

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК  
В ЗАКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

ЛЕСНИЧАЯ В. А.

Изучение нелинейного поведения оболочечных конструкций после потери устойчивости представляет практический интерес, так как они нередко сохраняют несущую способность. Эксперименты, проведенные для широкого класса тонких упругих оболочек, показывают, что в закритической стадии происходит значительное изменение их формы с образованием сглаженных ребер. В [1] была высказана гипотеза о том, что закритическая упругая деформация является в основном геометрическим изгибанием и, поскольку закрепленные на краю оболочки неизгибаемы в классе регулярных поверхностей, изгибание принадлежит более широкому классу кусочно-регулярных поверхностей. На основе этой гипотезы А. В. Погореловым создана геометрическая теория, которая позволила решить ряд сложных задач, получить результаты, хорошо согласующиеся с данными экспериментов. Тем не менее до сих пор остаются неясными вопросы о границах применимости этой теории, о путях уточнения найденных решений, о связи с общими нелинейными уравнениями теории оболочек.

В публикуемой работе в результате асимптотического анализа полной системы нелинейной теории оболочек выводится рекуррентная система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние в зоне сглаженного ребра; строятся решения этих уравнений; оценивается область применимости приближенных решений; дается сопоставление с геометрической теорией. В качестве модельной выбрана задача об осесимметричной деформации сферических оболочек под действием радиальной нагрузки.

1. Рассмотрим сначала пологие сферические оболочки. Исходные уравнения совпадают с приведенными в [2] статическими, физическими и геометрическими соотношениями, если в них положить  $A_i^* = A_i$ ,  $E_i = 1$ , пренебречь слагаемыми  $e_{ik}e_{ks}$  в формулах для  $\varepsilon_{ik}$ , членами с  $e_{ik}$  в формулах для  $\kappa_{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) и учесть гипотезы теории пологих оболочек

$$(A_1 T_2)_{,2} - A_{1,2} T_1 = 0 \quad (1.1)$$

$$(A_1 N_2)_{,2} - A_1 A_2 [T_1(1/R + \kappa_1) + T_2(1/R + \kappa_2)] - X_3 = 0$$

$$(A_1 M_2)_{,2} - A_{1,2} M_1 - A_1 A_2 N_2 = 0$$

$$T_1 = K(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad T_2 = K(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \quad (1.2)$$

$$M_1 = D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} u_2 + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u_{2,2}}{A_2} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_{,2}}{A_2} \right)^2 \quad (1.3)$$

$$\kappa_1 = -\frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} \frac{w_{,2}}{A_2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{A_2} \left( \frac{w_{,2}}{A_2} \right)_{,2}$$

Принята сферическая система координат, коэффициенты Ламе имеют вид  $A_1 = R\alpha_2$ ,  $A_2 = R$ .

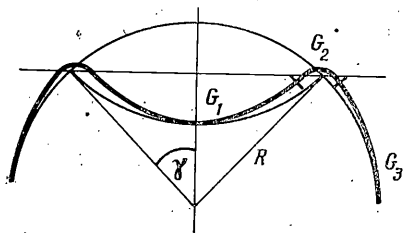
В закритической области на поверхности оболочки выделяются три области (фиг. 1):  $G_1$  — собственно вмятина (зона обратной кривизны),  $G_2$  — окрестность сглаженного ребра,  $G_3$  — слабо деформированная часть ( $R\gamma$  — радиус основания вмятины). При помощи замены переменных  $\alpha_2 = \gamma \alpha_2^*$ ,  $u_2 = R\gamma u_2^*$ ,  $w = R\gamma^2 w^*$ ,  $\varepsilon_i = \gamma^2 \varepsilon_i^*$ ,  $\kappa_i = R\kappa_i^*$ ,  $T_i = K\gamma^2 T_i^*$ ,  $M_i = KR\gamma^4 M_i^*$ ,

$N_2 = K\gamma^3 N_2^*$ ,  $X_3 = KX_3^*/R$  ( $i=1, 2$ ) уравнения (1.1)–(1.3) приводятся к безразмерному виду. В них остается только один параметр  $\varepsilon = t/(12^{1/2}R\gamma^2)$ , который используется в качестве малого при асимптотическом интегрировании.

2. В областях  $G_1$  и  $G_3$  асимптотический анализ выполняется обычным образом [3]. Делается преобразование независимой и зависимых переменных вида  $f = \varepsilon^k F$ . Конкретные значения параметров асимптотического интегрирования  $k$  выбираются с учетом имеющейся информации о характере решения

$f$	$\alpha_2$	$u_2^*$	$w^*$	$\varepsilon_1^*$	$\varepsilon_2^*$	$T_1^*$	$T_2^*$	$\varkappa_1^*$	$\varkappa_2^*$	$M_1^*$	$M_2^*$	$N_2^*$	$X_3^*$
$k$	0	0	0	$3/2$	$3/2$	$3/2$	$3/2$	0	0	2	2	2	$3/2$

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  получается предельная система 1. Она может быть также выведена из (1.1)–(1.3), если во втором уравнении (1.1) положить  $N_2 = 0$ , а в уравнениях (1.3)  $\varepsilon_i = 0$  ( $i=1, 2$ ). Следовательно, статические соотношения описывают безмоментное напряженное состояние, а геометрические — изгибание. Если  $X_3 = q = \text{const}$ , то уравнения легко интегрируются ( $H(\alpha_2)$  — ступенчатая функция):



Фиг. 1

$$\varkappa_{i0} = -\frac{2}{R} h(\alpha_2), \quad M_{i0} = -\frac{2D(1+\nu)}{R} h(\alpha_2),$$

$$N_{20} = \frac{2D(1+\nu)}{A_2 R} \delta(\alpha_2 - \gamma) \quad (2.4)$$

$$T_{i0} = qR[\gamma/2 - h(\alpha_2)], \quad h(\alpha_2) = 1 - H(\alpha_2 - \gamma)$$

$$(i=1, 2)$$

Найденные компоненты напряженно-деформированного состояния (2.1) разрывны на ребре  $\alpha_2 = \gamma$ , что физически недопустимо, поэтому в окрестности ребра возникает состояние, сглаживающее эти разрывы.

Асимптотический анализ в области  $G_2$ , связанный с отысканием такого состояния, имеет особенности. Уравнения предварительно преобразуются. Компоненты решения исходных уравнений (1.1)–(1.3) представляются в виде  $f = f_0 + f_1$ , где  $f_0$  — компоненты решения предельной системы 1; для определения составляющих  $f_1$  получается дополнительная система коэффициенты и правые части которой разрывны, так как содержат функции  $f_0$ . Эта система записывается в локальной системе координат  $\rho = \alpha_2 - \gamma$ ,  $A_1 = R(1 + \rho)$ ,  $A_2 = R$ .

Сформулированная таким образом задача относится к задачам с бесконечно тонкими барьерами и может быть интерпретирована как предел задач с непрерывными и быстроменяющимися коэффициентами и правыми частями — гладкими продолжениями этих функций из  $G_1$  в  $G_3$  [4]. Такой подход позволяет ввести в  $G_2$  показатели изменчивости и интенсивности функций  $f_0$  и их производных

$f_0$	$\alpha_2$	$w_{0,2}$	$T_{10}$	$T_{20}$	$\varkappa_{10}$	$\varkappa_{20}$	$N_{20}$	$T_{20,2}$	$N_{20,2}$
$k$	$1/2$	0	$3/2$	$3/2$	0	0	$3/2$	1	1

После этого выполняется преобразование переменных  $f = \varepsilon^k F$ . Для показателей  $k$ , имеющих значения

$f_1$	$\alpha_2$	$u_{21}$	$w_1$	$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{21}$	$T_{11}$	$T_{21}$	$\varkappa_{11}$	$\varkappa_{21}$	$M_{11}$	$M_{21}$	$N_{21}$
$k$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	0	$-1/2$	$3/2$	$3/2$	1

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получается предельная система 2

$$A_1 \circ T_{21,2}^{(0)} - A_{1,2} \circ T_{11}^{(0)} = 0 \quad (2.2)$$

$$A_1 \circ N_{21,2}^{(0)} - A_1 \circ A_2 \circ [T_{11}^{(0)} (1/R + \varkappa_{10} + \varkappa_{11}^{(0)}) + T_{21}^{(0)} \varkappa_{21}^{(0)}] = 0$$

$$A_1 \circ M_{21,2}^{(0)} - A_1 \circ A_2 \circ N_{21}^{(0)} = 0, \quad T_{11}^{(0)} = K(1 - \nu^2) \varepsilon_{11}^{(0)}$$

$$0 = \varepsilon_{21}^{(0)} + \nu \varepsilon_{11}^{(0)}, \quad M_{11}^{(0)} = D\nu \kappa_{21}^{(0)}, \quad M_{21}^{(0)} = D\kappa_{21}^{(0)}$$

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = \frac{A_{1,2}^{\circ}}{A_1^{\circ} A_2^{\circ}} u_{21}^{(0)} + \frac{w_1^{(0)}}{R}, \quad 0 = \frac{u_{21,2}^{(0)}}{A_2^{\circ}} + \frac{1}{2} \left( \frac{w_{1,2}^{(0)}}{A_2^{\circ}} \right)^2 + \frac{w_{0,2}^{(0)}}{A_2^{\circ}} \frac{w_{1,2}^{(0)}}{A_2^{\circ}}$$

$$\kappa_{11}^{(0)} = -\frac{A_{1,2}^{\circ}}{A_1^{\circ} A_2^{\circ}} \frac{w_{1,2}^{(0)}}{A_2^{\circ}}, \quad \kappa_{21}^{(0)} = -\frac{1}{A_2^{\circ}} \left( \frac{w_{1,2}^{(0)}}{A_2^{\circ}} \right)_{,2}$$

Коэффициенты Ламе «заморожены» и равны значениям на ребре  $A_1^{\circ} = R\gamma$ ,  $A_2^{\circ} = R$ .

Уравнения (2.2), описывающие напряженно-деформированное состояние в окрестности сглаженного ребра, не совпадают ни с одной из приближенных теорий оболочек. Описываемое ими состояние сходно с основным состоянием [3] в оболочках нулевой гауссовой кривизны: главными являются деформация  $\varepsilon_1$  и кривизна  $\kappa_2$ , выполняется гипотеза нерастяжимости  $\varepsilon_2 = 0$ , усилие  $T_2$  — реактивное, однако реализуется в строго выпуклых оболочках и, кроме того, имеет большую (такую же, как краевой эффект) изменчивость  $f_{1,2} \sim [t/(12^{1/2}R)]^{1/2} f_1$ .

Далее искомые функции раскладываются в асимптотические ряды по параметру  $\varepsilon^{1/2}$ :  $f = \varepsilon^k \sum \varepsilon^{i/2} f^{(i)}$  ( $i=0, 1, \dots$ ) и выводятся уравнения последующих приближений для определения функций  $f^{(i)}$ . В частности, в первом приближении в области  $G_1$  уравнения дают тривиальное решение, а в области  $G_2$  имеют вид

$$A_1^{\circ} T_{21,2}^{(1)} - A_{1,2}^{\circ} T_{11}^{(1)} = -A_1^{\circ} T_{21}^{(0)} - A_{1,2}^{\circ} T_{20,2} \quad (2.3)$$

$$A_1^{\circ} N_{21,2}^{(1)} - A_1^{\circ} A_2^{\circ} [T_{11}^{(1)} (1/R + \kappa_{10}^{(0)} + \kappa_{11}^{(0)}) + T_{11}^{(0)} \kappa_{11}^{(1)} + T_{21}^{(1)} \kappa_{21}^{(0)} + T_{21}^{(0)} \kappa_{21}^{(1)}] =$$

$$= -A_1^{\circ} N_{21}^{(0)} + A_1^{\circ} A_2^{\circ} [T_{21}^{(0)} (1/R + \kappa_{20}^{(0)}) + T_{20} \kappa_{21}^{(0)}] - A_{1,2}^{\circ} N_{20,2}$$

$$A_1^{\circ} M_{21}^{(1)} - A_1^{\circ} A_2^{\circ} N_{21}^{(1)} = -A_{1,2}^{\circ} (M_{21}^{(0)} - M_{11}^{(0)})$$

$$T_{11}^{(1)} = K(\varepsilon_{11}^{(1)} + \nu \varepsilon_{21}^{(1)}), \quad K(\varepsilon_{21}^{(1)} + \nu \varepsilon_{11}^{(1)}) = T_{21}^{(0)}$$

$$M_{11}^{(1)} = D(\nu \kappa_{21}^{(1)} + \kappa_{11}^{(0)}), \quad M_{21}^{(1)} = D(\kappa_{21}^{(1)} + \nu \kappa_{11}^{(0)})$$

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{A_{1,2}^{\circ}}{A_1^{\circ} A_2^{\circ}} u_{21}^{(1)} + \frac{w_1^{(1)}}{R}$$

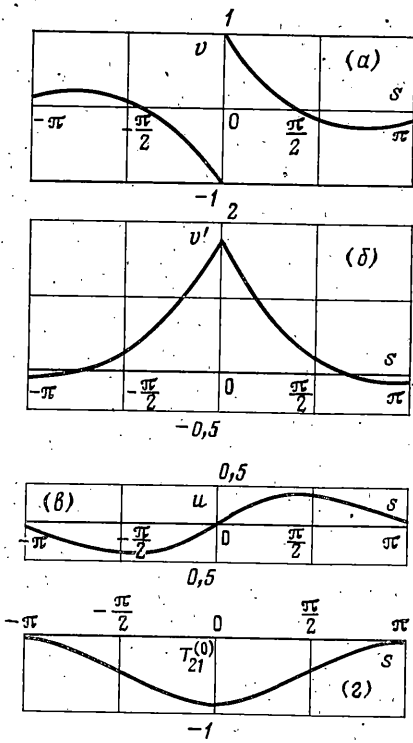
$$\frac{1}{A_2^{\circ}} u_{21,2}^{(1)} + \frac{1}{A_2^{\circ}} (w_{1,2}^{(0)} w_{1,2}^{(1)} + w_{0,2} w_{1,2}^{(1)}) = \varepsilon_{21}^{(0)} - \frac{w_1^{(0)}}{R}$$

$$\kappa_{11}^{(1)} = -\frac{A_{1,2}^{\circ}}{A_1^{\circ} A_2^{\circ}} w_{1,2}^{(1)}, \quad \kappa_{21}^{(1)} = -\frac{1}{(A_2^{\circ})^2} w_{1,2}^{(1)}$$

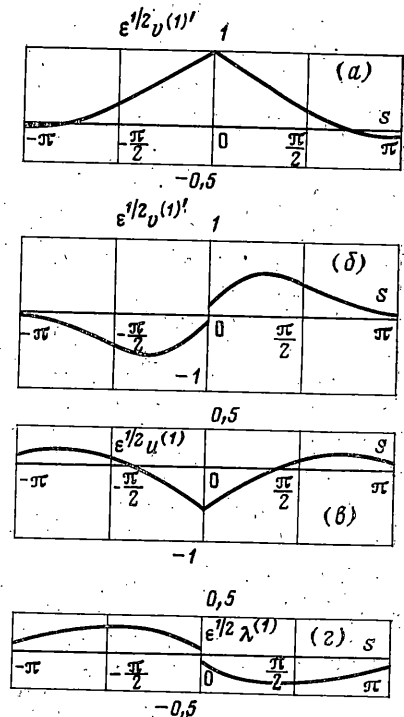
3. Уравнения (2.2), (2.3) записаны на языке обобщенных функций, однако возможна эквивалентная формулировка и в терминах гладких функций. Каждая система заменяется двумя с непрерывными коэффициентами и правыми частями — во внутренней ( $G_2^-$ ) и внешней ( $G_2^+$ ) полукрестностях ребра — и условиями склейки на ребре. В нулевом приближении условиями склейки являются  $w_{1,2}^+ = w_{1,2}^- - 2\gamma R$ ,  $u_{21}^{(0)+} = u_{21}^{(0)-}$ ,  $w_1^{(0)+} = w_1^{(0)-}$ ,  $T_{21}^{(0)+} = T_{21}^{(0)-}$ ,  $N_{21}^{(0)+} = N_{21}^{(0)-}$ ,  $M_{21}^{(0)+} = M_{21}^{(0)-}$  и решение (функции  $\varepsilon_{11}^{(0)}$ ,  $w_{1,2}^{(0)}$ ,  $N_{21}^{(0)}$ ), удается найти в классе нечетных функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = 0, \quad w_{1,2} = -\gamma R \quad \text{при} \quad \alpha_2 = \gamma \quad (3.1)$$

В первом приближении решение не обладает свойствами симметрии,



Фиг. 2



Фиг. 3

тем не менее, можно разбить его на две составляющие — нечетную и четную — и из условий склейки на ребре  $w_{1,2}^{(1)+} = w_{1,2}^{(1)-}$ ,  $u_{21}^{(1)+} = u_{21}^{(1)-}$ ,  $w_1^{(1)+} = w_1^{(1)-}$ ,  $T_{21}^{1(+)} = T_{21}^{1(-)} + qR$ ,  $N_{21}^{(1)+} = N_{21}^{(1)-}$ ,  $M_{21}^{(1)+} = M_{21}^{(1)-} + (4+\nu)D/R$  получить граничные условия для этих составляющих  $\epsilon_{11}^{(1)} = 0$ ,  $w_{1,2}^{(1)} = 0$ ,  $T_{21}^{(1)} = qR/2$ ,

$$M_{21}^{(1)} = \frac{4+\nu}{2} \frac{D}{R} \quad \text{при} \quad \alpha_2 = \gamma \quad (3.2)$$

Дополнительными условиями, в каждом приближении являются условия затухания при  $\alpha_2 \rightarrow \infty$ .

Сопоставим полученные уравнения (2.2), (2.3) с соотношениями геометрической теории. После замены переменных  $\alpha_2 = \gamma s$ ,  $T_2 = Et\gamma^2\lambda/2$ ,  $\epsilon_1 = \gamma^2 u$ ,  $w_{,2} = \gamma^2 v$  уравнения нулевого приближения и условия (3.1) совпадают с уравнениями Эйлера для функционала энергии и граничными условиями [4]:

$$\begin{aligned} \lambda^{(0)'} - 2u^{(0)} &= 0, & -2v^{(0)''} + \lambda^{(0)}(1+v^{(0)}) &= 0 \\ u^{(0)'} + v^{(0)} + \frac{1}{2}[v^{(0)}]^2 &= 0, & u^{(0)} &= 0, & v^{(0)} &= -1 \quad \text{при} \quad s=0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнения последующих приближений определяют поправки к решению, найденному по геометрическому методу. Уравнения первого приближения для двух составляющих решения приводятся к виду

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)'} - 2u_1^{(1)} &= 0, & -2v_1^{(1)''} + \lambda_1^{(1)}(1+v^{(0)}) + \lambda^{(0)}v_1^{(1)} &= 0 \\ u_1^{(1)'} + (1+v^{(0)})v_1^{(1)} &= -w^{(0)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$u_1^{(1)} = 0, \quad v_1^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad s=0$$

$$\lambda_2^{(1)'} - 2u_2^{(1)} = -(1-\nu)\lambda^{(0)} \quad (3.5)$$

$$-2v_2^{(1)''} + \lambda_2^{(1)}(1+v^{(0)}) + \lambda^{(0)}v_2^{(1)} = 4v^{(0)'} + Qv^{(0)} - \int_t^\infty \lambda^{(0)}(2+v^{(0)}) dt$$

$$v_2^{(4)'} + (1+v^{(0)})v_2^{(4)} = -vu^{(0)}, \quad Q = qR\gamma^2/(Et)$$

$$\lambda_2^{(4)} = Q, \quad v_2^{(4)'} = 2 + 1,5v \quad \text{при } s=0$$

Каждая из систем (3.3)–(3.5) может быть сведена к интегродифференциальному уравнению [1]:

$$v^{(0)''} + (1+v^{(0)}) \int_s^\infty \int_t^\infty \left[ v^{(0)} + \frac{(v^{(0)})^2}{2} \right] dt ds = 0 \quad (3.6)$$

$$v_1^{(4)''} + (1+v^{(0)}) \int_s^\infty \int_t^\infty (1+v^{(0)})v_1^{(4)} dt ds - \frac{\lambda^{(0)}}{2}v_1^{(4)} = -(1+v^{(0)}) \int_s^\infty \int_t^\infty w^{(0)} dt ds$$

$$v_2^{(4)''} + (1+v^{(0)}) \int_s^\infty \int_t^\infty (1+v^{(0)})v_2^{(4)} dt ds - \frac{\lambda^{(0)}}{2}v_2^{(4)} = -2v^{(0)'} - \frac{Q}{2}v^{(0)} -$$

$$-(1+v^{(0)}) \int_s^\infty \int_t^\infty vu^{(0)} dt ds + (1-v) \int_s^\infty \frac{\lambda^{(0)}}{2} ds + \int_s^\infty \frac{\lambda^{(0)}}{2} (2+v^{(0)}) ds$$

4. Решения уравнений (3.6) являются быстро затухающими и могут быть аппроксимированы отрезками рядов экспонент [1], при этом задача в последующих приближениях оказывается не более сложной, чем в нулевом. Имеем

$$\begin{aligned} v &= v + \varepsilon^{1/2}(v_1^{(1)} + v_2^{(1)}) + \dots \\ v^{(0)} &= -0,900 \exp(-s/\sqrt{2}) [\cos(s/\sqrt{2}) - \sin(s/\sqrt{2})] \\ &\quad - \exp(-s\sqrt{2}) [0,243 \sin(s\sqrt{2}) + 0,081] + \dots \\ v_1^{(1)} + v_2^{(1)} &= -\exp(-s/\sqrt{2}) [(3,540Q + 49,89 + 21,22v) \cos(s/\sqrt{2}) + \\ &\quad + (0,490Q + 0,138) \sin(s/\sqrt{2})] + \exp(-s\sqrt{2}) [0,991Q + 13,42 + 5,730v) \cos(s\sqrt{2}) - \\ &\quad - (0,886Q - 13,44 + 5,730v) \sin(s\sqrt{2}) - 0,292Q - 4,534 - 1,910v] + \dots \end{aligned}$$

На фиг. 2, 3 приведены эпюры составляющих  $f^{(0)}$  и  $\varepsilon^{1/2}f_1^{(1)}$  для основных компонент: угла поворота  $w_2/A_2^0$ , кривизны  $\kappa_2$ , деформации  $\varepsilon_1$  и усилия  $T_2$ . В таблице даны отношения  $r = \max |f_1^{(0)} + \varepsilon^{1/2}f_1^{(1)}| / \max |f_1^{(0)}|$  для этих же компонент при различных значениях параметра  $\varepsilon$ . Видно, что при достаточно малых  $\varepsilon$  поправки к приближенному решению  $f_1^{(0)}$ , прежде всего к углу поворота  $w_2/A_2^0$ , деформации  $\varepsilon_1$  и усилию  $T_2$ , существенны.

Рассмотрим теперь непологие вмятины. Исходные уравнения получаются из уравнений (1.1)–(1.3), если заменить коэффициенты Ламе следующими:  $A_1 = R \sin \alpha_2$ ,  $A_2 = R \cos \alpha_2$ ; в выражение для угла поворота  $w_2/A_2$  добавить слагаемое  $-u_2/R$ , а в первое уравнение (1.1) — член  $N_2(1/R + \kappa_2)$ .

Предельная система 1 отличается от выведенной в п. 2 коэффициентами Ламе и выражением для угла поворота. Предельная система 2 совпадает с (2.2), иные лишь коэффициенты Ламе:  $A_1^0 = R \sin \gamma$ ,  $A_2^0 = R \cos \gamma$ .

Для непологих вмятин  $\gamma^2 \sim 1$ , малый параметр  $\varepsilon$  имеет порядок классического параметра тонкостенности  $a = t/(12^{1/2}R)$  и разложение функций в ряды выполняется по параметру  $a^{1/2} = [t/(12^{1/2}R)]^{1/2}$ . В случае пологих вмятин  $\gamma^2 \sim \varepsilon^{1/2}$ , параметр  $\varepsilon$  связан с параметром  $a$  соотношением  $\varepsilon \sim a^{2/3}$ , разло-

$f$	$\varepsilon^{1/2} = 0,032$	0,02	0,016	0,01
$w_2$	2,36	1,90	1,72	1,44
$\kappa_2$	1,11	1,05	1,04	1,02
$\varepsilon_1$	1,99	1,26	1,15	1,07
$T_2$	1,38	1,19	1,13	1,06

жение в ряды ведется по сути по параметру  $a^{1/6}$ . Для параметра пологости  $\gamma$  справедлива оценка  $\gamma \sim a^{1/6}$ .

Таким образом, нулевое приближение решения задачи о напряженно-деформированном состоянии в окрестности сглаженного ребра в случае пологих вмятин адекватно решению, полученному при помощи геометрического метода. Погрешность этого приближения составляет величину порядка  $a^{1/2}$  для непологих и  $a^{1/6}$  для пологих вмятин. Метод, предложенный в публикуемой работе, позволяет строить уточненные решения с учетом первого приближения для непологих вмятин, первого и второго — для пологих, которые имеют погрешность порядка  $a$ , сравнимую с погрешностями известных приближенных теорий оболочек.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Геометрическая теория устойчивости. М.: Наука, 1966. 296 с.
2. *Мушгари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Татар. кн. изд-во, 1957. 431 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями. — Успехи мат. наук, 1960, т. 15, вып. 4, с. 27–96.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
15.III.1985