

УДК 539.375

КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ  
ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЫ,  
РАСПОЛОЖЕННОЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ПОЛУПЛОСКОСТИ

МОРОЗОВА Т. М.

Рассматривается плоская задача теории упругости о криволинейной трещине, расположенной вблизи границы полуплоскости и находящейся под действием самоуравновешенных сил. Методом комплексных потенциалов задача сводится к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно производной от скачков смещений вдоль контура трещины [1]. Система решается численно аналогично [2, 3].

Вычислены значения коэффициентов интенсивности напряжений  $K_1$ ,  $K_2$  для криволинейных трещин в форме дуги окружности и дуги, сопряженной с отрезком прямой, находящихся вблизи границы полуплоскости. Проведена серия контрольных методических расчетов для прямолинейных трещин вблизи границы полуплоскости. Получены верхние оценки  $K_1$  и  $\partial W/\partial l$  скорости высвобождения упругой энергии деформации для трещины в форме дуги окружности, расположенной вблизи границы полуплоскости по значениям  $K_1$  и  $\partial W/\partial l$  для эквивалентной прямой трещины, находящейся на прямой, соединяющей концы этой дуги.

Найдены положения трещины около границы, имеющие форму дуги окружности и дуги, сопряженной с прямой, при которых в ее вершинах напряженно-деформированное состояние соответствует нормальному отрыву ( $K_2=0$ ).

Плоская задача для бесконечного тела, ослабленного криволинейной трещиной, берега которой нагружены самоуравновешенными усилиями, впервые изучалась в [4], где трещина представлялась в виде непрерывного распределения дислокаций, плотность которых подлежала определению.

Задача о разрезе произвольного профиля, мало отличающегося от прямолинейного, решалась в [5] путем разложения упругих потенциалов и граничных условий на искривленном профиле в ряды по целым степеням малого параметра (максимальный угол наклона профиля к оси). В [6, 7] получены и исследованы уравнения для плоскости с двоякопериодической системой криволинейных гладких разрезов, на берегах которых приложены самоуравновешенные нагрузки. Были рассмотрены задачи о криволинейных разрезах частного вида, находящихся в плоскости: дуга окружности [8-11], дуга параболы [12], дуга окружности, сопряженная с прямой [1]. Прямолинейные трещины вблизи границы полуплоскости были рассмотрены в [4, 13, 14].

Дальнейшее развитие и обобщение метода решения двумерных задач теории упругости для тел с криволинейными трещинами получено в монографии [15].

**1. Система сингулярных интегральных уравнений и алгоритм решения.** Рассмотрим упругую полуплоскость с гладким криволинейным разрезом  $L$  вблизи границы полуплоскости. Пусть кривая  $L$  относительно прямоугольной декартовой системы координат  $x, y$ , связанной с границей полуплоскости, записывается в параметрической форме  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) (функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют непрерывные первые производные). Примем, что внешние нагрузки приведены к нормальным  $\sigma_n(t)$  и касательным  $\sigma_t(t)$  напряжениям, заданным на берегах разреза.

Решение задачи теории упругости в этом случае вследствие ее линейности можно представить в виде суммы решений двух задач: одной, получающейся, если считать, что есть разрез в упругой плоскости, на котором задача производная от скачка смещений, и другой задачи для полуплоскости без разреза, на границе которой приложены нагрузки, равные и противоположные по знаку напряжениям, найденным в первой задаче на месте границы полуплоскости. Сложив решения первой и второй задач и приравняв сумму напряжений, возникающих в обеих задачах на месте разреза, нагрузкам, заданным на трещине, получим систему сингулярных интегральных уравнений относительно производных от скачков

смещений  $[du_x(\tau)/d\tau]$ ,  $[du_y(\tau)/d\tau]$  вдоль разреза  $L$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{b_k(\tau) c_{ik}(t) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 b_k(\tau) R_{ik}(t, \tau) d\tau = \frac{\kappa+1}{\mu} \sigma_i^*(t) \quad (1.1)$$

$(i=n, t); \quad k=x, y), \quad b_k(\tau) = [du_k(\tau)/d\tau], \quad \kappa=3-4\nu$   
 $c_{ny}(t) = \frac{x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha}{x_i^2 + y_i^2} + \frac{2y_i^2 (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha)}{(x_i^2 + y_i^2)^2}$   
 $c_{ix}(t) = \frac{y_i \sin \alpha + x_i \cos \alpha}{x_i^2 + y_i^2} + \frac{2x_i y_i (x_i \sin \alpha - y_i \cos \alpha)}{(x_i^2 + y_i^2)^2}$   
 $c_{iy}(t) = \frac{y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha}{x_i^2 + y_i^2} + \frac{2y_i^2 (x_i \sin \alpha - y_i \cos \alpha)}{(x_i^2 + y_i^2)^2}$   
 $c_{nx}(t) = \frac{y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha}{x_i^2 + y_i^2} + \frac{2x_i y_i (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha)}{(x_i^2 + y_i^2)^2}$

$$R_{nx}(\tau, t) = \frac{1}{2} \left\{ \cos \alpha \left[ \frac{2w(f^2 - v^2)}{a^2} - \frac{8y(\tau)y(t)(3f^2v - v^3)}{a^3} \right] + \right.$$

$$\left. + \sin \alpha \left[ \frac{2(f^3 - fv^2)}{a^2} - \frac{8y(\tau)y(t)(f^3 - 3fv^2)}{a^3} \right] \right\}$$

$$R_{iy}(\tau, t) = \frac{1}{2} \left\{ \sin \alpha \left[ \frac{3f}{a} - \frac{f^3 - 3fv^2}{a^2} + \frac{8y(\tau)y(t)(f^3 - 3fv^2)}{a^3} \right] - \right.$$

$$\left. - \cos \alpha \left[ \frac{v}{a} + \frac{2w(f^2 - v^2) - f^2v - v^3}{a^2} - \frac{8y(\tau)y(t)(3f^2v - v^3)}{a^3} \right] \right\}$$

$$R_{ny}(\tau, t) = \frac{1}{2} \left\{ \cos \alpha \left[ -\frac{2f(f^2 + 3v^2)}{a^2} + \frac{8y(\tau)y(t)(f^3 - 3fv^2)}{a^3} \right] + \right.$$

$$\left. + \sin \alpha \left[ \frac{f}{a} + \frac{f^2v - v^3 + w(f^2 - v^2)}{a^2} - \frac{8y(\tau)y(t)(3f^2v - v^3)}{a^3} \right] \right\}$$

$$R_{ix}(\tau, t) = \frac{1}{2} \left\{ \sin \alpha \left[ \frac{2w(f^2 - v^2) + 8f^2v}{a^2} - \frac{8y(\tau)y(t)(3f^2v - v^3)}{a^3} \right] - \right.$$

$$\left. - \cos \alpha \left[ \frac{2(f^2 - v^2)f}{a^2} - \frac{8y(\tau)y(t)(f^3 - 3fv^2)}{a^3} \right] \right\}$$

$f = x(\tau) - x(t), \quad w = y(\tau) - y(t), \quad v = y(\tau) + y(t)$   
 $a = f^2 + v^2, \quad \cos \alpha = \cos \alpha(t), \quad \sin \alpha = \sin \alpha(t)$   
 $\sigma_n^*(t) = \sigma_n(t) \cos \alpha(t) + \sigma_i(t) \sin \alpha(t)$   
 $\sigma_i^*(t) = \sigma_i(t) \cos \alpha(t) - \sigma_n(t) \sin \alpha(t)$

где  $\mu$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Условие однозначности смещений при обходе по контуру, охватывающему линию  $L$ , переписываются в виде

$$\int_{-1}^1 b_k(\tau) d\tau = 0 \quad (k=x, y) \quad (1.2)$$

Искомые функции  $b_k(t)$  имеют корневые особенности в концах отрезка  $[-1, 1]$  [11] и поэтому решение системы (1.1) при условиях (1.2) ищется в виде

$$b_k(t) = b_k^\circ(t) (1-t^2)^{-1/2} \quad (1.3)$$

где  $b_k^\circ(t)$  — гладкая функция на отрезке  $[-1, 1]$ .

Будем искать неизвестные  $b_k^\circ(t)$  в виде разложения по полиномам Чебышева первого рода [2, 3]. Система (1.1), (1.2) принимает тогда

θ, град	$K_1/(p(2\pi R)^{1/2})$		$K_2/(p(2\pi R)^{1/2})$	
5	0,207	(0,209)	0,018	(0,018)
10	0,286	(0,299)	0,051	(0,053)
15	0,339	(0,344)	0,092	(0,099)
20	0,371	(0,398)	0,137	(0,158)
25	0,379	(0,368)	0,184	(0,197)
30	0,378	(0,352)	0,231	(0,254)
35	0,364	(0,337)	0,280	(0,264)
40	0,339	(0,314)	0,317	(0,299)
45	0,306	(0,284)	0,354	(0,337)
50	0,265	(0,255)	0,385	(0,373)
55	0,219	(0,220)	0,409	(0,407)
60	0,185	(0,183)	0,436	(0,439)
65	0,115	(0,144)	0,436	(0,469)
70	0,063	(0,104)	0,437	(0,498)
75	0,011	(0,063)	0,432	(0,524)
80	-0,038	(-0,021)	0,419	(0,546)
85	-0,084	(-0,061)	0,399	(0,564)
90	-0,124	(-0,114)	0,375	(0,577)

следующий вид:

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n b_m^\circ(t_h) \left( \frac{c_{im}(x_n)}{t_h - x_r} + R_{im}(t_h, x_r) \right) = \frac{\kappa+1}{\mu} \sigma_i^*(x_r)$$

$$\sum_{h=1}^n b_m^\circ(t_h) = 0 \quad (m=x, y; i=n, t) \quad (1.4)$$

где  $t_h$  и  $x_r$  — узлы полиномов Чебышева первого и второго рода:

$$t_k = \cos \left( \frac{1}{2} \pi (2k-1)/n \right) \quad (k=1, \dots, n), \quad x_r = \cos(\pi r/n)$$

$$(r=1, \dots, n-1)$$

Коэффициенты интенсивности напряжений в концах разреза для отрыва  $K_1$  и сдвига  $K_2$  вычислялись по формулам, приведенным в [1]:

$$K_i = \mp \frac{\mu a_{ih} b_h^\circ(t)}{2\sqrt{2}(1-\nu)(x^*{}^2 + y^*{}^2)^{3/4}} \Big|_{t=\pm 1}$$

$$a_{11} = -y^*(t) = -a_{22}, \quad a_{12} = x^*(t) = a_{21}$$

где верхний знак берется для правого конца разреза  $t=1$ , а нижний знак — для левого  $t=-1$ .

2. Результаты расчетов. Рассматриваются разрезы следующих трех видов: трещина представляет дугу окружности с центральным углом  $2\theta$  (фиг. 1, а):

$$y = -(R^2 - x^2)^{1/2} + H, \quad |x| \leq R \sin \theta$$

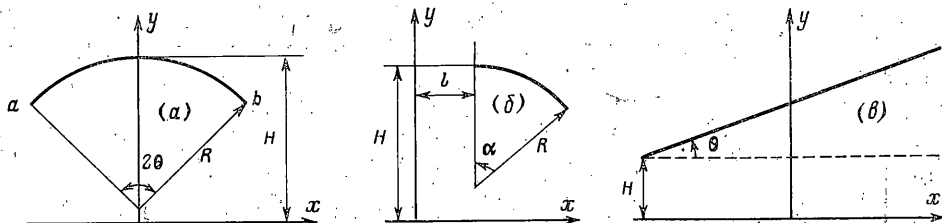
отрезок прямой, плавно переходящий в дугу окружности (фиг. 1, б):

$$y = H - l - [R^2 - (x-l)^2]^{1/2}, \quad y = H \quad (-1 \leq x \leq l)$$

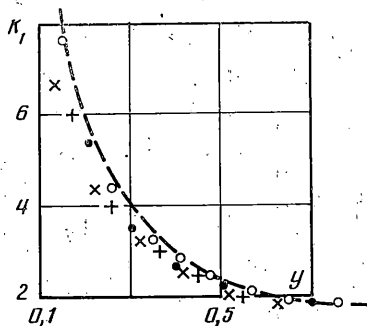
отрезок прямой под углом  $\theta$  к границе полуплоскости (фиг. 1, в):

$$y = H + (1+t) \sin \theta, \quad x = t \sin \theta \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

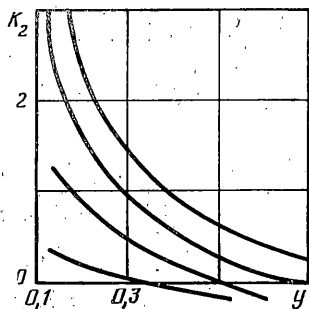
Система линейных алгебраических уравнений (1.4) решается методом Гаусса с двойной точностью. Результаты счета для прямой наклонной трещины вблизи границы (фиг. 1, а) при  $N=30$  и  $N=40$  отличаются в четвертом знаке после запятой, а при  $N=40$  и  $N=50$  — в пятом. Сравнение коэффициентов интенсивности напряжений для этого случая с результатами [15] показывает, что отличие составляет не больше 5–6%, а сравнение с [14] дает совпадение при  $N=40$  до 0,01%. Время счета одного варианта при  $N=40$  составляет 53 с. В табл. 1 приведены значения безразмерных величин  $K_i/(p(2\pi R)^{1/2})$ , полученные для дуги окружности в упругой плоскости при ее растяжении (цифры в скобках). В диапазоне изменений угла раствора  $\theta$  (до  $60^\circ$ ) отклонение  $K_i$  от значений, полученных по точным формулам [6], не превосходит 3–5%.



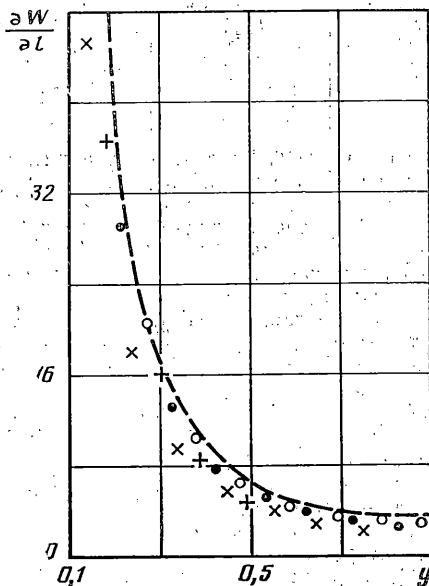
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

В качестве варианта задачи о криволинейной трещине, расположенной вблизи границы, рассматривается задача о растяжении упругой полуплоскости с разрезом вдоль дуги окружности. В табл. 2 представлены результаты счета коэффициентов интенсивности напряжений для дуги постоянной длины 2, но с различными радиусами кривизны  $R=1/\theta$  и при разном удалении от границы.

Сравнение значений  $K_1/(p(2lR)^{1/2})$ , представленных в табл. 1, 2, показывает, что при  $H=4$  (т. е. две длины дуги) и  $\theta=5^\circ$  отличие составляет не более 4%, а уже при  $\theta=30^\circ$  коэффициенты интенсивности напряжений отличаются в три раза.

При дальнейшем приближении к границе для трещин  $l=1$  ( $2\theta \leq 40^\circ$  и  $0,1 \leq H \leq 0,8$ ) верхняя оценка значения  $K_1$  дается величиной  $K_1$  для прямой трещины той же длины, находящейся на таком же удалении от границы, что и концы дуги (фиг. 2). Светлые точки соответствуют  $\theta=5^\circ$ , темные —  $\theta=10^\circ$ , прямые кресты —  $\theta=15^\circ$ , а косые —  $\theta=20^\circ$ ; штриховая кривая соответствует прямой, проходящей через концы дуги.

Если попытаться получить подобную оценку для величины  $K_2$ , то, как видно из фиг. 3, это не удается сделать так, как при увеличении искривления трещины величина  $K_2$  проходит через нуль. Когда  $K_2=0$  ( $\theta=20^\circ$ ,  $H=0,4$ ), в ее вершинах напряженно-деформируемое состояние соответствует нормальному отрыву. Кривые 1–4 соответствуют  $\theta=5, 10, 15, 20^\circ$ .

Тем не менее, используя значения  $K_{1,2}$  для эквивалентной прямой трещины, удается получить верхнюю оценку для величины скорости высвобождения упругой энергии деформации  $\partial W/\partial l = (v^2-1)(K_1^2+K_2^2)/E$  для трещины в форме дуги окружности ( $2\theta \leq 40^\circ$ ). Эта величина вместе со значением  $K_1$  часто используется при анализе условий срагивания криволинейной трещины (фиг. 4, обозначения те же, что и на фиг. 2).

Задача о трещине, состоящей из двух участков — прямолинейного и искривленного, может быть использована для моделирования процесса роста трещины вблизи границы. Будем считать, что один конец трещины закреплен, а другой вследствие влияния границы полуплоскости получает некоторое искривление так, что в целом трещина на некотором этапе квазистатического роста приобретает форму, соответ-

Таблица 2

$H$	$\theta=5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$
0,4	0,68 (0,18)	1,07 (0,21)	1,43 (0,17)	1,78 (0,058)	2,09 (0,14)	2,36 (0,43)
0,6	0,48 (0,08)	0,70 (0,06)	0,089 (0,02)	1,06 (0,06)	1,20 (0,17)	1,31 (0,30)
0,8	0,37 (0,03)	0,54 (0,01)	0,68 (0,04)	0,79 (0,11)	1,87 (0,20)	0,94 (0,30)
1,0	0,32 (0,01)	0,47 (0,02)	0,57 (0,07)	0,68 (0,13)	0,72 (0,21)	0,76 (0,30)
4,0	0,22 (0,02)	0,32 (0,05)	0,39 (0,1)	0,47 (0,15)	0,54 (0,24)	0,61 (0,33)

Таблица 3

$K_1(-1)$	$K_2(-1)$	$K_1(1)$	$K_2(1)$	$H$	$\alpha$ , град
1,73	0,28	1,78	-0,01	0,8	14
2,12	0,48	2,26	-0,01	0,6	22
3,06	0,97	3,56	-0,01	0,4	34
7,16	2,99	10,04	-0,04	0,2	52

ствующую фиг. 1, б. Тогда в случае распространения трещины нормального отрыва величина  $K_2$  в вершине искривленного участка трещины будет близка к нулю [4].

В табл. 3 приведены значения угла  $\alpha$  (угол дуги окружности траектории искривленного конца трещины) в зависимости от удаления прямолинейного участка трещины до границы полуплоскости. При расчете длина прямолинейного участка трещины и длина дуги окружности, сопряженной с ними составляющей 0,6 длины прямолинейного участка, оставались постоянными. При приближении к границе угол  $\alpha$  растет, т. е. трещина стремится выйти на нормаль к границе.

Автор благодарен Р. В. Гольдштейну за постановку задачи и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В., Савова Л. Н. Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2, с. 69–78.
2. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations.— Quart. Appl. Math., 1972, V. 29, № 4, p. 525–534.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. с. 304.
4. Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л. Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 3, с. 69–70.
5. Баничук Н. В. Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2, с. 130–137.
6. Линьков А. М. Интегральное уравнение плоской задачи теории упругости о двоякопериодической системе разрезом, нагруженных самоуравновешенными нагрузками.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2, с. 70–74.
7. Линьков А. М., Меркулов В. А. Задачи об изгибе тонких пластин с разрезами.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 1, с. 111–118.
8. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений для криволинейной трещины, мало отличающейся от дугообразной или прямолинейной. Физ.-хим. механика материалов, 1980, 16, № 2, с. 57–63.
9. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1968. с. 246
10. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. с. 707
11. Smith R. C. T. Tension of an infinite plate cut along a circular arc.— J. Math. and Phys., 1957, v. 36, № 3, p. 223–233.
12. Ramachandra Rao B. S. Infinite elastik plane with a parabolik arc cut.— Appl. Sci. Res. Ser. A, 1963, V. 12, № 1, p. 86–90.
13. Ashbaugh N. Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface.— Intern. J. Fract., 1975, v. 11, № 2, p. 205–219.
14. Дарышин А. П., Саврук М. П. Предельное равновесие полуплоскости с произвольно ориентированной трещиной.— В кн.: Термомеханические методы разрушения горных пород. 4.2.: Тр. II Всесоюз. научн.-техн. конф. Киев: Наук. думка, 1972, с. 93–97.
15. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981, с. 322

Москва

Поступила в редакцию  
3.X.1985