

УДК 539.376

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТОНКОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

ГРИШИН С. А., МАНЖИРОВ А. В.

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи о вдавливании гладких жестких штампов с плоским основанием в поверхность тонкого по сравнению с размерами области контакта слоя, лежащего без трения на недеформируемом основании. На штампы действуют постоянные центрально-приложенные силы. Строятся приближенные решения задач в случае, когда слой находится в условиях установившейся нелинейной ползучести. Проводится их численный анализ.

1. Проникающее и краевое решения плоской задачи. При установившейся нелинейной ползучести определяющие соотношения в некотором ортонормированном базисе имеют вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= (\sigma_u / \epsilon_u) e_{ij}, \quad \sigma_u = F(\epsilon_u), \quad \epsilon_{hh} = 0 \\ \sigma_u^2 &= 1/2 s_{ij} s_{ij}, \quad \epsilon_u^2 = 1/2 e_{ij} e_{ij} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где s_{ij} , e_{ij} — компоненты девиаторов напряжений и скоростей деформации, а F — известная функция, аппроксимируемая обычно степенной зависимостью [1—5] (K , μ — постоянные):

$$F(\epsilon_u) = K \epsilon_u^\mu \quad (1.2)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу о плоской деформации тонкого слоя, описываемого уравнениями состояния (1.1), (1.2) и лежащего без трения на жестком основании. На слой действует распределенная нормальная нагрузка (фиг. 1, q). Уравнения равновесия и соотношения Коши имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} &= 0, \quad \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0 \\ \epsilon_{xx} &= u_{x,x}, \quad \epsilon_{xy} = 1/2 (u_{x,y} + u_{y,x}), \quad \epsilon_{yy} = u_{y,y} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Граничные условия будут следующими:

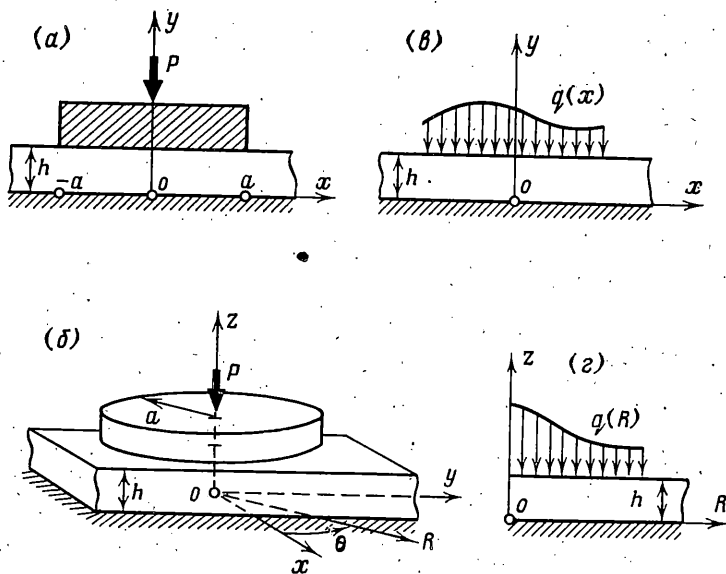
$$\begin{aligned} y=h: \quad \sigma_{yy} &= q(x), \quad \sigma_{xy} = 0 \\ y=0: \quad u_y &= 0, \quad \sigma_{xy} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

В области незначительного изменения нагрузки можно положить [6, 7] $\sigma_{xy} = \psi_1(x) + y\psi_2(x)$. Тогда, удовлетворяя части граничных условий (1.4), получим $\sigma_{xy} = \epsilon_{xy} = 0$. Из уравнений равновесия (1.3), граничных условий (1.4), определяющих соотношений (1.1) с учетом последнего равенства найдем (σ — гидростатическое давление):

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= q(x), \quad \sigma_{xx} = f(y), \quad \sigma_{xx} = \sigma + K \epsilon_u^{\mu-1} \epsilon_{xx} \\ \sigma &= q(x) - K \epsilon_u^{\mu-1} \epsilon_{yy}, \quad q(x) = K \epsilon_u^{\mu-1} (\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}) + f(y) \end{aligned} \quad (1.5)$$

где функцию $f(y)$ следует положить равной нулю из соображений затухания напряжений при $x \rightarrow \infty$.

Учитывая, что $\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy}$ и $\epsilon_{xy} = 0$, найдем $\epsilon_u = |\epsilon_{yy}|$. Разрешая последнее соотношение (1.5) относительно ϵ_{yy} с учетом (1.3), (1.4), получим выра-



Фиг. 1

жение для скорости вертикального перемещения

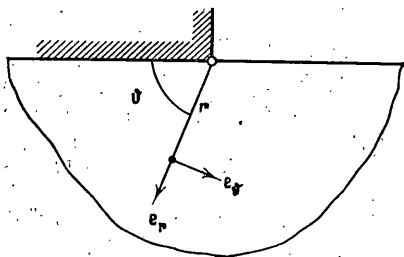
$$u_y = y(2K)^{-m} [|q(x)|]^m \operatorname{sgn}(q(x)), \quad m=1/\mu \quad (1.6)$$

Отметим, что решение поставленной задачи можно получить для любого закона связи σ_u и ε_u , для которого существует функция, обратная F в (1.1). Так, например, для закона Эмбера [8], примененного к скоростям деформации, $\varepsilon_u = \exp(n\sigma_u) - 1$, $n = \text{const}$ формула для u_y примет вид $u_y = y(\exp(|^{1/2}q(x)n|) - 1) \operatorname{sgn}(q(x))$, а для закона Надаи [9] при установившейся ползучести будем иметь (ε_0, σ_0 — постоянные):

$$\varepsilon_u = \varepsilon_0 \operatorname{sh}(\sigma_u/\sigma_0),$$

$$u_y = y\varepsilon_0 \operatorname{sh}(|q(x)/2\sigma_0|) \operatorname{sgn}(q(x))$$

Формула (1.6) получена в предположении о незначительном изменении нагрузки q и, следовательно, неверна вблизи угла штампа в исходной задаче фиг. 1, а, поэтому решение на ее основе может быть использовано только в качестве проникающего. Опишем процесс построения краевого решения, аналогичный [10–12].



Фиг. 2

Рассмотрим задачу о вдавливании без трения жесткой четверть-плоскости в деформируемую полуплоскость, подчиняющуюся уравнениям (1.1), (1.2) (фиг. 2). Чтобы исследовать напряжения вблизи угла, ищем функцию Эри в виде главного члена ее асимптотического разложения по степеням r : $\Phi = Qr^s \varphi(\theta)$. Условие совместности Сен-Венана с использованием (1.1), (1.2) приводит к следующему нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно $\varphi(\theta)$ на отрезке $[0, \pi]$ (штрихом обозначено дифференцирование по θ):

$$\left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} - m(s-2)[m(s-2)+2] \right\} \{\sigma_i^{m-1}(\varphi'' + s(2-s)\varphi)\} + \quad (1.7)$$

$$+ 4(s-1)[m(s-2)+1] \{\sigma_i^{m-1}\varphi'\}' = 0$$

$$\sigma_i = [^{1/4}(\varphi'' + s(2-s)\varphi)^2 + (1-s)^2\varphi'^2]^{1/2}$$

Граничные условия скользящей заделки при $\vartheta=0$ дают

$$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0 \quad (1.8)$$

а условия свободной поверхности при $\vartheta=\pi$:

$$\varphi(\pi) = \varphi'(\pi) = 0 \quad (1.9)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния окрестности угла требуется найти нетривиальное решение краевой задачи (1.7), (1.8), (1.9), что возможно только при некоторых значениях s , так как левые части (1.7), (1.8), (1.9) суть однородные функции аргумента (φ , φ' , φ'' , φ''' , φ^{IV}). Нормировав $\varphi(\vartheta)$, например так, чтобы

$$\varphi(0) = -1 \quad (1.10)$$

и задавая произвольно

$$s=A, \quad \varphi''(0)=B \quad (1.11)$$

можно решать задачу Коши (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) численно, методом Рунге — Кутта, получая всякий раз некоторые значения $\varphi(\pi)=C$, $\varphi'(\pi)=D$. Методом Ньютона удается найти такие A и B , чтобы $C=D=0$, и удовлетворить тем самым граничным условиям (1.9). Таким образом, главный член асимптотики функции Эри в окрестности угла находится с точностью до множителя Q .

Эффективное по всей области контакта решение задачи фиг. 1, а может быть получено путем сращивания проникающего решения с краевым (п. 3).

2. Проникающее и краевое решения осесимметричной задачи. Перейдем к решению осесимметричной вспомогательной задачи о действии нормальной нагрузки на тонкий слой, лежащий без трения на недеформируемом основании (фиг. 1, з). В цилиндрической системе координат соотношения (1.1) запишутся в форме

$$\begin{aligned} \sigma_R - \sigma &= (\sigma_u / \varepsilon_u) \varepsilon_R, \quad \sigma_\theta - \sigma = (\sigma_u / \varepsilon_u) \varepsilon_\theta, \quad \sigma_z - \sigma = (\sigma_u / \varepsilon_u) \varepsilon_z \\ \tau_{Rz} &= (\sigma_u / \varepsilon_u) \varepsilon_{Rz}, \quad \varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0, \quad \sigma = 1/3(\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_z) \\ \sigma_u &= 1/\sqrt{6} [(\sigma_R - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_R)^2 + 6\tau_{Rz}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где σ_u и ε_u связаны законом (1.2). Уравнения равновесия, соотношения Коши и граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{R,R} + \tau_{Rz,z} + (\sigma_R - \sigma_\theta)/R &= 0, \quad \tau_{Rz,R} + \sigma_{z,z} + \tau_{Rz}/R = 0 \\ \varepsilon_R = u_{R,R}, \quad \varepsilon_\theta = u_{R,R}/R, \quad \varepsilon_z = u_{z,z}, \quad \varepsilon_{Rz} = 1/2(u_{R,z} + u_{z,R}) \\ z=h: \quad \sigma_z &= q(R), \quad \tau_{Rz} = 0 \\ z=0: \quad u_z &= 0, \quad \tau_{Rz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Построим приближенное решение задачи в области, где изменение $q(R)$ мало. Представляя касательное напряжение в виде [6]:

$$\tau_{Rz} = \psi_3(R) + Z\psi_4(R) \quad (2.3)$$

получим $\tau_{Rz} = \varepsilon_{Rz} = 0$. Тогда из (2.2) следует $\sigma_z = q(R)$, откуда с учетом (1.1) имеем

$$\sigma = q(R) - K\varepsilon_u^{\mu-1}\varepsilon_z, \quad \sigma_R = q(R) + K\varepsilon_u^{\mu-1}(2\varepsilon_R + \varepsilon_\theta) \quad (2.4)$$

Подставляя (2.1), (2.4) в первое уравнение равновесия (2.2), получим (штрихом обозначено дифференцирование по R):

$$q' + [K\varepsilon_u^{\mu-1}(2\varepsilon_R + \varepsilon_\theta)]' + K\varepsilon_u^{\mu-1}(\varepsilon_R - \varepsilon_\theta)/R = 0 \quad (2.5)$$

Найдем приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения (2.5). Можно показать, что $\varepsilon_R = \varepsilon_\theta + O(h^2)$, если $q(R)$ меняется мало и имеет место (2.3). С другой стороны, $\varepsilon_\theta' = (\varepsilon_R - \varepsilon_\theta)/R$. Тогда из (2.5) получим

$$q' + [3\mu + 1] K\varepsilon_u^{\mu-1} |\varepsilon_\theta|^{1/2} \varepsilon_\theta' = 0 \quad (2.6)$$

Поскольку $\mu|\varepsilon_0|^{\mu-1}\varepsilon_0' = [|\varepsilon_0|\varepsilon_0|^{\mu-1}]'$, из (2.6) следует, что

$$q + (3\mu + 1)\mu^{-1}K3^{(\mu-1)/2}|\varepsilon_0|^\mu \operatorname{sgn}(\varepsilon_0) = 0 \quad (2.7)$$

Здесь функция интегрирования положена равной нулю из соображений отсутствия напряжений и скоростей деформации при $R \rightarrow \infty$. Решая (2.7) и учитывая последнее условие (2.2), для скорости вертикального перемещения точек слоя получим

$$u_z = 2ZK^{-m}(3\mu + 1)^{-m}[\mu|q(R)|3^{(1-\mu)/2}]^m \operatorname{sgn}(q(R)) \quad (2.8)$$

Отметим, что коэффициенты при нагрузке в формулах (1.6) и (2.8) различны. Только в линейном случае $m = \mu = 1$ они равны и совпадают с известными [6]. Приближенное решение плоской задачи (1.6) было представлено в [10] и его можно получить на основе [7]. Здесь развит более общий подход, позволивший решить и осесимметричную задачу.

Покажем теперь, как можно построить асимптотику полей напряжений, скоростей деформации и перемещений в окрестности ребра штампа в осесимметричном случае. Подставляя соотношения Коши $\varepsilon_R = u_{R,R}$, $\varepsilon_\theta = -u_R/R$, $\varepsilon_z = u_{z,z}$ в условие несжимаемости $\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$, умножая на R и группируя слагаемые, получим $(Ru_R)_{,R} + (Ru_z)_{,z} = 0$.

Отсюда видно, что существует функция $X(R, Z)$, такая, что

$$u_R = -X_{,z}/R, \quad u_z = X_{,R}/R.$$

Пользуясь (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), можно выразить через X все компоненты тензора скоростей деформации, интенсивности скоростей деформации и напряжений, компоненты девиатора напряжений. Исключая из уравнений равновесия (2.2) слагаемые, содержащие гидростатическое давление, получим уравнение, связывающее только компоненты девиатора напряжений

$$s_{R,RZ} + s_{RZ,ZZ} + (s_{R,z} - s_{\theta,z} - s_{RZ,R})/R - s_{RZ,RR} - s_{ZZ,RZ} + s_{RZ}/R^2 = 0$$

Остается подставить сюда выражения s_{ij} через X , перейти к локальным полярным координатам (r, θ) в меридиональной плоскости с началом в углу штампа, представить $X(R(r, \theta), Z(r, \theta))$ аналогично п. 1 в виде $X = Q_1 r^{\mu} \varphi_1(\theta)$, чтобы получить обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $\varphi_1(\theta)$ — аналог уравнения (1.7). Для определения s_i придется численно решать задачу, аналогичную (1.7) — (1.9), но значительно более громоздкую.

3. Срачивание решений. Здесь на примере плоской контактной задачи срастим проникающее решение с краевым на неизвестном расстоянии ε от угла штампа и, тем самым, построим решение, справедливое во всей области контакта. Две неопределенные константы Q и ε позволяют осуществить срачивание из условий непрерывности контактного давления на расстоянии ε от угла под штампом и непрерывности скорости свободной поверхности на расстоянии ε от угла вне штампа. При этом касательные напряжения равны нулю всюду на верхнем основании слоя, скорость осадки штампа $\delta = \text{const}$, нормальные напряжения на свободной поверхности равны нулю, склеенное контактное давление удовлетворяет условию статики. В [10] срачивание из таких условий применено для плоской задачи о вдавливании штампа в полуплоскость и указана возможность его осуществления в данной задаче.

Введем следующие безразмерные обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda &= h/a, \quad x^* = x/a, \quad y^* = y/a, \quad \varepsilon^* = \varepsilon/a \\ \varepsilon_{ij}^* &= \varepsilon_{ij} t_0, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} t_0^\mu / K, \quad \delta^* = \delta t_0 / a, \quad p^* = p t_0^\mu / K \\ q^*(x^*) &= q(x) t_0^\mu / K, \quad P^* = P t_0^\mu / Ka, \quad Q^* = Q t_0^\mu / K \end{aligned} \quad (3.1)$$

где a — полуширина площадки контакта, t_0 — масштаб времени. Индекс * всюду далее опускаем.

Так как скорость осадки штампа — постоянная величина, то, как это видно из (1.6), контактное давление вдали от края также постоянно.

m	$-\varphi''(\pi)$	$\varphi'''(\pi)$	m	$-\varphi''(\pi)$	$\varphi'''(\pi)$	m	$-\varphi''(\pi)$	$\varphi'''(\pi)$
1,1	0,003	1,237	1,4	0,042	1,575	1,9	0,164	1,275
1,15	0,005	1,431	1,5	0,067	1,522	2,0	0,185	1,223
1,2	0,007	1,573	1,6	0,091	1,468	2,33	0,247	1,059
1,25	0,013	1,585	1,7	0,117	1,402	2,66	0,296	0,932
1,3	0,022	1,589	1,8	0,141	1,337	3,0	0,332	0,842

Обозначим его значение через p . Вблизи края контактное давление определяется локальным решением

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(r, 0) = \Phi_{,rr}|_{\vartheta=0} = -Qs(s-1)r^{s-2} \quad (3.2)$$

Склеенное контактное давление должно быть статически эквивалентно действующей на штамп нагрузке, что с учетом разнонаправленности координатных реперов запишется в виде

$$\int_0^{1-\varepsilon} p dx + Qs(s-1) \int_{\varepsilon}^0 r^{s-2} dr = \frac{P}{2} \quad (3.3)$$

Требование непрерывности контактного давления при $\vartheta=0$, $r=\varepsilon$ приводит к уравнению

$$p = -Qs(s-1)\varepsilon^{s-2} \quad (3.4)$$

Скорость осадки свободной поверхности вблизи края имеет вид [10]

$$u_{\vartheta}(r, \pi) = -\delta + Q^m(m+1)^2 2^{-m} r^{1/(m+1)} |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi) \quad (3.5)$$

Вдали от края эта величина равна нулю, поэтому требование ее непрерывности запишется в форме

$$\delta = Q^m(m+1)^2 2^{-m} \varepsilon^{1/(m+1)} |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi) \quad (3.6)$$

С другой стороны, δ может быть найдена из проникающего решения. Согласно (1.6), (3.4), (3.1):

$$\delta = 2^{-m} \lambda Q^m (s(s-1))^m \varepsilon^{m(s-2)} \quad (3.7)$$

Приравняв правые части (3.5), (3.6), получим

$$\varepsilon = \lambda s^m (s-1)^m [(m+1)^2 |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi)]^{-1} \quad (3.8)$$

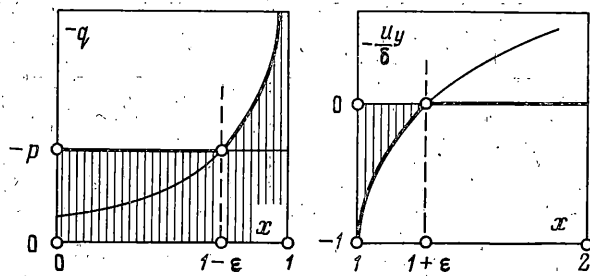
В правой части последнего выражения λ , m известны по условиям задачи, s определяется формулой $s = (2m+1)/(m+1)$ [11], величины $\varphi''(\pi)$ и $\varphi'''(\pi)$ находятся численно методом, изложенным в п. 1, как значения в точке $\vartheta=\pi$ соответствующих производных решения краевой задачи (1.7)–(1.9) и приведены в таблице.

Тем самым ε выражено через известные величины. Формула (3.7) показывает, что ширина зоны краевого эффекта зависит только от толщины слоя λ (причем, линейно) и от показателя нелинейности закона поведения m . Множитель при λ в (3.7) может, вообще говоря, быть больше единицы, что противоречит смыслу величины ε . Для таких значений m метод неприменим.

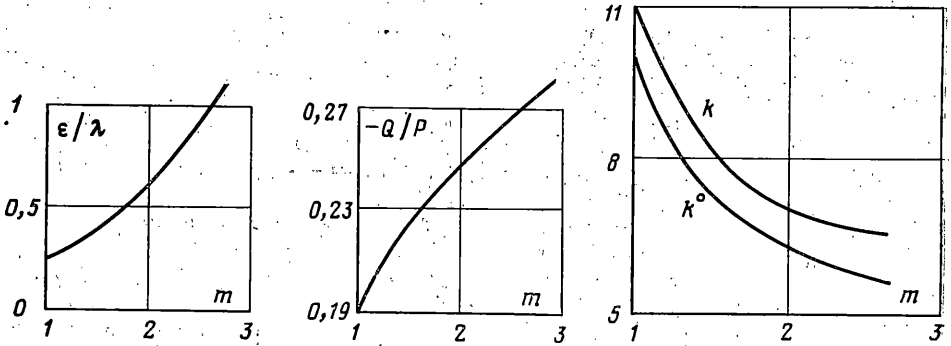
Подставляя (3.4) в (3.3), получим выражение Q через ε и P :

$$Q = -P \varepsilon^{1/(m+1)} (m+1) [2s(m+\varepsilon)]^{-1} \quad (3.9)$$

Отсюда видно, что зависимость множителя Q в функции Эри (и уровня нагрузки в зоне постоянного контактного давления) от вдавливающей силы P линейна с коэффициентом, зависящим от λ и m . При всех λ и $m \geq 1$, таких, что $\varepsilon \leq \lambda$, этот коэффициент положителен, т. е. условие полного контакта штампа со слоем выполняется. Если задана сила P и требуется определить скорость осадки δ , то нужно последовательно воспользоваться формулами (3.7), (3.8), (3.6). Их же достаточно для определения вдавливающей силы по известной скорости осадки.



Фиг. 3



Фиг. 4

Выпишем явные выражения для коэффициента постели — множителя, связывающего вдавливающую силу со скоростью осадки штампа в степени μ : $-P = k\delta^\mu$, $k = \lambda^{-\mu} (m + \epsilon)/m$. Коэффициент постели, полученный на основе только проникающего решения, имеет вид $k^\circ = 4\lambda^{-\mu}$.

В линейном случае $\epsilon = \lambda/4$, $Q = -4/3 P \sqrt{\lambda}/(4 + \lambda)$, $k = (4 + \lambda)/\lambda$, $k^\circ = 4/\lambda$.

Отметим, наконец, два очевидных свойства построенного решения. Если $\lambda \rightarrow 0$, а ширина штампа и сила, действующая на него, остаются постоянными, то распределение давления под штампом стремится к постоянному, а $\delta \rightarrow 0$ со скоростью λ . Если же $\lambda \rightarrow 0$ за счет возрастания ширины штампа, то δ останется постоянной, если увеличивать P со скоростью $\lambda^{-\mu}$.

Качественные графики контактного давления и скорости осадки свободной поверхности слоя вне штампа изображены на фиг. 3.

Рассмотрим пример. Отожженная углеродистая сталь при температуре 649°C в диапазоне нагрузок $3 \div 18$ МПа подчиняется закону (1.2) с параметрами $m = 1,7$, $A = 1/K^m = 1,67 \cdot 10^{-11}$ (МПа) $^{-m}$ с $^{-1}$ [13]. Положим $h = 0,1$ м, $a = 0,25$ м, $t_0 = 3600$ с, $-P/2a = 10$ МПа. Проведем расчеты, получим: $\epsilon = 0,1836$, $Q = 2,66 \cdot 10^{-4}$, $k = 7,601$, $k^\circ = 6,857$, $\delta = 3,117 \cdot 10^{-7}$, $p = -5,1 \cdot 10^{-4}$. В размерных величинах: $\epsilon = 4,59 \cdot 10^{-2}$ м, $Q = -4,695$ МПа, $\delta = 2,17 \cdot 10^{-11}$ м/с, $p = -9$ МПа. Задача имеет три определяющих безразмерных параметра: m , λ , P . Зависимость решения от λ и P видна из (3.7), (3.8). Менее очевидные зависимости ϵ/λ , $-Q/P$, k , k° от $m \in [1, 3]$ для нашего примера приведены на фиг. 4.

Заметим, что построенные приближенные решения исключают возможность отрыва штампа от слоя всюду (так как контактные давления сжимающие) и слоя от недеформируемого основания всюду под штампом, кроме, быть может, малых окрестностей под крайними точками. Состояние слоя вне штампа не исследуется.

Изложенное может быть применено к задачам пластичности со степенным упрочнением и упругости для материалов, подчиняющихся закону Бернулли [8].

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна и В. М. Александрова за помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 398 с.
3. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
4. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901—924.

5. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Кручение тела вращения в условиях установившейся ползучести.— Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 4, с. 103—114.
6. Манжиров А. В. Плоские и осесимметричные задачи о действии нагрузок на тонкий неоднородный вязкоупругий слой.— ПМТФ, 1983, № 5, с. 153—158.
7. Сумбатьян М. А. Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 1, с. 35—42.
8. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. I. Малые деформации. М.: Наука, 1984. 596 с.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1948. 376 с.
10. Александров В. М., Сумбатьян М. А. Об одном решении контактной задачи нелинейной установившейся ползучести для полуплоскости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 1, с. 107—113.
11. Hutchinson J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material.— J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, № 1, p. 13—32.
12. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
13. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965. 856 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.XI.1985