

УДК 531.383

## ВЛИЯНИЕ СИНХРОННОГО ПРИВОДА НА УХОДЫ ДИНАМИЧЕСКИ НАСТРАИВАЕМОГО ГИРОСКОПА

ШАТАЛОВ М. Ю.

Рассмотрены причины возникновения уходов динамически настраиваемого гироскопа, вал которого приводится во вращение синхронным двигателем. Указано на необходимость учета механики привода при анализе нелинейного поведения динамически настраиваемого гироскопа. Исследовано влияние нутационных колебаний на точность гироскопа.

1. Рассмотрим систему уравнений специального вида:

$$\begin{aligned} \alpha'' - \kappa_1 \beta' + n_1^2 \alpha &= f(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \theta', \theta'') \\ \beta'' + \kappa_2 \alpha' + n_2^2 \beta &= g(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \theta', \theta'') \\ \theta'' + n(\theta, \theta') &= h(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'') \end{aligned} \quad (1.1)$$

где функции  $f(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \theta', \theta'')$ ,  $g(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \theta', \theta'')$  и  $h(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'')$  представляют собой разложения в ряд Тейлора по степеням переменных  $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \theta', \theta''$ . Допустим, что низший порядок полилинейных форм, входящих в состав функций  $f, g$  по переменным  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ , равен трем, а порядок форм, входящих в состав  $h$  по этим переменным, равен двум. По комбинации переменных  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \theta', \theta''$  низший порядок форм в составе функций  $f$  и  $g$  пусть будет равен двум. Выражение  $n(\theta, \theta')$  содержит линейные члены разложения в ряд Тейлора по переменным  $\theta, \theta'$ .

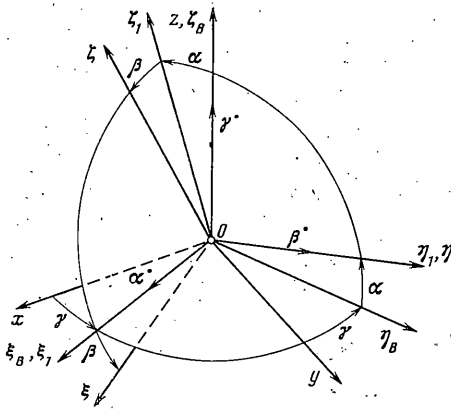
Метод решения данной системы уравнений заключается в сочетании метода последовательных приближений и метода осреднения, изложенного применительно к системе

$$\begin{aligned} \xi'' - \kappa_1 \eta' + n_1^2 \xi &= f(\xi, \xi', \eta, \eta') \\ \eta'' + \kappa_2 \xi' + n_2^2 \eta &= g(\xi, \xi', \eta, \eta') \end{aligned} \quad (1.2)$$

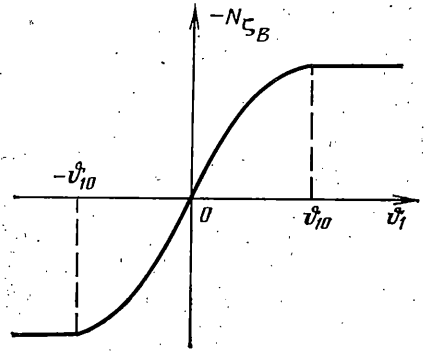
например, в [1]. Линеаризуя функцию  $n(\theta, \theta')$  по переменным  $\theta$  и  $\theta'$  и подставляя в правую часть третьего уравнения (1.1) порождающее решение соответствующей однородной линейной системы уравнений (1.2), можем решить полученное уравнение относительно переменной  $\theta$ . После того как решение по  $\theta$  получено, следует подставить совокупность упомянутого выше порождающего решения и полученных в результате дифференцирования переменной  $\theta$  по времени выражений  $\theta'$  и  $\theta''$  в правые части первых двух уравнений системы (1.1). Вследствие того что  $h(\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'')$  содержит билинейные формы по переменным  $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ , а  $f$  и  $g$  — билинейные формы по переменным  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \theta', \theta''$ , удержим в правых частях первых двух уравнений системы малые величины одного и того же порядка малости.

После проведения описанных операций, приходим к системе уравнений (1.2), в правых частях которой стоят функции времени  $f^*(t)$  и  $g^*(t)$ . Решение полученной системы можно провести методом, описанным в [1].

2. Применим изложенный метод решения систем нелинейных уравнений типа (1.1) к задаче определения уходов динамически настраиваемого гироскопа, вал которого приводится во вращение синхронным двигателем.



Фиг. 1



Фиг. 2

В известных публикациях были подробно исследованы модели гироскопа с сервосвязью [1] (вал гироскопа вращается с постоянной скоростью) и гироскопа, вал которого вращается по инерции<sup>1</sup>. В монографии М. А. Павловского и А. В. Збруцкого [2] исследовано влияние синхронного привода на точность ДНГ без учета влияния нутационных колебаний. Целью настоящей публикации является учет влияния нутационных колебаний ротора на точность ДНГ, вал которого приводится во вращение синхронным двигателем.

На фиг. 1 показаны углы относительного поворота элементов, составляющих динамически настраиваемый гироскоп с одноколечным подвесом. Угол  $\gamma$  характеризует поворот вала относительно основания, которое в дальнейшем будем считать неподвижным относительно некоторой инерциальной системы координат; угол  $\alpha$  представляет собой угол поворота кольца относительно вала, а угол  $\beta$  — ротора относительно кольца. Предположим, что вал гироскопа приводится во вращение синхронным двигателем с угловой скоростью

$$\dot{\gamma} = \Omega + \dot{\theta}^*$$

где  $\Omega = \text{const}$ ,  $\langle \dot{\theta}^* \rangle = 0$  (символ  $\langle \cdot \rangle$  означает среднее по времени значение величины, заключенной в скобках). Если двигатель работает в условиях синхронизма, то вектор магнитного потока ротора  $\Phi_r$ , намагниченного полем статора, отстает от вектора магнитодвижущей силы обмотки статора  $\Phi_c$  в среднем на некоторый угол  $\theta$ , определяемый моментом сопротивления на валу и гистерезисными свойствами материала ротора. Момент, развиваемый синхронным двигателем, в пределах углов  $|\theta_1| \leq 40^\circ$  вычисляется по формуле [3]:  $N_{\zeta_b} = -\Phi_c \Phi_r \sin \theta$ .

Допустим, что максимальный момент, который может развить синхронный двигатель, больше момента сопротивления на валу гироскопа при его расчетной скорости вращения. Обозначим через  $\theta$  разницу действительного значения угла  $\theta_1$  между векторами  $\Phi_r$  и  $\Phi_c$  и среднего значения этого угла  $\theta^*$ . График зависимости момента, развиваемого синхронным двигателем и углом  $\theta_1$ , представлен на фиг. 2. Предположим, что угол  $\theta$  мал. Тогда момент на валу можно приближенно описать законом  $N_{\zeta_b} \approx -K_c \theta$ , где  $K_c = \Phi_c \Phi_r \cos \theta^*$  — крутизна моментной характеристики синхронного привода. Назовем  $\theta$  углом качаний синхронного привода. Величина  $\theta_{10}$  на графике (фиг. 2) характеризует предельное значение угла  $\theta_1$ , при достижении которого двигатель выходит из синхронизма.

Подставим выражение для  $N_{\zeta_b}$  в последнее уравнение движения системы

$$(a+A)\ddot{\alpha} - (A+B-C)\Omega\dot{\beta} + (c-b+C-B)\Omega^2\alpha =$$

<sup>1</sup> См.: *Шагалов М. Ю.* О выборе нелинейной модели динамически настраиваемого гироскопа. — В кн.: *Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике.* Алма-Ата, Наука, 1981. 358 с.

$$\begin{aligned}
&= (C-A) (-\alpha''\beta^2 - 2\alpha'\beta\beta' + 2\Omega\beta'\beta^2 + \Omega^2\alpha\beta^2) - \\
&- (A+B-C)\Omega\alpha^2\beta'/2 + (c-b+C-B)2\Omega^2\alpha^3/3 + \\
&+ \{-(C-A)\beta\theta'' + (A+B-C)\beta'\theta' - 2(c-b+C-B)\Omega\alpha\theta'\} + L_{\xi}, \quad (2.1) \\
&B\beta'' + (A+B-C)\Omega\alpha' + (C-A)\Omega^2\beta = \\
&= (C-A) [\alpha''\beta - 2\Omega\alpha'\beta^2 + \Omega^2(\alpha^2\beta + 2\beta^3/3)] + \\
&+ (A+B-C)\Omega\alpha'\alpha^2/2 + \{-2(C-A)\Omega\beta\theta' - B\alpha\theta'' - (A+B-C)\alpha'\theta'\} + M_{\eta} \\
&(C_b + c + C)\theta'' = (C-A) (-\alpha''\beta - \alpha'\beta' + 2\Omega\beta\beta') - \\
&- B(\alpha'\beta' + \alpha\beta'') + 2(C-B+c-b)\Omega\alpha\alpha' + N_{\xi_b}
\end{aligned}$$

где  $L_{\xi} = -k_{\xi}\alpha$ ,  $M_{\eta} = -k_{\eta}\beta$  — моменты сил деформации упругих элементов подвеса, а  $N_{\xi_b} = -k_c\theta$  — момент синхронного двигателя.

Предположим, что гироскоп работает в условиях прецессионной на-  
стройке, и пренебрежем демпфирующими моментами на валу и на осях  
упругих элементов. В дальнейшем будем полагать  $a=b=c=0$ ,  $A=B$ .

3. Решим задачу определения уходов гироскопа методом осреднения.  
Для этого произведем замену переменных  $\alpha = \varepsilon\xi$ ,  $\beta = \varepsilon\eta$ ,  $\theta = \varepsilon^2\zeta$ . Порож-  
дающая система уравнений (при  $\varepsilon=0$ ) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\xi'' - (\Omega - \Omega_2)\eta' + \Omega\Omega_2\xi = 0 \quad (3.1) \\
&\eta'' + (\Omega - \Omega_2)\xi' + \Omega\Omega_2\eta = 0 \\
&\xi'' + p^2\zeta = \{(C-A) [-\xi''\eta + 2\Omega(\xi\xi' + \eta\eta')] - A\xi\eta'' - C\xi'\eta'\} / (C+C_b) \\
&p^2 = K_c(C+C_b)^{-1}, \quad \Omega_2 = |C-A|\Omega A^{-1}.
\end{aligned}$$

Система уравнений (3.1) разделяется и ее решение имеет вид

$$\begin{aligned}
&\xi = \xi_0 \cos \gamma_1 + \eta_0 \cos \delta_1, \quad \eta = -\xi_0 \sin \gamma_1 + \eta_0 \sin \delta_1 \\
&\zeta = C \{ -\xi_0^2 [p^2 / (4\Omega^2) - 1]^{-1} \sin 2\gamma_1 + \eta_0^2 [p^2 / (4\Omega_2^2) - 1]^{-1} \sin 2\delta_1 - \\
&- 2\xi_0\eta_0 [p^2 / (\Omega + \Omega_2)^2 - 1]^{-1} \sin (\gamma_1 + \delta_1) + \\
&+ [p^2 / (\Omega - \Omega_2)^2 - 1]^{-1} \sin (\gamma_1 - \delta_1) \} / (C+C_b) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

где  $\gamma_1 = \Omega t + \psi_1$ ,  $\delta_1 = \Omega_2 t + \psi_2$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  — фазы, а  $\xi_0$  и  $\eta_0$  — амплитуды колеба-  
ний, определяемые начальными условиями.

Полная система двух уравнений (2.1) имеет вид (1.2), где

$$\begin{aligned}
&f(\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta', \zeta'') = 2\Omega\Omega_2\xi^3/3 - (\Omega - \Omega_2)\xi^2\eta'/2 + \\
&+ [2\Omega\eta'\eta^2 - 2\xi'\eta'\eta + \Omega^2\xi\eta^2 - (\Omega - \Omega_2)\eta'\eta^2 - \\
&- \Omega\Omega_2\xi\eta^2 - 2\Omega\xi\xi' + \eta\xi''] + (\Omega - \Omega_2)\eta'\zeta'/\Omega \\
&g(\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta', \zeta'') = (\Omega - \Omega_2)\xi'\eta^2/2 + \\
&+ [\xi'^2\eta - 2\Omega\xi'\eta^2 + \Omega^2(2\eta^3/3 + \xi^2\eta)] - \\
&- 2\Omega\eta\zeta' - (\Omega - \Omega_2)\xi'\zeta'/\Omega - \xi\xi'', \quad \xi = \xi(t)
\end{aligned} \quad (3.3)$$

Воспользовавшись формулами [4], получим значения уходов дина-  
мически настраиваемого гироскопа, вал которого приводится во вращение  
синхронным двигателем

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha' \rangle \simeq 0, \quad \alpha_0 \langle \gamma_1 - \Omega \rangle \simeq - [\alpha_0^2 + (1 + \Omega_2^2/\Omega^2)\beta_0^2] \alpha_0 \Omega / 4 - \\
&- 1/8 C \{ 2\alpha_0^2 [p^2 / (4\Omega^2) - 1]^{-1} + \{ (1 + \Omega_2/\Omega)^2 [p^2 / (\Omega + \Omega_2)^2 - 1]^{-1} + \\
&+ (1 - \Omega_2/\Omega)^2 [p^2 / (\Omega - \Omega_2)^2 - 1]^{-1} \} \beta_0^2 \} \alpha_0 \Omega / (C+C_b)
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Эти выражения справедливы для ограниченного интервала времени.  
Таким образом, радиальная составляющая ухода гироскопа, обусловлен-  
ная воздействием синхронного привода, равна нулю. Отметим предельные

случаи формулы (3.4). Допустим, что  $C_b=0$ . Если, кроме того, крутизна моментной характеристики привода стремится к нулю, то и уход гироскопа стремится к нулю

$$\lim [\alpha_0 \langle \gamma_1 - \Omega \rangle] \approx 0 \quad \text{при } p^2 \rightarrow 0, \quad C_b \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

Этот результат очевиден, так как получено свободное твердое тело, вращающееся вокруг закрепленной точки (случай Эйлера). Допустим, что крутизна моментной характеристики привода неограниченно увеличивается. В этом случае величина ухода гироскопа стремится к величине ухода гироскопа с сервосвязью [1]:

$$\lim_{p^2 \rightarrow \infty} [\alpha_0 \langle \gamma_1 - \Omega \rangle] \approx -1/4 [\alpha_0^2 + (1 + \Omega_2^2 / \Omega^2) \beta_0^2] \alpha_0 \Omega \quad (3.6)$$

Предположим, что момент инерции вала очень большой по сравнению с остальными моментами инерции (т. е. рассмотрим предельный случай  $C_b \rightarrow \infty$ ). Тогда вновь получим предельное значение (3.6), т. е. в этом случае величина ухода гироскопа стремится к величине ухода, вычисленной в предположении наличия у гироскопа сервосвязи. Допустим, наконец, что момент инерции вала имеет конечную величину, а крутизна моментной характеристики привода мала. Тогда уход гироскопа стремится к величине

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} [\alpha_0 \langle \gamma_1 - \Omega \rangle] \approx -1/4 C_b [\alpha_0^2 + (1 + \Omega_2^2 / \Omega^2) \beta_0^2] \alpha_0 \Omega / (C + C_b) \quad (3.7)$$

Выражение (3.6) было получено в [1]. Таким образом, формула (3.4) обобщает некоторые из полученных в [1] результаты.

График зависимости абсолютной величины углового ухода гироскопа от частоты качаний  $p$  привода, представленный на фиг. 3, показывает, что при критических значениях частоты качаний синхронного привода ( $p = \Omega - \Omega_2, \Omega + \Omega_2, 2\Omega$ ) значение нелинейных уходов гироскопа увеличивается. Эти уходы ограничены вследствие наличия у системы демпфирования и вследствие неучтенных в данном рассмотрении нелинейных добавок более высокого порядка малости. При значении частоты качаний ( $p = p_1^*, p_2^*, p_3^*$ ) величины нелинейных уходов гироскопа обращаются в нуль.

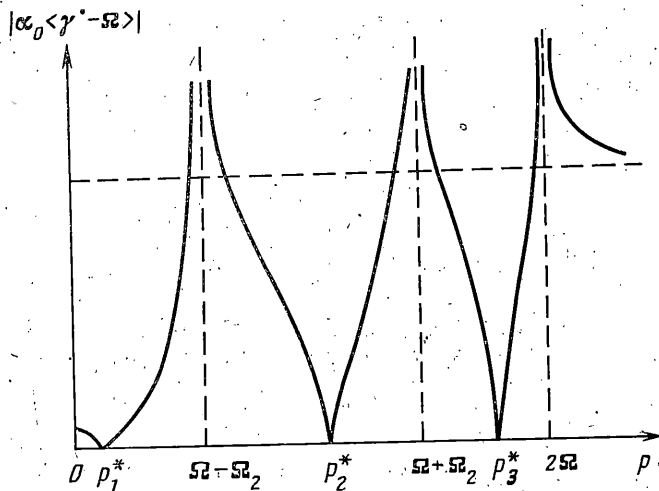
4. Проиллюстрируем механику возникновения уходов гироскопа с синхронным приводом при помощи теоремы Резаля [4]. В формулах (19), (36), полученных в [4], положим  $K_{\xi_1} = K_{\eta_1} = K_{\zeta_1} = 0, L_{\xi_1} = M_{\eta_1} = 0, N_{\zeta_1} = K_c \theta, G_{\xi_b} = C_b (\Omega + \theta')$  и  $G_{\xi_b} = G_{\eta_b} = 0$ . Тогда  $M_{\xi} = (-N_{\zeta_b} + G_{\zeta_b}) \sec \alpha \sin \beta, M_{\eta} = 0, M_{\zeta} = (N_{\zeta_b} - G_{\zeta_b}) \sec \alpha \cos \beta$ . Учитывая в этих выражениях линейные и нелинейные члены низшего порядка малости, получим следующие приближенные выражения для проекций момента, действующего со стороны подвеса на ротор:

$$M_{\xi} \approx (C_b \theta'' + K_c \theta) \beta, \quad M_{\eta} \approx 0, \quad M_{\zeta} \approx -(C_b \theta'' + K_c \theta) \quad (4.1)$$

Из последнего уравнения системы (2.1) (учитывая  $a=b=c=0$ ) получаем  $C_b \theta'' + K_c \theta = C[-\theta'' - (\alpha'' - \Omega \beta') \beta - (\beta'' - \Omega \alpha) \alpha]$ .

Подстановка порождающего решения (3.2) дает

$$\begin{aligned} C_b \theta'' + K_c \theta \approx C \left\{ - \left( 1 + \frac{C}{C + C_b} \cdot \frac{4\Omega^2}{p^2 - 4\Omega^2} \right) \alpha_0^2 \Omega^2 \sin 2\gamma_1 + \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{C}{C + C_b} \cdot \frac{4\Omega_2^2}{p^2 - 4\Omega_2^2} \right) \beta_0^2 \Omega_2^2 \sin 2\delta_1 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_0 \beta_0}{2} \left[ \left( 1 + \frac{C}{C + C_b} \cdot \frac{(\Omega + \Omega_2)^2}{p^2 - (\Omega + \Omega_2)^2} \right) (\Omega + \Omega_2)^2 \sin(\gamma_1 + \delta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 1 + \frac{C}{C + C_b} \cdot \frac{(\Omega - \Omega_2)^2}{p^2 - (\Omega - \Omega_2)^2} \right) (\Omega - \Omega_2)^2 \sin(\gamma_1 - \delta_1) \right] \right\} \quad (4.2) \end{aligned}$$



Фиг. 3

Подставляя выражения (4.2) в соотношения (4.1), проектируя моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  на оси Резаля [4] и применяя теорему Резаля, получим выражения для радиальной и тангенциальной составляющих ухода гироскопа:

$$\begin{aligned} \langle \alpha^* \rangle \approx 0, \quad \langle \beta^* \rangle \approx 1/4 [\alpha_0^2 + (1 + \Omega_2^2 / \Omega^2) \beta_0^2] \alpha_0 \Omega + \\ + 1/8 C \{ 2\alpha_0^2 [p^2 / (4\Omega^2) - 1]^{-1} + \{ (1 + \Omega_2 / \Omega)^2 [p^2 / (\Omega + \Omega_2)^2 - 1]^{-1} + \\ + (1 - \Omega_2 / \Omega)^2 [p^2 / (\Omega - \Omega_2)^2 - 1]^{-1} \} \beta_0^2 \} \alpha_0 \Omega / (C + C_b) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти выражения, так же как и формулы (3.4), справедливы для ограниченного интервала времени. Выражение (4.3) совпадает с (3.4) с точностью до знака. Разберем теперь вопрос о соответствии знаков, стоящих перед вторыми формулами выражений (3.4) и (4.3). Знак минус в выражении (3.4) свидетельствует о том, что частота колебаний нелинейной системы  $\gamma_1^*$  меньше угловой скорости вращения вала и, следовательно, при суперпозиции двух движений — конического движения апекса ротора с частотой  $\gamma_1^*$  относительно вращающейся системы координат и вращения самой системы координат с угловой скоростью  $\Omega$  — происходит увлечение апекса ротора в направлении вращения вала. Следовательно, в неподвижной системе координат будет наблюдаться прецессия ротора, угловая скорость которой направлена в положительную сторону оси  $Oy$  (Фиг. 1), и поэтому знак минус перед выражением (3.4) соответствует знаку плюс перед выражением (4.3).

Проведенные выкладки еще раз демонстрируют эффективность применения теоремы Резаля к задаче вычисления угловой скорости ухода динамически настраиваемого гироскопа.

Полученные результаты показывают, что при анализе нелинейных уходов динамически настраиваемого гироскопа весьма существенно учитывать механику его привода.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Филатов В. В., Шабатов В. И., Шаталов М. Ю. Влияние нелинейных эффектов на точность динамически настраиваемого гироскопа. — Изв. АН СССР, МТТ, 1984, № 6, с. 3.
2. Павловский М. А., Збруцкий А. В. Динамика роторных вибрационных гироскопов. Киев: Вища школа, 1984, 191 с.
3. Гироскопические системы / Под ред. Д. С. Пельпора, Ч. 3, М.; Высш. шк., 1972, 471 с.
4. Новиков Л. З., Шаталов М. Ю. Механика динамически настраиваемых гироскопов. М.: Наука, 1985, 245 с.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VII.1985