$.

Выборный порядок расположения зон совместного и отдельного деформирования слоев не ограничивает общности рассуждений, так как случай любого их расположения может быть сведен к рассматриваемому введением фиктивных участков нулевой длины.

На каждом из участков для всех слоев должны выполняться условия равновесия, условия совместности деформаций и физические соотношения. На границах участков φ_i ($i=2, \dots, n-1$) должны выполняться условия неразрывности деформаций слоя, в точке φ_n - условия закрепления краев. Кроме того, на границах зон контакта и отдельного деформирования φ_i ($i=2, \dots, n-2$) выполняются дополнительные условия для прогибов внутреннего и внешнего слоев

$$w_{1i}(\varphi_i) - w_{2i}(\varphi_i) = 0 \quad (1.1)$$

Аналогичные условия должны выполняться внутри зон контакта $\varphi \in (\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2})$ ($i=1, 3, \dots, n-3$):

$$w_{1i}(\varphi) - w_{2i}(\varphi) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь и дальше (кроме случаев, когда это будет особо оговорено) первый индекс означает номер слоя (1 - внутренний слой на участке рас-

слоения, 2 — наружный слой, 3 — монолитный слой), второй индекс означает номер участка, совпадающий с номером начальной точки φ_i участка.

Вариационная задача, эквивалентная сформулированной краевой, такая, что условия (1.1) и (1.2) будут для нее естественными, строится с помощью множителей Лагранжа. Соответствующий функционал имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{n-2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} F_{ki} d\varphi + \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} F_{3,n-1} d\varphi + \\ & + \sum_{i=2,4,\dots}^{n-2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \lambda_i (w_{1i} - w_{2i}) R \sin \varphi d\varphi + \\ & + \sum_{i=2}^{n-2} \mu_i [w_{1i}(\varphi_i) - w_{2i}(\varphi_i)] R \sin \varphi_i - \\ & - \sum_{i=1}^{n-2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} q w_{2i} R \sin \varphi d\varphi - \int_{\varphi_{n-1}}^{\varphi_n} q w_{3n} R \sin \varphi d\varphi \end{aligned} \quad (1.3)$$

где F — функция плотности энергии, μ_i , λ_i — множители Лагранжа для присоединенных условий (1.1) и (1.2). При этом зависимости, связывающие деформации с перемещениями и усилиями

$$\begin{aligned} u' + w - \varepsilon_1 R + \theta^2 R / 2 = 0, \quad w' - u + \theta R = 0, \\ \theta' - \kappa_1 R = 0, \quad (\dots)' = d(\dots) / d\varphi \\ \varepsilon_2 R - u \operatorname{ctg} \varphi - w = 0, \quad \kappa_2 R - \theta \operatorname{ctg} \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$T_1 = c_{11} \varepsilon_1 + c_{12} \varepsilon_2 + k_{11} \kappa_1 + k_{12} \kappa_2 \quad (1.4)$$

$$M_1 = k_{11} \varepsilon_1 + k_{12} \varepsilon_2 + D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2 \quad (1 \Rightarrow 2)$$

условия совместности в граничных точках зон контакта и отдельного деформирования φ_i ($i=2, \dots, n-2$):

$$\theta_{hi} - \theta_{h,i+1} = 0, \quad u_{hi} - u_{h,i+1} = 0, \quad w_{hi} - w_{h,i+1} = 0 \quad (1.5)$$

граничные условия в точке $\varphi_{n-1} = \varphi_d$:

$$\theta_{3,n-1} - \theta_{2,n-2} = 0, \quad u_{3,n-1} - u_{2,n-2} = 0, \quad w_{3,n-1} - w_{2,n-2} = 0 \quad (1.6)$$

$$\theta_{3,n-1} - \theta_{1,n-2} = 0, \quad u_{3,n-1} - u_{1,n-2} = 0, \quad w_{3,n-1} - w_{1,n-2} = 0$$

должны быть выполнены предварительно.

Условие стационарности функционала с переменными границами

$$\delta \Pi = 0 \quad (1.7)$$

дает систему нелинейных уравнений для каждого из слоев на каждом из участков (индексы, указывающие на номер участка и слоя, в (1.4), (1.8) опущены):

$$T_1' + (T_1 - T_2) \operatorname{ctg} \varphi - N = 0 \quad (1.8)$$

$$N' + N \operatorname{ctg} \varphi - (T_1 + T_2) + q^\circ R + \lambda^\circ R = 0$$

$$M_1' + (M_1 - M_2) \operatorname{ctg} \varphi - NR - T_1 \theta R = 0$$

условия совместности и трансверсальности в граничных точках зон контакта и отдельного деформирования φ_i ($i=2, \dots, n-2$)

$$T_{hi} - T_{h,i+1} = 0, \quad M_{hi} - M_{h,i+1} = 0, \quad N_{hi} - N_{h,i+1} + \mu_{i+1} (-1)^h = 0 \quad (1.9)$$

$$w_{1i}' - w_{2i}' = 0 \quad (k=1, 2; i=1, \dots, n-3) \quad (1.10)$$

и граничные условия в точке $\varphi_{n-1} = \varphi_d$:

$$\begin{aligned} T_{3,n-1} - T_{2,n-2} - T_{1,n-2} = 0, \quad N_{3,n-1} - N_{2,n-2} - N_{1,n-2} = 0 \\ M_{3,n-1} - M_{2,n-2} - M_{1,n-2} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

В уравнениях (1.4)–(1.11) введены обозначения $M = M_1$, $T = T_1$, $q^\circ = 0$ для внутреннего слоя и $q^\circ = q$ для наружного и монолитного слоев, $\lambda^\circ = 0$ для монолитного участка и $\lambda^\circ = \pm \lambda$ для наружного и внутреннего слоя соответственно. Из условия (1.7) следуют также соотношения (1.1), (1.2). Там, где это не оговорено, принятые обозначения совпадают с обозначениями [5].

Полученные зависимости (1.8) и (1.9) позволяют выяснить физический смысл множителей Лагранжа λ_i и μ_i . Функции $\lambda_i(\varphi)$ представляют собой контактное давление на участках совместного движения, μ_i — скачки перерезывающих сил в точках φ_i , связанные с учетом деформации сдвига в выбранных соотношениях.

2. Разрешающие уравнения (1.4), (1.8), соотношения (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), (1.9)–(1.11), а также граничные условия в точке $\varphi_n = \varphi_b$ и условия симметрии в точке $\varphi_1 = 0$ образуют нелинейную краевую задачу. Для решения этой задачи используется метод перехода к эквивалентной задаче Коши [6]. При этом задается начальный вектор X , в который входят значения функций задачи в полюсе оболочки (при численной реализации на малом расстоянии от полюса) и величины μ_i , φ_i ($i=2, \dots, n-2$), которые должны обеспечивать выполнение соотношений (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), (1.9)–(1.11), а также краевых условий. Условия симметрии в полюсе выполняются предварительно.

Интегрирование задачи Коши с начальным вектором X , осуществляемое с помощью метода Рунге — Кутты, дает вектор Q невязок краевых условий и соотношений (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), (1.9)–(1.11). В качестве процесса минимизации вектора невязок используется метод Ньютона, в котором невязки выступают в качестве неявно заданных левых частей метода Ньютона

$$Q = 0 \quad (2.1)$$

Итерационный процесс метода Ньютона для (2.1) определяется формулой

$$X_{h+1} = X_h - (I^*)^{-1} Q_h, \quad I_h^* = \|\partial Q_h / \partial X_h\| \quad (2.2)$$

где I_h^* — матрица Якоби, которая при практической реализации заменяется матрицей разностных соотношений. Использование изложенного алгоритма позволяет построить решение в зависимости от изменения параметра нагрузки q .

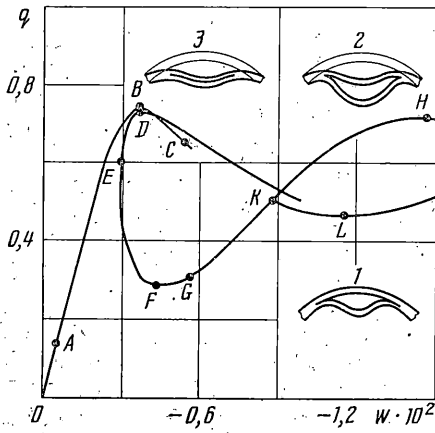
Особые точки решения фиксируются из условия

$$\det I^* = 0 \quad (2.3)$$

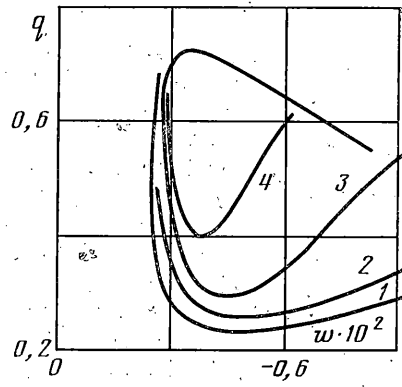
причем точкам бифуркации соответствует условие $\det I^* = 0$, $\det I_{*'} \neq 0$, а предельным точкам — условие $\det I^* = 0$, $\det I_{*'} = 0$ (где I_{*}' — матрица, полученная из матрицы I^* заменой одного из столбцов столбцом производных $\partial Q / \partial q$).

3. Численные расчеты для анализа характера поведения оболочки в зависимости от параметров расслоения и определения области реализации той или иной за критической формы были проведены на примере сегментов с $R/h = 100$ и углом полураствора $\varphi_b = 0,4$ (углы даны в радианах); модули Юнга и коэффициенты Пуассона слоев одинаковы. Рассматривалось шарнирно-неподвижное закрепление кромок оболочки. На графиках давление q отнесено к величине критического давления для замкнутой сферической оболочки, имеющей тот же радиус и толщину, что и нерасслоившийся сегмент. Через w на графиках обозначен прогиб нижнего слоя в полюсе оболочки, который отнесен к радиусу оболочки; через η обозначена относительная толщина отслоения $\eta = h_1/h$.

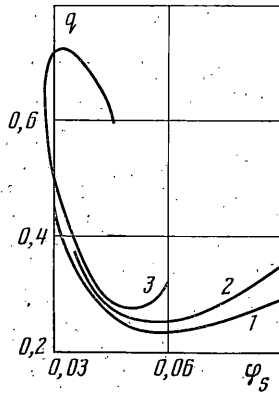
Характерная картина закритических решений и формы изгиба оболочки показаны на фиг. 1, где $\varphi_d = 0,06$, $\eta = 0,1$. Кривая ABC соответствует деформированию оболочки с контактом слоев на всем участке расслоения. Изолированная кривая $DEFGH$ описывает равновесные состояния с прощелкнувшим внутренним слоем в зоне дефекта. Прощелкивание слоя приводит к образованию центральной зоны раз-



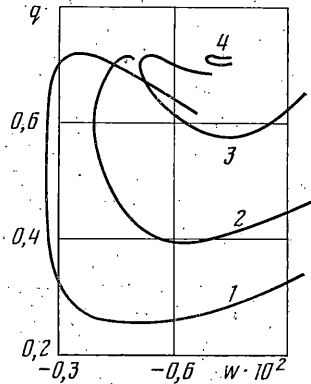
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

дельного деформирования слоев полураствора φ_s . Точке E , нижней границе области существования изолированного решения, отвечает нагрузка $q_1=0,29$ и $\varphi_s=0,05$, ей соответствует форма изгиба 1. При этом прогибы верхнего слоя и монолитного участка значительно меньше прогибов потерявшего устойчивость нижнего слоя. В дальнейшем будем называть такую форму локальной формой потери устойчивости.

При дальнейшем движении по участку ветви FGH угол отщелкивания φ_s увеличивается, зазор между слоями растет. При достижении системой состояния, соответствующего точке G , происходит полное раскрытие расслоения ($\varphi_s=\varphi_d$).

Предельная точка H , в которой нагрузка $q_2=0,72$, соответствует общей потере устойчивости оболочки с полностью выщелкнутым нижним слоем (форма изгиба 2).

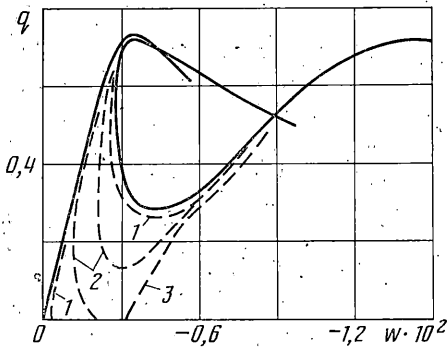
На участке FE угол φ_s и зазор между слоями уменьшается с ростом нагрузки. Участку ED соответствует совместное деформирование слоев с малым углом φ_s . Предельная точка D , для которой $q_3=0,72$, отвечает общей потере устойчивости (форма изгиба 3).

4. Поведение закритических изолированных решений, описывающих процесс расслоения, существенно зависит от исходных параметров расслоения.

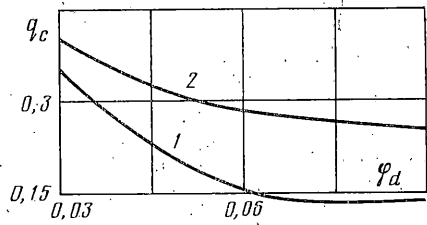
На фиг. 2, 3 показаны проекции изолированных решений на плоскости $q-w$, $q-\varphi_s$ для $\eta=0,1$ при различных углах расслоения (кривая 1 соответствует $\varphi_d=0,0985$; 2 — $\varphi_d=0,09$; 3 — $\varphi_d=0,06$; 4 — $\varphi_d=0,03$). В области совместного деформирования кривые практически совпадают между собой. В районе нижней предельной точки увеличение угла расслоения приводит к уменьшению предельной нагрузки, отвечающей локальной потере устойчивости. Однако дальнейшее увеличение зоны расслоения не приводит к сколь бы то ни было заметному снижению нижней предельной точки по сравнению с предельной точкой на кривой 1 (фиг. 2). В то же время уменьшение угла расслоения приводит к вырождению изолированных ветвей и постепенному их исчезновению (фиг. 2, кривая 4).

При исследовании семейства решений $q-\varphi_s$ (фиг. 3) видно, что углы φ_s , соответствующие нижним предельным точкам на ветвях локальных решений, для различных углов расслоения сохраняются практически постоянными и равными резонансному углу φ_s° для всех значений угла расслоения, больших φ_s° (для $\eta=0,1$ угол $\varphi_s^\circ \approx 0,05$). Величина угла φ_s° зависит от η . Существование такого резонансного угла отмечалось в [7].

Характер поведения изолированных ветвей решений в зависимости от относительной толщины отслоения η показан на фиг. 4, где $\varphi_d=0,09$: кривая 1 — $\eta=0,1$;



Фиг. 5



Фиг. 6

$\xi - \eta = 0,15$; $3 - \eta = 0,2$; $4 - \eta = 0,23$, причем с увеличением η изолированные ветви деформируются и исчезают. Для каждого угла расслоения существует величина η^* , такая, что при $\eta > \eta^*$ изолированных ветвей не существует и локальная потеря устойчивости невозможна. Для $\varphi_d = 0,06$ эта величина $\eta = 0,18$, для $\varphi_d = 0,09$ границей существования локальных форм потери устойчивости является величина $\eta = 0,24$.

Рассмотренные случаи вырождения изолированных решений определяют границы существования форм потери устойчивости оболочки с выпучиванием слоя в зоне расслоения.

Для «больших» областей расслоения ($\varphi_d > 0,1$) с относительными толщинами $\eta > 0,2$ изолированные ветви, описывающие изгибные формы в прощелкнувшем нижнем слое, также исчезают. В этом случае изолированной ветви отвечают решения, описывающие локальную вмятину в зоне расслоения, причем слои движутся совместно.

Реализация общей или локальной формы потери устойчивости зависит от уровня начальных возмущений в конструкции. Поэтому реальное поведение системы с расслоениями можно проанализировать внося в идеальную оболочку возмущение по форме локальной потери устойчивости, которое характеризуется величиной безразмерного начального прогиба внутреннего слоя в полусе оболочке w^0 .

На фиг. 5 проанализировано поведение оболочки при различных значениях начального прогиба w^0 для случая $\eta = 0,1$ и $\varphi_d = 0,06$ (штриховые кривые 1-3 соответствуют $w^0 = -3 \cdot 10^{-5}$, $-2 \cdot 10^{-3}$, $-3,2 \cdot 10^{-3}$; сплошная кривая — идеальной системе $w^0 = 0$). Оказывается, что существует предельное значение w_*^0 начальной погиби (для рассматриваемых параметров расслоения $w_*^0 = -3 \cdot 10^{-3}$), которое определяет характер поведения оболочки и ее несущую способность. Для $w^0 < w_*^0$ при возрастании нагрузки начальный зазор между слоями уменьшается, слои на участке расслоения движутся совместно (кривые 1, 2). Несущая способность исчерпывается за счет общей потери устойчивости конструкции как оболочки с ослабленной жесткостью.

Когда начальный прогиб превышает w_*^0 (кривая 3; фиг. 5), при увеличении нагрузки происходит предварительное прощелкивание внутреннего слоя. В тех случаях, когда после локальной потери устойчивости не происходит роста дефекта, несущая способность исчерпывается за счет общей потери устойчивости по форме 2 (фиг. 1).

Отметим, что для начальных возмущений $w^0 < w_*^0$ существуют изолированные ветви решений (кривые 1, 2). С ростом параметра w^0 исходящие из нуля и изолированные ветви сближаются и при $w^0 = w_*^0$ сливаются.

5. Изложенный алгоритм позволяет оценить возможность применения бифуркационного подхода к задачам устойчивости оболочек с расслоениями.

Был проведен бифуркационный расчет, в котором считалось, что функции, описывающие полное состояние при появлении раздельного движения слоев на участке $\varphi \in (0, \varphi_s)$, где $\varphi_s = \text{const}$, могут быть представлены в виде суммы функций основного и дополнительного состояний. За исходное принималось состояние с полным прилеганием слоев. Для определения дополнительного состояния была сформулирована однородная краевая задача, учитывающая возможность раздельного деформирования слоев на участке $\varphi < \varphi_s$. Докритическое состояние определялось из решения задачи для исходного состояния. Решение этих задач и определение точек бифуркации проводилось методом, аналогичным п. 2.

Расчеты, проведенные для различных углов $\varphi_s = \text{const}$, позволили определить значение угла φ_s^* , при котором критическая нагрузка (соответствующая точке бифуркации) имеет минимальное значение.

На фиг. 6 приведены зависимости критических нагрузок от угла расслоения φ_d при $\eta = 0,1$. Кривая 2 соответствует критическим нагрузкам, полученным из бифуркационного расчета. Кривая 1 построена для значения угла $\varphi_s = \varphi_s^*$, причем угол $\varphi_s^* = \varphi_s^0$.

Отличие критических нагрузок, полученных по различным моделям, показывает, что бифуркационный расчет не дает возможности правильно зафиксировать решения, отвечающие локальной форме потери устойчивости.

Наибольшую опасность представляет случай, когда локальное выпучивание слоя в зоне дефекта инициирует дальнейший рост расслоения. Возможность нормального

отрыва слоев возникает после полного раскрытия дефекта (точка G на фиг. 1).

При исследовании процесса разрушения вводится предположение о том, что дефект в процессе роста сохраняет круговую форму. На фронте расслоения вычисляется контурный J^* -интеграл, который аналогично [4] имеет вид $J^* = F_1 + F_2 - F_3$, где F_1, F_2, F_3 — плотность энергии для внутреннего, наружного и монолитного слоев, вычисленные при $\varphi = \varphi_d$. Используется эквивалентное критерию Гриффитса предположение о начале роста расслоения при достижении J^* -интегралом критического значения J^* , соответствующего удельной энергии разрушения для данного материала. С того момента, как при движении по участку GH равновесной ветви $DEFGH$ (фиг. 1) выполняется условие $J^* \geq J^*$; для определения положения фронта расслоения вводится дополнительное условие $J^* = J^*$. Присоединение этого условия к невязно заданным правым частям метода Ньютона, используемого в п. 1, позволяет построить равновесные ветви, для которых на фронте расслоения выполняется данное условие, определяющее процесс разрушения.

Равновесная ветвь KL на фиг. 1 соответствует росту дефекта при значении $J^*/(Eh) = 2,5 \cdot 10^{-6}$, где E — модуль Юнга для материала оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бологин В. В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов. — Механика композит. материалов, 1984, № 2, с. 239–255.
2. Полилов А. Н., Работнов Ю. Н. Развитие расслоений при сжатии композитов. — Изв. АН СССР, МТТ, 1983, № 4, с. 166–171.
3. Chai H., Babcock C. D., Knauss W. G. One dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling. — Intern. J. Solids and Struct., 1981, v. 17, No. 11, p. 1069–1083.
4. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
6. Андреев Л. В., Лебедев А. Г., Ободан Н. И. Алгоритм решения нелинейной задачи устойчивости неосесимметричных цилиндрических оболочек. — В кн.: Применение численных методов в строительной механике корабля. Л.: Судостроение, 1976, с. 156–160.
7. Бологин В. В., Зибельян З. Х. Устойчивость упругих сферических оболочек с расслоениями. — В кн.: Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1981, вып. 22, с. 150–165.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
25.IV.1985