МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1986

УДК 539.376

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

КИРСАНОВ М. Н.

Для описания неустойчивости вязких, или ползущих, сред существуют различные теории, основой которых является критерий неустойчивости. Несмотря на многочисленные варианты [1], до сих пор нет теории, удовлетворяющей всем требованиям адекватности явлению и практики расчета.

Можно выделить подходы, основанные на условных критериях устойчивости. Некоторые из них в связи с изучением особых точек процесса деформирования систематизированы в [2]. Под особой точкой понимается значение критического времени или связанной с ним деформации ползучести. Была обнаружена последовательность особых точек, названных точками псевдобифуркации, каждая из которых соответствует неустойчивости определенного, условного типа. Началом последовательности является точка псевдобифуркации нулевого порядка, отвечающая неединственности параметров состояния конструкции при единственности скоростей, что по существу совпадает с критерием Работнова — Шестерикова. Следующая особая точка (псевдобифуркация первого порядка) выражает критерий Куршина — потерю устойчивости при неединственности скоростей, но однозначности параметров состояния и их ускорений. Был предложен также эффективный способ выделения точек псевдобифуркаций и решения конкретных задач — метод упругого эквивалента. В [3] была высказана идея о том, что потеря устойчивости происходит лишь после прохождения системой не одной, а целого ряда точек псевдобифуркации. Однако достоверное число таких точек выбрать трудно, так как последовательность точек псевдобифуркации не ограничена сверху, а нижняя граница (псевдобифуркация нулевого порядка) дает неоправданно заниженное критическое время.

В публикуемой работе ставится задача выявить ограниченную последовательность особых точек процесса деформирования трехмерных тел в условиях ползучести, предел которой соответствует потере устойчивости. Ранее такая последовательность была обнаружена для одномерного случая [1]. За критерий неустойчивости принимается одновременная неединственность скоростей и ускорений деформаций и напряжений в конструкции.

В качестве примера решается задача об устойчивости шарнирно закрепленной цилиндрической оболочки при осевом сжатии.

1. Пусть ползучесть материала конструкции описывается соотношением [4]:

$$AS^{n-1}S_{ij}=\dot{p}_{ij}p^{\alpha} \tag{1.1}$$

где A, n, α — параметры материала, S_{ij} — девиатор тензора напряжений σ_{ij}, p_{ij} — деформация ползучести, S, p — интенсивности соответствующих величин, $\varepsilon_{kk}=0$ — условие несжимаемости, $S^2=S_{ij}S_{ij}$, $\dot{p}^2=\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}$.

Напомним, что точка псевдобифуркации N-го порядка определялась в [2, 3] из записанного в приращениях N раз продифференцированного по времени определяющего соотношения при условии $\Delta p_{ij}^{(N+1)}=0$, $\Delta p_{ij}^{(N)}\neq0$, $\Delta p_{ij}^{(N-1)}=0,\ldots$ $\Delta p_{ij}=0$, $\Delta p_{ij}^{(N)}=\Delta(d^Np_{ij}/dt^N)$ $\Delta S_{ij}^{(N+1)}=0$, $\Delta S_{ij}^{(N)}\neq0$, $\Delta S_{ij}^{(N-1)}=0,\ldots$ $\Delta S_{ij}=0$, где Δ — знак приращения.

Рассмотрим ситуацию, когда неединственны одновременно две последовательные производные по времени от напряжений и деформаций, т. е. не равны нулю приращения

$$\Delta p_{ij}^{(m+1)}\neq0,\quad \Delta p_{ij}^{(m)}\neq0,\quad \Delta S_{ij}^{(m+1)}\neq0,\quad \Delta S_{ij}^{(m)}\neq0 \tag{1.2}$$

[1] *Кирсанов М. Н.* Особые точки процесса деформирования и неустойчивость при ползучести. Воронеж, 1985.— 12 с. Деп. в ВИНИТИ 1.04.85; № 2205-85.

Если $m=0$, то это значит, что в момент потери устойчивости происходит скачкообразное изменение параметров напряженно-деформированного состояния системы и их скоростей, т. е. явление, более свойственное чисто упругим телам. Более ровному разветвлению решения отвечает значение $m=1$ — неединственность скоростей и ускорений, что положено в основу предлагаемого критерия.

Особую точку N-го порядка при условии (1.2) будем определять из системы двух уравнений, записанных в приращениях. Одно из них — определяющее соотношение, m раз продифференцированное по времени, другое — то же, продифференцированное $(N-1)$ раз. Таким образом, предложенный критерий отличается от подхода Куршина лишь тем, что в проварьированном соотношении приращения вторых производных параметров состояния не полагаются равными нулю, а определяются на основе дополнительного уравнения. Наибольший порядок производных, входящих в это дополнительное уравнение, будем называть порядком особой точки.

Продифференцируем определяющее соотношение (1.1):

$$A(n-1)S^{n-2}\dot{S}S_{ij}+AS^{n-1}\dot{S}_{ij}-\alpha p^{\alpha-1}\dot{p}\dot{p}_{ij}-p^{\alpha}\ddot{p}_{ij}=0 \tag{1.3}$$

Запишем это уравнение в приращениях, учитывая (1.2) и предположение о постоянстве напряжений в докритическом состоянии

$$\begin{gathered} A(n-1)S^{n-2}S_{ij}\Delta\dot{S}+AS^{n-1}\Delta\dot{S}_{ij}-p^{\alpha}\Delta\ddot{p}_{ij}- \\ -\alpha p^{\alpha-1}\dot{p}\Delta\dot{p}_{ij}-\alpha p^{\alpha-1}\dot{p}_{ij}\Delta\dot{p}=0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Преобразуем (1.4), используя очевидные равенства $S\Delta\dot{S}=S_{mn}\Delta\dot{S}_{mn}$, $\dot{p}\Delta\dot{p}=\dot{p}_{mn}\Delta\dot{p}_{mn}$. Получим

$$\begin{gathered} \Delta\dot{S}_{mn}/S(\delta_{im}\delta_{jn}+(n-1)S_{mn}S_{ij}/S^2)- \\ -\alpha/p\Delta\dot{p}_{mn}(S_{mn}S_{ij}/S^2+\delta_{im}\delta_{jn})-\Delta\ddot{p}_{ij}/\dot{p}=0 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Выведем второе уравнение системы. Заметим, что из (1.3) при $\dot{S}_{ij}=0$ следует $\ddot{p}_{ij}p=-\alpha\dot{p}\dot{p}_{ij}$, $\ddot{p}\mathbf{p}=-\alpha\dot{p}^2$. Аналогично из дважды продифференцированного соотношения (1.1) выведем

$$\dddot{p}_{ij}p^2=\alpha(1+2\alpha)\dot{p}^2\dot{p}_{ij},\qquad \dddot{p}p^2=\alpha(1+2\alpha)\dot{p}^3 \tag{1.6}$$

Можно получить обобщение последних формул на случай $(N-1)$-кратного дифференцирования (1.1):

$$\begin{gathered} p_{ij}^{(N)}p^{N-1}=(-1)^{N+1}\dot{p}^{N-1}\dot{p}_{ij}\alpha(1+2\alpha)\ldots(N-2+\alpha(N-1)) \\ p^{(N)}p^{N-1}=(-1)^{N+1}\dot{p}^{N}\alpha(1+2\alpha)\ldots(N-2+\alpha(N-1)) \end{gathered} \tag{1.7}$$

Варьируя определяющее соотношение, $(N-1)$ раз продифференцированное по времени, и используя при этом (1.2) и (1.7), имеем

$$\begin{gathered} \Delta\ddot{p}_{mn}p(^1/_2(N-2)S_{ij}S_{mn}/S^2+\delta_{im}\delta_{jn})= \\ =(N-2+\alpha(N-3))\dot{p}\Delta\dot{p}_{mn}(S_{mn}S_{ij}/S^2+\delta_{im}\delta_{jn}/(N-1)) \end{gathered} \tag{1.8}$$

Разрешим это уравнение относительно $\Delta\ddot{p}_{mn}$:

$$\Delta\ddot{p}_{ij}=\dot{p}\Delta\dot{p}_{mn}/p(S_{mn}S_{ij}/S^2+\delta_{im}\delta_{jn})(N-2+\alpha(N-3))/(N-1) \tag{1.9}$$

Таким образом получено выражение для $\Delta\ddot{p}_{ij}$, входящего в (1.5). Подставим (1.9) в (1.5) и, заменяя $\Delta\dot{p}_{ij}$ на $\Delta\dot{\varepsilon}_{ij}-{}^1/_2\Delta\dot{S}_{ij}/G$, разрешим полученное уравнение относительно $\Delta\dot{S}_{ij}$:

$$\Delta\dot{S}_{ij}=\Psi(\delta_{im}\delta_{jn}+KS_{mn}S_{ij}/S^2)\Delta\dot{\varepsilon}_{mn} \tag{1.10}$$

$$\Psi=2G\omega/(2\xi_N+\omega),\quad K=\xi_N(2-n)/(n\xi_N+\omega) \tag{1.11}$$

$$\omega=S/S^*,\quad \xi_N=Gp/(S^*(1+2\alpha))(N-1)/(N-2)$$

где S^* — эйлерова критическая нагрузка соответствующей упругой конструкции. Следуя методу упругого эквивалента, представим (1.10) в форме закона Гука для анизотропной среды (G_{ijmn} — матрица упругого эквивалента):

$$\Delta S_{ij}^{\bullet}=2G_{ijmn}\Delta\varepsilon_{mn}^{\bullet} \qquad (1.12)$$

$$G_{ijmn}={}^1/_2\Psi(\delta_{im}\delta_{jn}+KS_{mn}S_{ij}/S^2)$$

Очевидно, решение задачи устойчивости, полученное на основе упругого эквивалента (1.12), даст сходящуюся последовательность особых точек процесса деформирования, так как $\lim \xi_N=Gp/(S^*(1+2\alpha))=\xi$ при $N\to\infty$.

Потеря устойчивости связана с прохождением системой в процессе деформирования всей последовательности особых точек, т. е. с достижением предельного значения приведенного параметра ползучести ξ.

2. Для плоского напряженного состояния, в котором находится тонкостенная конструкция, $\sigma_{33}=0$, поэтому справедливы формулы

$$\Delta\sigma_{ij}^{\bullet}=\Delta S_{ij}^{\bullet}+\Delta S_{kk}^{\bullet}\delta_{ij},\quad \Delta\sigma_{ij}^{\bullet}=E_{ijmn}\Delta\varepsilon_{mn}\quad (i,j,m,n,k=1,2) \qquad (2.1)$$

Используя первое равенство (2.1) и условие несжимаемости, получим из (1.12):

$$E_{ijmn}=2(G_{ijmn}+G_{kkmn}\delta_{ij})=\Psi(\delta_{im}\delta_{jn}+\delta_{ij}\delta_{mn}+K\sigma_{mn}\sigma_{ij}/S^2) \qquad (2.2)$$

Связь напряжений и деформаций (1.12) получена в скоростях. Поэтому уравнения устойчивости цилиндрической оболочки при однородном докритическом состоянии [5] запишем в продифференцированном виде, используя условия $\Delta W=0$, $\sigma_{ij}^{\bullet}=0$:

$$\Delta M^{\bullet}_{ij,\,ij}+T_{ij}\Delta W_{,ij}^{\bullet}+T_{22}^{\bullet}/R=0 \qquad (2.3)$$

$$\Delta\dot\varepsilon_{1,22}+\Delta\dot\varepsilon_{2,11}-\Delta\dot\gamma_{,12}+\Delta\dot W_{,11}/R=0$$

где ΔW — прогиб оболочки, R — радиус, M_{ij} и T_{ij} — моменты и усилия, ε_1, ε_2, γ — деформации срединной поверхности.

При осевом сжатии шарнирно закрепленной по торцам оболочки усилиями Q все компоненты тензора напряжений, кроме σ_{11}, равны нулю. Выпишем ненулевые элементы матрицы E_{ijmn}:

$$E_{1111}=\Psi(2+{}^3/_2K),\quad E_{2222}=2\Psi \qquad (2.4)$$

$$E_{1212}=E_{2121}=E_{1122}=E_{2211}=\Psi$$

В случае осесимметричной формы потери устойчивости оболочки из (2.3) и (2.4) следует

$${}^1/_{12}\Psi h^3(2+{}^3/_2K)\Delta\dot W_{,1111}+Q\Delta\dot W_{,11}+ \qquad (2.5)$$

$$+3\Psi h(K+1)\Delta W^{\bullet}/[R^2(2+{}^3/_2K)]=0$$

Скорость прогиба $\Delta W^{\bullet}$ представим в обычном виде: $\Delta W^{\bullet}=f\sin\lambda x_1$, $\lambda=m_1\pi/l$. Из условия $f\neq0$ получим характеристическое уравнение

$${}^1/_{12}\Psi h^3(2+{}^3/_2K)^2\lambda^4-Q(2+{}^3/_2K)\lambda^2+3\Psi h(K+1)/R^2=0 \qquad (2.6)$$

Минимизируя Q по λ при фиксированном значении ξ, имеем

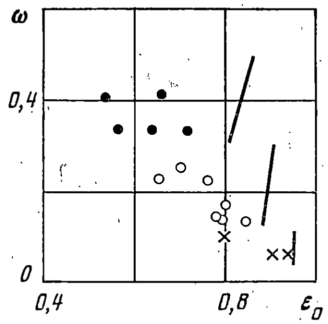
$$\lambda^2=6(K+1)^{1/2}/[Rh(2+{}^3/_2K)] \qquad (2.7)$$

Найденное значение λ подставим в (2.6); тогда получим $Q=\Psi h^2(K+1)^{1/2}/R$ или с учетом (1.11):

$$4n\xi^3+4\omega(n+1)\xi^2+(\omega^2(n+4)-2)\xi+\omega(\omega^2-1)=0 \qquad (2.8)$$

Это уравнение имеет приближенное решение $\xi=(1-\omega)/(2n)^{1/2}$. Обозначим $\varepsilon_0=\varepsilon_{11}E/\sigma_{11}^*$, $\sigma_{11}^*={}^2/_3Eh/R$. В результате зависимость приведенных критических напряжений ω и деформаций ε_0 примет вид

$$\varepsilon_0=2(1+2\alpha)(1-\omega)/(2n)^{1/2}+\omega \qquad (2.9)$$



На фигуре сопоставлены экспериментальные данные [6] и решение (2.9). Темными точками обозначены результаты испытаний на устойчивость оболочек из сплава Д16АТ при 257° С, светлыми точками — при 307° С, крестами — при 347° С. Так как показатель n, входящий в степенной закон ползучести, зависит от температуры то соотношение (2.9) представлено тремя отрезками прямых: $n=15$ при 257° С, $n=11$ при 307° С, $n=9$ при 347° С [7]. Параметр упрочнения α взят равным 0,5.

Предложенное решение удовлетворительно (с некоторым завышением критической деформации) описывает эксперимент (фигура), несмотря на то, что в предложенной теории не были учтены начальные несовершенства оболочек, выбор которых в известных подходах является одной из основных трудностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куршин Л. М.* О постановках задачи устойчивости в условиях ползучести (обзор).— В кн.: Проблемы теории пластичности и ползучести. М.: Мир, 1979, с. 246—302.
2. *Клюшников В. Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
3. *Клюшников В. Д.* К вопросу устойчивости течения сложных сред.— В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984, с. 122—135.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
6. *Баранов А. Н., Морозов М. А.* Экспериментальное исследование критической деформации цилиндрических оболочек в условиях ползучести.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1, с. 114—118.
7. *Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.* Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 222 с.

Воронеж

Поступила в редакцию 17.VI.1985