

УДК 539.374

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

ДРОЗДОВ А. Д., СОЛОМЕНЦЕВ Ю. Е.

Предложен метод исследования устойчивости нелинейно-вязкоупругих тел [1] при малых деформациях и больших углах поворота. Определение устойчивости вязкоупругих тел на бесконечном интервале времени соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Анализ устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих тел содержится в [2-5]. Получены условия устойчивости вязкоупругого сферического слоя, находящегося под действием температурных напряжений.

1. Определяющие соотношения. Рассмотрим деформацию неоднородно стареющего нелинейно-вязкоупругого тела. До деформации тело находится в натуральном состоянии и занимает область D с кусочно-гладкой границей Γ . Абсолютная температура тела постоянна и равна T_0 . В момент времени $t=0$ к телу прикладываются внешние усилия и тепловые воздействия. В актуальном состоянии в момент времени $t \geq 0$ тело занимает область $D(t)$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma(t)$. Абсолютная температура $T_*(t, \xi) = T_0 + T(t, \xi)$, где $T(t, \xi) \geq 0$, $\xi = (\xi_i)$ — лагранжевы координаты точек тела.

Обозначим через $r(\xi)$ радиус-вектор точки ξ в начальном состоянии, а через $R(t, \xi)$ — радиус-вектор точки ξ в актуальном состоянии в момент времени t . Возраст материала в окрестности точки ξ в момент времени $t=0$ обозначим через $\rho(\xi)$. Функция ρ — кусочно непрерывная и ограничена. Базисные векторы лагранжевой системы координат в начальном и актуальном состоянии равны соответственно g_i, G_i . Через g^i, G^i обозначим векторы взаимного базиса, через $g_{ij}, g^{ij}, G_{ij}, G^{ij}$ — ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров в начальном и актуальном состояниях, а через ε_{ij} — компоненты тензора Альманзи $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij})$. Эти величины связаны с компонентами вектора перемещений $u = R - r = u_i G^i$ соотношениями

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_i u^m \nabla_j u_m \quad (1.1)$$

где ∇_i означает ковариантную производную по аргументу ξ_i в базисе актуального состояния. По повторяющимся индексам производится суммирование.

Через σ^{ij} обозначим компоненты тензора напряжений Коши в базисе актуального состояния. Пусть внешняя нагрузка прикладывается достаточно медленно и силами инерции можно пренебречь. Тогда справедливы уравнения равновесия

$$\nabla_i \sigma^{ij} + \Phi^j = 0 \quad (1.2)$$

где $\Phi = \Phi^i G_i$ — вектор массовых сил, действующих на единицу объема в актуальном состоянии.

При малых деформациях и малых изменениях температуры, но произвольных углах поворота, компоненты тензора напряжений связаны с компонентами тензора деформаций и температурой соотношениями [1, 2]:

$$\sigma^{ij} = 2G(I - Q_1 - Q_2(e_u^2))e^{ij}, \quad \sigma = K(\Theta - 3\alpha T) \quad (1.3)$$

где G — постоянный модуль сдвига, K — постоянный модуль объемного

сжатия, e^{ij} , s^{ij} — компоненты девиаторов тензоров деформаций и напряжений, $\alpha > 0$ — коэффициент линейного теплового расширения, $\Theta = G^{ij}e_{ij}$, $e_u^2 = e^{ij}e_{ij}$, $\sigma = \frac{1}{3}G^{ij}\sigma_{ij}$, I — единичный оператор, Q_1 , Q_3 — операторы релаксации

$$Q_1 e^{ij} = \int_0^t Q_1'(t+\rho(\xi), \tau+\rho(\xi), T_*(t, \xi), T_*(\tau, \xi)) e^{ij}(\tau, \xi) d\tau \quad (1.4)$$

$$Q_3(e_u^2) e^{ij} = \int_0^t Q_3'(t+\rho(\xi), \tau+\rho(\xi), T_*(t, \xi), T_*(\tau, \xi)) e_u^2(\tau, \xi) e^{ij}(\tau, \xi) d\tau$$

Для упругонесжимаемого материала

$$\Theta = 3\alpha T \quad (1.5)$$

а уравнения состояния принимают вид ($-p$ — давление)

$$\sigma^{ij} = pG^{ij} + 2G(I - Q_1 - Q_3(e_u^2))e^{ij} \quad (1.6)$$

Зависимость ядер релаксации от температуры определяется по формулам [6]:

$$Q_i'(t, \tau, T_*(t), T_*(\tau)) = Q_i^*(t, \tau) f_i(T_*(\tau), T_*(t)), \quad i=1, 3 \quad (1.7)$$

где $Q_i^*(t, \tau)$ — ядра релаксации, определяемые в изотермических опытах при температуре T_0 , f_i — некоторые функционалы. В частном случае можно принять

$$f_i(T_*(t), T_*(\tau)) = 1 + \int_0^t L_i(t, \tau) \left(\frac{T_*(\tau) - T_0}{T} \right)^{\kappa_i} d\tau$$

где $L_i(t, \tau)$ — заданные неотрицательные функции своих аргументов.

Далее предполагается, что: 1) существуют такие ядра релаксации $Q_i^0(t, \tau)$, $i=1, 3$, что для любых ξ $Q_i^*(t+\rho(\xi), \tau+\rho(\xi)) \leq Q_i^0(t, \tau)$; 2) функции $Q_i^0(t, \tau)$ допускают представление $Q_i^0(t, \tau) = \psi_1^i(t, \tau) + \psi_2^i(t, \tau)(t-\tau)^{-\kappa_i}$, $0 \leq \kappa_i < 1$, где функции ψ_1^i , ψ_2^i непрерывны по t , τ , и 3) справедливы неравенства

$$|Q_i^0| = \sup_t \int_0^t Q_i^0(t, \tau) d\tau < 1$$

Обозначим через Γ_1 часть границы $\Gamma(t)$, на которой перемещения равны нулю, а через $\Gamma_2(t)$ — часть границы области $D(t)$, на которой заданы напряжения

$$u^i = 0, \quad R \in \Gamma_1; \quad \sigma^{ij}n_j = f^i, \quad R \in \Gamma_2(t) \quad (1.8)$$

Здесь $f = f^i G_i$ — вектор поверхностных усилий, $n = n_i G^i$ — вектор единичной внешней нормали к поверхности $\Gamma(t)$.

Уравнения (1.4)–(1.8) определяют напряженно-деформированное состояние в нелинейно-вязкоупругом теле, описываемом главной кубичной теорией вязкоупругости [1].

Развиваемый ниже метод анализа устойчивости нелинейно-вязкоупругих тел является приближенным, поскольку корректная постановка задачи требует записи уравнения состояния в тензорном, а не компонентном виде. Аналогичный подход к задачам устойчивости линейно-вязкоупругих тел развивался в работах [4, 5, 7]. Можно показать, что если константа Корна K_D области достаточно велика, то полученная на основе такого приближенного подхода оценка критического усилия является асимптотически точной (т. е. отличается от точного значения критической нагрузки на величину порядка K_D^{-1}).

2. Постановка задачи устойчивости. Пусть под действием внешней нагрузки Φ^0 , f^0 в теле реализуется некоторое напряженно-деформированное состояние, характеристики которого обозначаются индексом нуль. Положим $\Phi = \Phi^0 + \Delta\Phi$, $f = f^0 + \Delta f$, где $\Delta\Phi$, Δf — малые приращения массовых и поверхностных сил. Обозначим через $u = u^0 + \Delta u$ вектор перемещений,

соответствующий возмущенной нагрузке, $\Delta u = \Delta u^i G_i^\circ$. Считаем, что вектор дополнительных перемещений Δu достаточно мал, так что можно пренебречь произведениями дополнительных удлинений, сдвигов и углов поворота по сравнению с единицей [8]. Кроме того, можно пренебречь произведениями дополнительных удлинений, сдвигов и углов поворота на удлинения и сдвиги в невозмущенном актуальном состоянии. Базисные векторы лагранжевой системы координат и компоненты метрических тензоров в возмущенном состоянии связаны соотношениями [9] $G_i^\circ = (\delta_i^j + \nabla_i^\circ \Delta u^j) \times \times G_j^\circ$, $G^i = (\delta_j^i - \nabla_j^\circ \Delta u^i) G^{oj}$, $G_{ij} = G_{ij}^\circ + 2\Delta \varepsilon_{ij}$, $G^{ij} = G^{oj} - 2\Delta \varepsilon^{ij}$, где

$$\Delta \varepsilon_{ij} = 1/2 (\nabla_i^\circ \Delta u_j + \nabla_j^\circ \Delta u_i). \quad (2.1)$$

Условие несжимаемости материала принимает вид

$$\Delta \Theta = g^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} = 0 \quad (2.2)$$

Пусть приращение давления $\Delta p = p - p_0$ и приращения компонент тензора напряжений $\Delta \sigma^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma^{oj}$, вызванные возмущением нагрузки, достаточно малы, так, что их произведениями на удлинения и сдвиги в невозмущенном состоянии, а также на дополнительные удлинения, сдвиги и углы поворота можно пренебречь. Тогда, для сжимаемого материала и в случае упругой несжимаемости соответственно имеем

$$\Delta \sigma^{ij} = K \Delta \Theta g^{ij} + 2G [I - Q_1 - Q_3 ((e_u^\circ)^2)] \Delta \varepsilon^{ij} - 2G [Q_3 (\Delta e^{mn} e_{mn}^\circ + e^{omn} \Delta e_{mn})] e^{oj} + 6K \alpha T \Delta \varepsilon^{ij} \quad (2.3)$$

$$\Delta \sigma^{ij} = \Delta p G_{ij}^\circ - 2p^\circ \Delta \varepsilon^{ij} + 2G [I - Q_1 - Q_3 ((e_u^\circ)^2)] \Delta \varepsilon^{ij} - 2G [Q_3 (\Delta e^{mn} e_{mn}^\circ + e^{omn} \Delta e_{mn})] e^{oj}. \quad (2.4)$$

Если на тело действуют «мертвые» массовые силы, то уравнения равновесия принимают вид [9]

$$\nabla_i^\circ (\Delta \sigma^{ij} + \sigma^{oj} \Delta \Theta + \sigma^{im} \nabla_m^\circ \Delta u^j) = \Delta \Phi^j \quad (2.5)$$

где $\Delta \Phi^j$ — компоненты вектора $\Delta \Phi$ в базисе невозмущенного актуального состояния. Граничные условия на поверхности Γ_1 имеют вид

$$\Delta u_i = 0, \quad R \in \Gamma_1 \quad (2.6)$$

При действии на тело мертвых поверхностных усилий справедливо равенство [9]:

$$(\Delta \sigma^{ij} + \sigma^{oj} \Delta \Theta + \sigma^{im} \nabla_m^\circ \Delta u^j) n_i^\circ = \Delta f^j, \quad R \in \Gamma_2(t) \quad (2.7)$$

где Δf^j — компоненты вектора Δf в базисе невозмущенного актуального состояния. Система уравнений (2.1) — (2.5) с граничными условиями (2.6), (2.7) описывает возмущения актуального состояния.

Вязкоупругое тело устойчиво на бесконечном интервале времени, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенств $|\Delta \Phi| < \delta$, $|\Delta f| < \delta$ следует оценка $\|\Delta u\| < \varepsilon$, $t \geq 0$. Здесь

$$\|\Delta \Phi\|^2 = \int_{D^\circ(t)} \Delta \Phi^j \Delta \Phi_j dv_t^\circ, \quad |\Delta \Phi| = \sup_t \|\Delta \Phi\|,$$

$$\|\Delta f\|^2 = \int_{\Gamma_2^\circ(t)} \Delta f^j \Delta f_j ds_t^\circ, \quad |\Delta f| = \sup_t \|\Delta f\|, \quad \|\Delta u\|^2 = \int_{D^\circ(t)} \Delta u^j \Delta u_j dv_t^\circ$$

где dv_t° , ds_t° — соответственно элементы объема и площади поверхности в актуальном невозмущенном состоянии.

3. Вывод условий устойчивости. Умножим j -е равенство (2.5) на Δu_j , просуммируем по j и проинтегрируем по области $D_\delta(t)$. Интегрируя по частям и учитывая (2.6), (2.7), (2.1), аналогично [4] получим

$$\int_{D^\circ(t)} (\Delta \sigma^{ij} + \sigma^{oj} \Delta \Theta + \sigma^{im} \nabla_m^\circ \Delta u^j) \nabla_i^\circ \Delta u_j dv_t^\circ = I_1(t) > 0$$

$$I_1 = \int_{D^0(t)} \Delta \Phi^j \Delta u_j dv_i^0 + \int_{\Gamma_2^0(t)} \Delta f^j \Delta u_j ds_i^0 \quad (3.1)$$

Подставим в это равенство выражения (2.3). Тогда имеем (λ, μ — параметры Ламе):

$$\int_{D^0(t)} (\lambda \Delta \Theta^2 + 2\mu \Delta \varepsilon^{ij} \Delta \varepsilon_{ij} + 6K\alpha T \Delta \varepsilon^{ij} \Delta \varepsilon_{ij}) dv_i^0 = I_1 + I_2 + S_1, \quad (3.2)$$

$$I_2 = \int_{D^0(t)} (\Delta \varepsilon_{ij} Q_1 \Delta e^{ij} + \Delta \varepsilon_{ij} [Q_3 ((e_u^0)^2) \Delta e^{ij} + Q_3 (\Delta e^{mn} e_{mn}^0 + e^{0mn} \Delta e_{mn}) e^{0ij}]) dv_i^0$$

$$S_1 = - \int_{D^0(t)} \sigma^{0ij} (\Delta \varepsilon_{ij} \Delta \Theta + \nabla_i^0 \Delta u^m \nabla_j^0 \Delta u_m) dv_i^0$$

Оценим величины в правой части (3.2) с помощью неравенства Коши — Буняковского:

$$|I_1| \leq |\Delta \Phi| \|\Delta u\| + |\Delta f| \left(\int_{\Gamma_2^0(t)} \Delta u^j \Delta u_j ds_i^0 \right)^{1/2}$$

$$|I_2| \leq 2\mu A(t) A_0(t) |S^*|$$

$$|S^*| = \sup_t \left\{ \int_0^t \left[Q_1^0(t, \tau) \sup_{\xi} \left(1 + \int_0^t L_1(t, s) \left(\frac{T^*(s, \xi) - T_0}{T_0} \right)^{\gamma_1} ds \right) + \right. \right. \quad (3.3)$$

$$\left. + 3Q_3^0(t, \tau) \sup_{\xi} ((e_u^0(\tau, \xi))^2 \left(1 + \int_0^t L_3(t, s) \left(\frac{T^*(s, \xi) - T_0}{T_0} \right)^{\gamma_3} ds \right) \right] d\tau \right\}$$

$$A(t) = \int_{D^0(t)} \Delta \varepsilon^{ij}(t) \Delta \varepsilon_{ij}(t) dv_i^0, \quad A_0(t) = \sup_{\tau} A(\tau), \quad \tau \leq t$$

Согласно [10], существует такая функция $c_1(t)$, $c_1(t) > 0$, что

$$\int_{\Gamma_2^0(t)} \Delta u^j \Delta u_j ds_i^0 \leq c_1^2(t) \|\Delta u\|_1^2, \quad \|\Delta u\|_1^2 = \|\Delta u^2\| + \int_{D^0(t)} \nabla^0 i \Delta u^j \nabla_i^0 \Delta u_j dv_i^0 \quad (3.4)$$

Далее считаем, что величины $c_j(t)$ равномерно ограничены.

Из неравенства Корна [11] следует, что существует такая функция $c_2(t)$, $c_2(t) > 0$, что

$$\|\Delta u\|_1 \leq c_2(t) A(t) \quad (3.5)$$

Из соотношений (3.3) — (3.5) найдем

$$|I_1| \leq c_2^0 A(t) (|\Delta \Phi| + c_1^0 |\Delta f|), \quad c_j^0 = \sup_t c_j(t) \quad (3.6)$$

Обозначим через $U_1(t)$ множество непрерывно дифференцируемых функций $w(\xi) = w_i G^{0i} = w^i G_i^0$, удовлетворяющих условию $w = 0$ на Γ_1 . Если $\Gamma_1 = \emptyset$, то множество $U_1(t)$ состоит из функций w , для которых отсутствует смещение области $D^0(t)$ как жесткого целого. Положим

$$H_1(t, w) = \left| \int_{D^0(t)} \sigma^{0ij} (\vartheta \eta_{ij} + \nabla_i^0 w^m \nabla_j^0 w_m) dv_i^0 \right|$$

$$\lambda_1(t) = \sup_w H_1(t, w) \left[\int_{D^0(t)} (\lambda \Theta^2 + 2\mu (1 - |S^*|) \eta^{ij} \eta_{ij} + 6K\alpha T \eta^{ij} \eta_{ij}) dv_i^0 \right]^{-1}$$

$$\vartheta = \nabla_i^0 w^i, \quad \eta_{ij} = (\nabla_i^0 w_j + \nabla_j^0 w_i) / 2 \quad (3.7)$$

Из определения λ_1 следует оценка

$$S_1 \leq \lambda_1(t) \left[\int_{D^0(t)} (\lambda \Delta \Theta^2 + 6K\alpha T \Delta \varepsilon^{ij} \Delta \varepsilon_{ij}) dv_i^0 + 2\mu (1 - |S^*|) A^2(t) \right] \quad (3.8)$$

Согласно (3.2), (3.6), (3.8), имеем

$$[1-\lambda_1(t)] \left[\int_{D^0(t)} (\lambda \Delta \Theta^2 + 6K\alpha T \Delta \varepsilon^{ij} \Delta \varepsilon_{ij}) dv_i^0 + 2\mu(1-|S^*|)A^2(t) + \right. \\ \left. + 2\mu|S^*|A^2(t) \leq 2\mu|S^*|A(t)A_0(t) + c_2^0 A(t)(|\Delta \Phi| + c_1^0 |\Delta f|) \right] \quad (3.9)$$

Теорема 1. Пусть $\lambda_1^0 = \sup_t \lambda_1(t) < 1$ и $|S^*| < 1$. Тогда вязкоупругое тело устойчиво.

Из условия теоремы следует, что существует такое число $\beta > 0$, что для любого $t \geq 0$ выполняется неравенство $1 - \lambda_1(t) \geq \beta$. Из (3.9) получим

$$2\beta\mu(1-|S^*|)A_0(t) \leq c_2^0(|\Delta \Phi| + c_1^0|\Delta f|) \quad (3.10)$$

Согласно (3.4), (3.5), найдем $\|\Delta u\| \leq c_2^0 A_0(t)$.

Перейдем к анализу устойчивости несжимаемого тела. Обозначим через $U_2(t)$ множество функций $w \in U_1(t)$, удовлетворяющих условию $\nabla_m^0 w^m = 0$. Положим

$$H_2(t, w) = \left| \int_{D^0(t)} (\sigma^{0ij} \nabla_i^0 w^m \nabla_j^0 w_m - 2p^0 \eta^{ij} \eta_{ij}) dv_i^0 \right| \\ \lambda_2(t) = \sup_w \left[H_2(t, w) \left(\int_{D^0(t)} \eta^{ij} \eta_{ij} dv_i^0 \right)^{-1} \right] \quad (3.11)$$

Теорема 2. Пусть $\lambda_2^0 = \sup_t \lambda_2(t) \leq 2\mu(1-|S^*|)$ и $|S^*| < 1$. Тогда несжимаемое вязкоупругое тело устойчиво.

Для получения иных условий устойчивости несжимаемого тела необходимо уточнить предельное поведение функции $\lambda_2(t)$.

Теорема 3. Пусть функция $\lambda_2(t)$ непрерывна, $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_2(t) = \lambda_2^*$, $t \rightarrow \infty$ и выполнены условия $\lambda_2(t) < 2\mu$, $t \geq 0$, $\lambda_2^* < 2\mu(1-|S^*|)$. Тогда несжимаемое вязкоупругое тело устойчиво.

4. Устойчивость вязкоупругого тела при контактном взаимодействии. Пусть вязкоупругое тело по поверхности $\Gamma_2(t)$ контактирует с упругой средой типа Винклера, свойства которой не зависят от температуры. При сделанных выше предположениях о малости величин Δu_i и $\Delta \sigma^{ij}$ получим для возмущений уравнения (2.5) с граничными условиями (k — коэффициент жесткости среды)

$$\Delta u_i = 0, \quad R \in \Gamma_1 \\ (\Delta \sigma^{ij} + \sigma^{0ij} \Delta \Theta + \sigma^{0im} \nabla_m^0 \Delta u^j) n_i^0 = -k \Delta u^j, \quad R \in \Gamma_2(t) \quad (4.1)$$

Положим

$$\lambda_3(t) = \sup_w H_1(t, w) \left[\int_{D^0(t)} \lambda \Theta^2 + 2\mu(1-|S^*|) \eta^{ij} \eta_{ij} + 6K\alpha T \eta^{ij} \eta_{ij} dv_i^0 + \right. \\ \left. + k \int_{\Gamma_2^*(t)} w^j w_j ds_i^0 \right]^{-1} \quad (4.2)$$

Теорема 4. Пусть $|S^*| < 1$ и $\lambda_3^0 = \sup_t \lambda_3(t) < 1$. Тогда вязкоупругое тело устойчиво.

Согласно (4.2), введение «упругого основания» приводит к увеличению критической нагрузки потери устойчивости.

5. Устойчивость полого шара. Рассмотрим полый шар из несжимаемого вязкоупругого материала. Пусть внутренний радиус шара равен a , толщина h . На внутренней поверхности перемещения равны нулю, а внешняя поверхность шара свободна от нагрузок. Следуя [6], предположим, что свойства материала шара не зависят от истории изменения температуры. Тогда, можно принять

$$Q_i'(t, \tau, T_*(t), T_*(\tau)) = Q_i^*(t, \tau) \left[1 + \left(\frac{T_*(t) - T_0}{T_0} \right)^n \right] \quad (i=1, 3)$$

Введем сферическую систему координат (r, ϑ, φ) , начало которой совпадает

с центром шара. Пусть абсолютная температура T_* и возраст материала тела ρ зависят только от координаты r , $T_*(t, r) = T_0 + T(t)R(r)$.

Невозмущенное состояние характеризуется тензором напряжений σ_{ij}^0 , ненулевые физические компоненты которого равны

$$\sigma_r^0(t, r) = p^0(t, r) + A_1(t, r), \quad \sigma_\varphi^0(t, r) = \sigma_\varphi^0(t, r) = p^0(t, r) + B(t, r)$$

$$p^0(t, r) = \int_r^{a+h} \frac{2}{S} (A_1(t, S) - B(t, S)) dS - A_1(t, r)$$

$$A_1(t, r) = -2\mu\alpha F(r) (I-S)T(t)$$

$$B(t, r) = 2\mu\alpha (F(r) - R(r)) (I-S)T(t), \quad F(r) = r^{-3} \int_a^r R(s) s^2 ds$$

$$ST(t) = \int_0^t \left[Q_1^*(t+\rho(r), \tau+\rho(r)) \left(1 + \left(\frac{T(t)R(r)}{T_0} \right)^{\gamma_1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} Q_3^*(t+\rho(r), \tau+\rho(r)) \alpha^2 T^2(\tau) (R(r) - 3F(r))^2 (1 + (T(t)R(r)/T_0)^{\gamma_3}) \right] T(\tau) d\tau$$

Условие теоремы 2 принимает вид $\sup_t \lambda_2(t) < 2\mu(1 - |S^*|)$, $|S^*| < 1$, где

$$|S^*| = \sup_t \int_0^t \left[Q_1^0(t, \tau) \sup_r \left[1 + \left(\frac{T(t)R(r)}{T_0} \right)^{\gamma_1} \right] + \right. \\ \left. + 2Q_3^0(t, \tau) \sup_r [1 + (T(t)R(r)/T_0)^{\gamma_3}] \alpha^2 T^2(\tau) (R(r) - 3F(r))^2 \right] d\tau$$

Пусть на внутренней поверхности шара поддерживается постоянная температура T_0 , а на внешней $T_0 + \Delta T$. Тогда $T(t) = \Delta T(a+h)^{-1}$, $R(r) = (1-a/r)$. Рассмотрим дополнительное поле смещений вида $w_r = 0$, $w_\varphi = 0$, $w_\varphi = 3b(r^2 - a^2) \sin \varphi$. Тогда для тонкого линейно-вязкоупругого слоя $h \ll a$, $Q_1^*(t, \tau, T_*(t), T_*(\tau)) = Q_1^*(t, \tau)$ при однородном старении получим $\lambda_2(t) \approx 11,36\mu\alpha(I-Q_1)\Delta T/h$. Для упругого слоя критическая разность температур ΔT^* равна $\Delta T^* \approx 0,18h(\alpha a)^{-1}$ град. Например, для сферического слоя радиуса 1 м и толщины 10^{-2} м, изготовленного из дюралюмина, имеем $\Delta T^* \approx 70^\circ$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д. К теории устойчивости вязкоупругих тел при конечных деформациях. — Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1984, т. 276, № 5, с. 1082–1086.
4. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д. Устойчивость неоднородно стареющих вязкоупругих тел. — Вопросы судостроения. Сер. Проектирование судов. Л.: ЦНИИ «Румб», 1985, вып. 42, с. 7–18.
5. Дроздов А. Д., Колмановский В. Б. Об устойчивости неоднородно-стареющих вязкоупругих пластин. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 6, с. 997–1006.
6. Суворова Ю. В. Учет температуры в теории наследственной упругости и пластичности. — В кн.: Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984, с. 152–165.
7. Новожиллов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.—М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
8. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
9. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
10. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.VI.1985