

УДК 622.011.4;622.023

О КИНЕТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К РАЗРУШЕНИЮ ГОРНЫХ ПОРОД

ГЛУШКО А. И., НЕЦЕРЕТОВ И. И.

Экспериментальным исследованиям разрушения горных пород под действием сжимающих нагрузок при квазистатическом нагружении посвящено большое количество работ (см. [1–3] и приведенную там библиографию). При деформировании горных пород зависимость касательных напряжений от деформаций не монотонна: при увеличении деформаций напряжения возрастают, достигают максимума, а затем убывают. Более того, кривые «деформации — напряжения» зависят от скорости деформирования. Разрушение приводит к разрыхлению среды, т. е. после снятия нагрузки с образца его объем оказывается больше, чем до начала деформирования. Отметим также изменение скоростей продольных и поперечных волн при разрушении [4].

Опытных данных о поведении горных пород под действием динамических нагрузок существенно меньше. Однако есть основания считать, что указанные свойства горных пород, проявляющиеся при квазистатическом нагружении, присущи поведению горных пород и под действием динамических нагрузок. Тем не менее в этом случае приходится привлекать дополнительные гипотезы, вытекающие из интуитивных представлений о процессе разрушения. В настоящее время известны два подхода к теории разрушения горных пород при динамическом нагружении: когда переход среды из неразрушенного состояния в разрушенное происходит скачком на фронте разрушения (мгновенное хрупкое разрушение) [5–7]¹ и когда поведение среды при разрушении предлагается описывать моделью упрочняющегося упругопластического тела («постепенное» разрушение) [8, 9]. В данной работе предлагается другой подход к описанию процесса разрушения.

1. Будем исходить из кинетических представлений о разрушении горных пород под действием сжимающих напряжений. Известно, что при деформировании горных пород в среде происходит накопление разного рода микродефектов. Закономерности зарождения индивидуальных микротрещин и их развитие в поле сжимающих напряжений к настоящему времени неизвестны. Имеются только статистические данные о скорости изменения общего числа микротрещин, которые не могут быть экстраполированы непосредственно на процесс накопления микротрещин при сжатии, и функция распределения по размерам при растяжениях [10]. Тем не менее можно попытаться описать процесс деформирования и разрушения при сжатии феноменологически, опираясь на определенные гипотезы о процессе накопления микродефектов.

Опыты показывают, что плотность микродефектов (число микродефектов в единице объема) велика. Естественно предположить, что в этом случае поведение среды можно описать в рамках сплошной среды. Для количественной характеристики имеющихся в среде дефектов может быть введена величина $D \geq 0$, которую назовем повреждаемостью. Предположим, что изменение свойств среды по мере накопления микродефектов может быть охарактеризовано этой величиной. Чтобы определить скорость изменения D , следует принять во внимание следующие опытные наблюдения. Накопление дефектов происходит только при напряжениях, превышающих некоторое критическое значение. Скорость накопления зависит от повреждаемости D , напряжений σ и не зависит от градиентов этих величин, следовательно, скорость изменения повреждаемости D' должна

¹ См. также Николаевский В. Н. Предельная скорость фронта разрушения и динамические перегрузки хрупких материалов. — Препринт Ин-та проблем механики АН СССР. М., 1979, № 123. 57 с.

удовлетворять уравнению

$$D^* = f(D, \sigma) \quad (1.1)$$

Накопление дефектов приводит к изменению механических характеристик среды, в том числе ее эффективных модулей. В настоящей работе считается, что накопление повреждений и связанное с этим изменение модулей и упругих деформаций — один из основных факторов, определяющих поведение горных пород при деформировании и разрушении. При этом имеются в виду быстротекающие процессы, характерное время которых значительно меньше характерного времени процессов ползучести и развитого пластического течения.

2. Будем считать, что при разрушении распределение трещин по направлениям однородно (среда остается изотропной), а внутренняя энергия среды E есть квадратичная функция тензора упругих деформаций ε [11] и параметры Ламе λ и μ зависят от повреждаемости $E = \frac{1}{2} \lambda (D) \times \times I_1^2(\varepsilon) + \mu(D) I_1(\varepsilon \cdot \varepsilon)$, где $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{\alpha\alpha}$ — первый инвариант тензора ε ; точка означает операцию свертки. Учитывая (1.1), можно получить соотношение (точка означает полную производную по времени) $\mu^* = f(D, \sigma) \times \times d\mu(D)/dD$.

Сделаем дополнительное предположение: μ монотонно убывает при возрастании D . В этом случае существует обратная однозначная функция $D = D(\mu)$ и можно получить уравнение (f — некоторая известная функция):

$$\mu^* = f(\mu, \sigma) \quad (2.1)$$

которое содержит только μ , σ и не содержит D . При феноменологическом подходе это позволяет положить в основу описания деформирования и разрушения горных пород уравнение (2.1), а не (1.1), явно связывающее накопление дефектов и напряженное состояние среды. Функция $f = f(\mu, \sigma)$ должна определяться из опытных данных, которых для какого-нибудь конкретного материала в настоящее время нет. Можно, однако, высказать предположение, что функция f может быть аппроксимирована следующим образом:

$$f = -h(\mu) H(\Phi) [e_0(\Phi) + d(\gamma)/\tau_1(\Phi)] \quad (2.2)$$

$$h(\mu) > 0, e_0(\Phi) > 0, \tau_1 > 0, d(\gamma) = \gamma/(\gamma + \gamma_0)$$

где γ — второй инвариант девиатора скоростей деформаций, $H(x) = 0$ при $x < 0$, $H(x) = 1$ при $x \geq 1$.

При этом считается, что существует поверхность $\Phi(\varepsilon) = 0$ (критерий разрушения), такая, что при напряжениях, лежащих в области $\Phi(\varepsilon) < 0$, накопления повреждаемости не происходит. Естественно принять, что скорость накопления микродефектов тем больше, чем «больше» напряжения превышают критерий разрушения. Поэтому функция $e_0 = e_0(\Phi)$ должна быть неубывающей. С другой стороны, по мере накопления дефектов скорость накопления повреждений должна зависеть от величины повреждаемости и от μ .

Можно показать, что при напряжениях внутри области $\Phi < 0$ модуль μ не меняется. При $\Phi \geq 0$, $\gamma \approx 0$ имеем $f = -h(\mu) [e_0(\Phi) + \gamma/(\tau_1 \gamma_0)]$, а при $\gamma \gg 1$, $e_0 \gg 1/\tau_1$, $f \approx -h(\mu) e_0(\Phi)$. Следовательно, при малых скоростях деформирования приращение модуля μ линейно связано с приращением деформаций, а при больших γ уравнение (2.1) аналогично уравнениям, описывающим процессы релаксации.

Известно, что по мере накопления дефектов будет изменяться также и модуль λ [4]. Строго говоря, должно быть получено некоторое кинетическое уравнение, определяющее скорость изменения λ . Предположим, что модуль λ однозначно связан с модулем μ , причем функция $\lambda = \lambda(\mu)$ монотонно убывает. В этом случае по мере накопления повреждений скорости продольных и поперечных волн будут уменьшаться.

Обобщая известное в теории пластического течения предположение о том, что тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}$ может быть представлен в виде суммы тензоров скоростей упругих $\dot{\varepsilon}^e$ и пластических $\dot{\varepsilon}^p$ деформаций,

представим e для сред с повреждаемостью в виде

$$e = e^e + e^p + e^D \quad (2.3)$$

Здесь $e^e = \varepsilon$, e^p отражает факт зависимости кривых деформация — напряжение от скоростей деформирования и может быть представлен в виде [12]:

$$e^p = [\varepsilon - I_1(\varepsilon)g] / \tau_e \quad (2.4)$$

где g — единичный тензор, $\tau_e = \tau_e(\varepsilon)$ — время релаксации [12], определяемое из опытных данных.

О необходимости наличия слагаемого e^D в (2.3) говорят следующие факты. При деформировании происходит проскальзывание шероховатых берегов микротрещин относительно друг друга и разрушение неровностей. Образовавшиеся при этом «песчинки» заполняют пространство между берегами, оказываются значительно прочнее исходного материала, в дальнейшем не разрушаются и препятствуют схлопыванию берегов трещин, вследствие чего и образуется разрыхление. Ясно, что e^D должен как-то зависеть от μ и, учитывая предположение об изотропии процесса разрушения, должен быть шаровым. Примем простейший вид зависимости от μ :

$$e^D = \Lambda g \mu \quad (2.5)$$

где $\Lambda = \Lambda(D)$ — некоторая функция, определяемая из опытных данных. Таким образом, e^D ответствен за накопление повреждений.

Подставив (2.4), (2.5) в (2.3), перепишем последнее следующим образом:

$$\varepsilon = e - [\varepsilon - I_1(\varepsilon)g] / \tau_e - \Lambda g \mu \quad (2.6)$$

В дальнейшем будем использовать (2.6) для определения ε .

Из физических соображений ясно, что при деформировании среды между берегами трещин возникают силы трения, вызывающие диссипацию механической энергии. Диссипация энергии, так же как и силы трения, должна зависеть от величины тензора упругих деформаций и тензора скоростей деформаций e . С другой стороны, при статическом напряженном состоянии ($\dot{\varepsilon} = 0$) тензор напряжений σ должен определяться только тензором упругих деформаций ε , если пренебречь влиянием температуры. Учитывая это обстоятельство и опираясь на законы термодинамики, тензор напряжений σ можно представить в виде суммы

$$\sigma = s + \tau \quad (2.7)$$

Здесь тензор s ассоциируется с деформациями «скелета» среды и выражается через тензор упругих деформаций ε по формулам (g — единичный тензор):

$$s = \partial E / \partial \varepsilon = \lambda(D) I_1(\varepsilon) g + 2\mu(D) \varepsilon \quad (2.8)$$

Тензор τ , обусловленный силами трения, можно определить считая, что он коаксиален тензору скоростей деформаций e , главные значения τ_i тензора τ связаны с главными значениями e_i тензора e формулами

$$\tau_i = -\alpha(D) I_1(s) \text{sign}(e_i) \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.9)$$

Функцию $\alpha = \alpha(D)$ можно назвать коэффициентом трения.

В п. 3 будет показано, что тензор τ , определенный таким образом, обеспечивает диссипацию механической энергии при сжатии, т. е. $I_1(\tau \cdot e) \geq 0$. Вместо (2.9) можно предложить более простую формулу:

$$\tau_i = -\alpha(D) I_1(s) \text{sign}(I_1(e)) \quad (2.10)$$

Заметим, что представление (2.7) тензора напряжений в виде двух слагаемых известно в гидродинамике вязкой сжимаемой жидкости и называется формулой Гиббса [13].

Из принятых предположений получена система определяющих уравнений (2.1), (2.6) — (2.9) модели сплошной среды. Коэффициенты этой

системы находятся через функции f , Λ , τ_ε , α и их производные, определение которых из опытных данных представляет собой самостоятельную задачу. Здесь надо иметь в виду, что для определения функций $f=f(\mu, \sigma)$, $\Lambda=\Lambda(D)$ недостаточно иметь данные о зависимости напряжений от деформаций. Необходимо провести серии динамических опытов при различных программах нагружения и интенсивностях нагрузок, а затем подвергнуть образцы фрактографическому и, может быть, рентгеноструктурному анализу. Однако к настоящему времени таких данных для какого-нибудь конкретного материала нет.

Для решения задач к определяющим уравнениям следует добавить уравнения сохранения импульса — уравнения Эйлера и уравнение сохранения энергии, если учитываются тепловые процессы.

3. Обозначим через η энтропию, ρ — плотность, T — температуру, θ — внешний приток тепла. Тогда из первого закона термодинамики и уравнений (2.1) — (2.9) вытекает, что скорость изменения энтропии η (без учета теплопроводности) определяется выражением $\rho T \dot{\eta} - \theta = r_1 + r_2 + r_3$, где $r_1 = -\alpha I_1(s) (|e_1| + |e_2| + |e_3|)$, $r_2 = I_1(s) [\varepsilon - I_1(\varepsilon) g/3] / \tau_\varepsilon$, $r_3 = \mu \cdot (I_1(s) \Lambda - \partial E / \partial \mu)$.

Из (2.9) следует, что $r_1 \geq 0$. Можно также показать [12], что $r_2 \geq 0$. Поэтому, чтобы не нарушался закон возрастания энтропии, достаточно потребовать, чтобы $r_3 \geq 0$, т. е.

$$I_1(s) \Lambda - \partial E / \partial \mu \leq 0 \quad (3.1)$$

В этом случае будет выполнено неравенство $\rho T \dot{\eta} - \theta \geq 0$.

Таким образом, только при напряжениях, удовлетворяющих неравенству (3.1), возможен процесс разрыхления.

Согласно (2.6), при $\Lambda > 0$ необратимые объемные деформации положительны и возрастают в процессе разрушения, т. е. модель отражает факт разрыхления среды при разрушении, а разрыхление непосредственно связано с изменением модуля сдвига. Это не случайно, так как само по себе разрыхление не может происходить, если оно не сопровождается каким-либо диссипативным процессом.

4. Система определяющих уравнений сформулирована на основе определенных представлений о характере деформирования и разрушения горных пород. Естественно возникает вопрос, в какой степени предложенная модель отражает реальные свойства среды. Чтобы ответить на этот вопрос, во-первых, нужны новые эксперименты, из которых можно определить входящие в уравнения (2.1) — (2.9) функции и параметры; во-вторых, нужны эксперименты для проверки вытекающих из модели следствий.

Проиллюстрируем свойства модели на примере численного решения одной задачи. Относительно функций $f=f(\mu, \sigma)$, $\Lambda=\Lambda(D)$, $\alpha=\alpha(D)$, $\tau_\varepsilon=\tau_\varepsilon(\varepsilon)$ примем простейшие предположения и зададим их следующим образом:

$$\Phi = 1/2 J - \Phi_0, J = s_{ij} s_{ij}, e_0 = 0, \Phi < 0 \quad (4.1)$$

$$e_0 = \tau_0 > 0, \Phi \geq 0; \tau_1 = +\infty, \alpha(D) = f_0 = \text{const}; \Lambda = \Lambda_0 = \text{const}$$

$$d = 1, h(\mu) = \mu, \Phi_0 > 0; \tau_\varepsilon = \tau_2, J > J_0$$

$$\tau_\varepsilon = +\infty, J \leq J_0; \tau_2 = \text{const}, J_0 = \text{const}$$

Хотя из эксперимента следует, что Λ должно стремиться к нулю при $I_1(s) \gg 1$ [4], но здесь Λ принимается постоянным. Эти упрощения вызваны в первую очередь отсутствием необходимых данных для какого-нибудь конкретного материала. Тем не менее даже эта упрощенная система не сводится к ранее известным моделям неупругих сред.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть имеется полый цилиндрический образец из горной породы. Заполним полость значительно более жестким материалом и затем ко внешней поверхности образца приложим переменную нагрузку. Если интенсивность нагрузки достаточно ве-

лика, то в породе начинается разрушение. Опишем характерные особенности этого процесса в рамках предложенной модели сплошной среды.

Для этого находим функции u , ε_r , ε_φ , ε_z , удовлетворяющие системе уравнений и граничных условий (начальные условия — нулевые):

$$\begin{aligned} \rho du/\partial t &= \partial \sigma_r / \partial r + (\sigma_r - \sigma_\varphi) / r \\ \partial \varepsilon_r / \partial t &= \partial u / \partial r - \Lambda f - (\varepsilon_r - q) / \tau_e \\ \partial \varepsilon_\varphi / \partial t &= u / r - \Lambda f - (\varepsilon_\varphi - q) / \tau_e \\ \partial \varepsilon_z / \partial t &= -\Lambda f - (\varepsilon_z - q) / \tau_e \\ \partial \mu / \partial t &= f = -\mu / e_0, \quad \sigma_r = p + 2\mu(\varepsilon_r - q) \\ \sigma_\varphi &= p + 2\mu(\varepsilon_\varphi - q), \quad q = (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z) / 3 \\ p &= 3Kq, \quad K = (\lambda + 2\mu/3)(1 + f_0 \operatorname{sign}(e)) \\ \sigma_r(R_1, t) &= \sigma_0(t), \quad u(R_0, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Здесь u , σ_r , σ_φ — физические компоненты вектора скорости и тензора напряжений в цилиндрической системе координат, $\sigma_0 = \sigma_0(t)$ — заданная функция, $R_0 \leq r \leq R_1$. Функции Λ , e_0 определены в (4.1). Нагрузка при $r = R_1$ задавалась в виде $(\sigma_{00}, t_1, t_2 - \text{постоянные})$: $\sigma_0(t) = \sigma_{00}t/t_1$, $0 < t \leq t_1$, $\sigma_0(t) = \sigma_{00}(t - t_2)/(t_1 - t_2)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $\sigma_0(t) = 0$, $t_2 \leq t$.

Решение задачи получено численно при помощи конечно-разностной схемы второго порядка точности. Расчетная область разбивалась на 100 ячеек. Во внутренних узлах сетки для расчета использовалась схема Мак-Кормака [14]. Значения неизвестных функций на границе $r = R_i$, $i = 0, 1$ определялись по схеме «предиктор — корректор» из соотношений $q_1 + 4\mu q_2/3 = \lambda_i [2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)/r - \rho du/dt]$, $q_1 = q_2$, $q_2 = K(\varepsilon_r - I_1(\varepsilon)g/3)\tau_e$, $q_1 = -K(u/r - \Lambda\mu/\tau_0) - dp/dt$, выполняющихся на характеристиках

$$\lambda_i = dr/dt = (-1)^{i+1} (K + 4\mu/3)^{1/2}$$

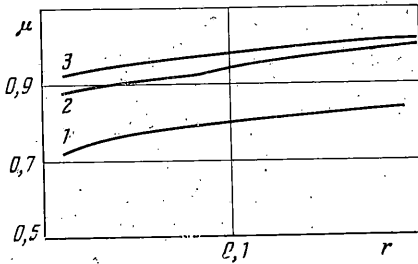
Шаг по времени выбирался из условия устойчивости. Заметим, что в последнее уравнение системы входит величина, обратная τ_0 . При малых значениях τ_0 возникает затруднение при численном интегрировании системы. Поэтому, чтобы получить решение при малых τ_0 , нужно использовать равномерно устойчивые разностные схемы.

5. Перейдем к анализу численных расчетов. Все численные результаты на фиг. 1–8 представлены в безразмерных величинах: $r' = (r - R_0)/L$, $t' = at/L$, $u' = u/a$, $p' = p/\sigma_{00}$, $J' = J/\sigma_{00}^2$, $\mu' = \mu/\mu_0$, $\Phi' = \Phi/\sigma_{00}^2$, где $L = R_1 - R_0$, $a = [\mu_0(1 - \nu)/(\rho(1 - 2\nu))]^{1/2}$, ν — коэффициент Пуассона, μ_0 — значение μ в начальный момент времени (в неразрушенном материале). Штрихи далее опускаются. При расчетах принимались следующие значения безразмерных параметров: $\nu = 0,25$, $\Phi_0 = 7,5 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_{00} = 0,005$, $R_0/L = 0,4$, $t_1 = 0,01$, $t_2 = 2$, $\tau_e = +\infty$.

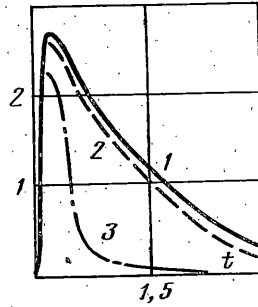
Величина σ_{00} выбиралась так, чтобы сходящаяся волна до отражения была упругой; Φ_0 , Λ_0 , τ_0 определялись из оценки имеющихся данных [10]. Были просчитаны варианты, в которых параметр τ_0 принимал значения: 0, 1, 5, 10. При $\tau_0 = 1$ были просчитаны варианты при следующих значениях Λ_0 : 0, 1, 5, 10.

Множества точек, в которых значения μ меньше единицы, естественно считать зоной разрушения. Поэтому зависимости $\mu = \mu(r)$ могут характеризовать как степень разрушения, т. е. величину повреждений, так и размеры зоны разрушения. На фиг. 1 показаны зависимости μ от r при различных значениях параметра τ_0 . Здесь кривые 1–3 соответствуют следующим значениям τ_0 : 0, 1, 5, 10. Зависимости $\mu = \mu(r)$ соответствуют тем моментам времени, когда $\partial \mu / \partial t = 0$ на интервале $0 < r < 1$, т. е. когда закончился процесс разрушения. Из фиг. 1 видно, что функция $\mu = \mu(r)$ монотонно возрастает и при r больших $0,2$ $\mu \approx 1$, если $\tau_0 = 5$ или $\tau_0 = 10$. Это означает, что зона разрушения составляет примерно 20% от толщины образца при $\tau_0 \geq 5$. Однако при $\tau_0 = 1$ зона разрушения значительно больше и равна примерно половине образца.

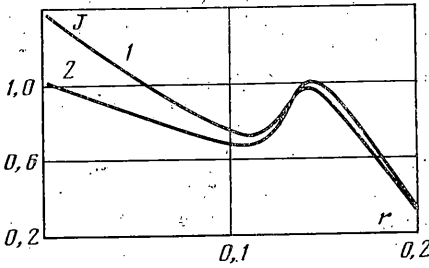
Была также получена зависимость интенсивности касательных напряжений от времени для частицы, расположенной на границе $r = 0$. Эта зависимость изображена на фиг. 2. Здесь кривая 1 соответствует расчету по модели упругого тела, 2 — при $\tau_0 = 10$, 3 — при $\tau_0 = 1$. Сопоставление кривых 1 и 3 показывает, что величина J , рассчитанная с учетом изменения модуля μ , меньше и с течением времени это различие становится значительным. Зависимость J от r при фиксированном t также подтверждает этот вывод. Эти зависимости при $t = 1$, 2 показаны на фиг. 3. Здесь кривая 1 соответствует модели упругого тела, 2 — расчету при $\tau_0 = 5$. Аналогичные



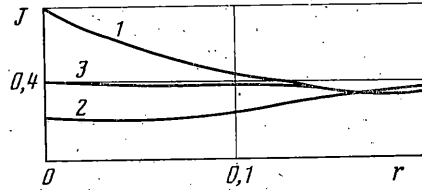
Фиг. 1



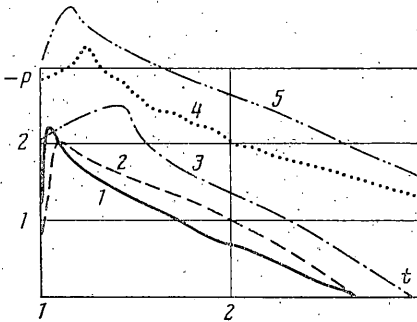
Фиг. 2



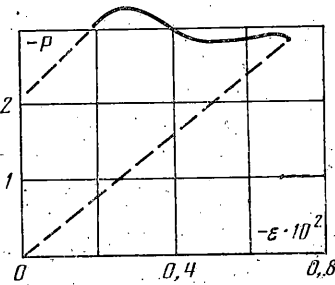
Фиг. 3



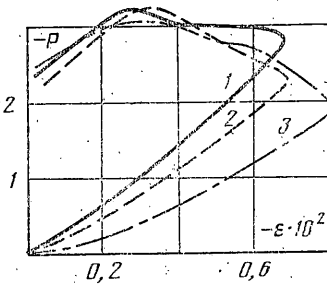
Фиг. 4



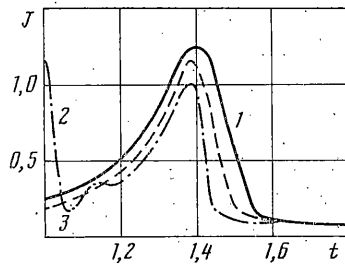
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

зависимости имеют место и для других моментов времени. Например, при $t=1,5$ зависимости J от r имеют вид, показанный на фиг. 4. На этой фигуре кривые 1-3 соответствуют расчетам при τ_0 , равных 0, 5, 10. Таким образом, эти расчеты показывают, что при решении задачи о сходящейся волне при $\tau_0 \neq \infty$ напряжения оказываются меньше, чем напряжения, рассчитанные по модели упругого тела ($\tau_0 = \infty$).

Из анализа численных расчетов также видно, что величина скорости менее чувствительна к изменениям параметра τ_0 .

Рассмотрим влияние параметров τ_0 и Λ_0 на давление p . Кривые 1-5 на фиг. 5 показывают зависимость p от времени при $r=0$ и следующих значениях параметра Λ_0 : 0, 10^{-3} , 10^{-2} , $2,5 \cdot 10^{-2}$, $5 \cdot 10^{-2}$. Для любого t , $1 < t < 2$ увеличение Λ_0 приводит к возрастанию p , а моменты времени, при которых p достигает максимального значения, зависят от Λ_0 немонотонно. Заметим, что влияние Λ_0 относительно велико,

что можно использовать для нахождения функции $\Lambda = \Lambda(D)$ при проведении эксперимента, аналогичного расчетной схеме задачи.

Проиллюстрируем процесс деформирования материальной частицы среды, расположенной на границе $r=0$ (Фиг. 6). Здесь вертикальная ось соответствует давлению p , горизонтальная — объемным деформациям ϵ_v . Процесс рассматривается на интервале времени $1,07 < t < 1,4$, последовательность прохождения точек с увеличением времени — против часовой стрелки.

При расчетах параметр τ_0 был принят равным единице. Из Фиг. 6 видно, что кривая «отходит» от линии $p = K\epsilon_v$. В момент времени $t=1,4$ начинается упругая «разгрузка». Если продолжить эту кривую по пунктирной линии, то получим, что в разгруженном состоянии величина $\epsilon_v > 0$, т. е. произойдет разрыхление среды. Здесь уместно отметить аналогию этой кривой с экспериментально полученными зависимостями, представляющими процесс деформирования в переменных p , ϵ_v [15].

На Фиг. 7 показано влияние коэффициента трения f_0 на зависимость p от ϵ_v при $\Lambda_0 = 0,025$, $\tau_0 = 1$ (кривые 1–3 соответствуют расчетам при $f_0 = 0, 0,2, 0,5$). Величина f_0 мало влияет на максимальное значение давления. На максимальное значение деформаций изменение f_0 влияет более существенно.

Отметим, что учет релаксации касательных напряжений снижает максимальное значение величины J . Например, если условие текучести $J = 0,9 \Phi_0 = 0$, то максимальное значение J снижается примерно на 15%. На Фиг. 8 показаны зависимости J от t при $r=0$ и различных значениях τ_e (кривые 1–3 соответствуют расчетам при $\tau_e = \infty, 0, 1, 10$).

Таким образом, проведенные расчеты дают основание надеяться, что представления, положенные в основу предлагаемой модели сплошной среды, качественно отражают поведение горных пород под действием сжимающих напряжений.

Авторы благодарят Н. В. Зволинского за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Лифшиц Л. Д., Сизов И. А. Механические свойства горных пород. Деформация и разрушение. — В кн.: Итоги науки и техники: Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ, 1978, т. 11, с. 123–250.
2. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
3. Глушко А. И., Ковшов А. Н., Нецерегов И. И., Никитин И. С. О критерии разрушения для горных пород. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 200–204.
4. Gupta I. N. Seismic velocities in rock subjected to axial loading up to shear fracture. — J. Geophys. Res., 1973, v. 78, No. 29, p. 6936–6942.
5. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. — ПММ, 1967, т. 31, вып. 4, с. 643–669.
6. Слепня Л. И. О волне хрупкого разрушения. — Инж. журн. МТТ, 1968, № 4, с. 190–192.
7. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О самоподдерживающемся разрушении напряженного хрупкого тела. — Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1966, т. 167, № 3, с. 543–546.
8. Коротков П. Ф. О математической модели постепенного разрушения горных пород и превращения их в пористые сыпучие среды. — Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1980, т. 253, № 6, с. 1357–1360.
9. Капустянский С. М., Николаевский В. Н. Количественная формулировка упруго-пластической дилатансионной модели (на примере песчанника). — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 113–123.
10. Керрен Д., Шоки Д., Симен Л., Остин М. Механизмы кратерообразования в природных средах. — В кн.: Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981, с. 81–115.
11. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
12. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
13. Седов Л. И. Механика сплошных сред. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
14. Warming R. F., Kutler P., Lomax H. Second and third-order noncentered difference schemes for nonlinear hyperbolic equations. AIAA Journal, 1973, v. 11, No. 2, p. 189–196.
15. Шок Р. Поведение горных пород под действием больших напряжений. — В кн.: Удар, взрыв и разрушение. М.: Мир, 1981, с. 116–130.

Москва

Поступила в редакцию
21.VI.1985