

УДК 539.3

## О РАССЕЯНИИ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНОЙ НОРМАЛЬНО ПАДАЮЩЕЙ ПРОДОЛЬНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

КАПЦОВ А. В., ШИФРИН Е. И.

Рассматривается пространственная задача теории упругости о рассеянии плоской трещиной нормально падающей, продольной гармонической волны. Для решения этой задачи применяется метод, предложенный в [1], который будем называть двухбазисным проекционным методом. Методы, применявшиеся ранее при решении аналогичных задач, как правило, использовали упрощения, связанные с конкретной формой трещин [2–6], и поэтому не могли быть распространены на более сложные случаи. Двухбазисный проекционный метод позволяет единым образом решать задачи о трещинах различной формы, ограниченных кусочно-гладким контуром, во всем диапазоне изменения коэффициента Пуассона и оказывается эффективным как при малых, так и при достаточно больших частотах. Приведены и проанализированы численные решения задач о трещинах круговой и квадратной в плане форм для различных значений коэффициента Пуассона и при разных нагрузках.

1. Запишем математическую формулировку задачи. Обозначим через  $\omega$  частоту падающей волны,  $\lambda$ ,  $\mu$  — упругие постоянные материала,  $\rho$  — его плотность,  $c_d = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ ,  $c_s = (\mu/\rho)^{1/2}$  — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно.

Пусть трещина занимает область  $G$  в плоскости  $x_3 = 0$ . Предположим, что в пространстве распространяется плоская волна смещений  $U_1 = U_2 = 0$ ,  $U_3 = A \exp(-i\omega(\tau + x_3/c_d))$ . Следовательно, в плоскости  $x_3 = 0$  действуют напряжения  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ,  $\sigma_{33} = -(\lambda + 2\mu)i\omega A \exp(-i\omega\tau)/c_d = -t \exp(-i\omega\tau)$ . В силу линейности приходим к задаче о трещине, к поверхностям которой приложены симметричные относительно плоскости трещины, нормальные усилия  $t \exp(-i\omega\tau) = -\sigma_{33}$ . Приняв на бесконечности условия Зоммерфельда и предположив, что имеется начальное раскрытие трещины или динамические усилия накладываются на статические так, что в процессе деформирования не происходит налегания поверхностей трещины, можно исходную задачу свести к псевдодифференциальному уравнению в плоскости трещины [5, 7]:

$$p_G \Omega_\beta b(x) = t, \quad x = (x_1, x_2), \quad b(x) = 0, \quad x \notin G^{\sim} \quad (1.1)$$

Здесь  $b(x)$  — амплитуда скачка нормального смещения,  $p_G$  — сужение на область  $G$ ,  $G^{\sim}$  — замыкание области  $G$ ,  $\Omega_\beta$  — псевдодифференциальный оператор с символом  $\Omega_\beta(\xi) = 2\mu\beta^{-2}[\xi^2 \sqrt{\xi^2 - \beta^2} - (\xi^2 - \beta^2/2)^2 / \sqrt{\xi^2 - \alpha^2}]$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $\xi^2 = |\xi|^2$ , значение  $\sqrt{s}$  выбирается положительным при  $s > 0$  и  $-i\sqrt{|s|}$  при  $s < 0$ ,  $\beta = \omega/c_s$ ,  $\alpha = \omega/c_d$ .

Согласно [1], для применения двухбазисного проекционного метода к задаче (1.1) необходимо выполнение нескольких условий. Оператор  $\Omega_\beta$  должен отображать некоторое гильбертово пространство на сопряженное. Это условие выполнено, поскольку символ оператора  $\Omega_\beta$  можно представить в виде  $\Omega_\beta(\xi) = \mu|\xi|/(2(1-\nu)) + D_\beta(\xi)$ , где  $\nu$  — коэффициент Пуассона, а  $D_\beta(\xi)/|\xi| \rightarrow 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Таким образом, оператор  $\Omega_\beta$ , как и оператор статической задачи, отображает  $H_{1/2}^0(G)$  в сопряженное пространство  $H_{-1/2}(G)$  и отличается от него на вполне непрерывный оператор. Здесь  $H_{1/2}^0(G)$ ,  $H_{-1/2}(G)$  — пространства Соболева — Слободецкого. Аналогично [1] и в соответствии с введенными там обозначениями здесь в качестве пространства  $H_0$ , фигурирующего в одной из разновидностей двухбазис-

ного проекционного метода, можно взять  $L_2(G)$ , а оператор  $B$  положить равным тождественному.

Для эффективного применения метода нужно также знать особенности решения  $b(x)$  уравнения (1.1). Известно, что вблизи гладкой части контура  $\partial G$ , ограничивающего область  $G$ ,  $b(x)$  имеет корневую асимптотику. Это позволяет учесть поведение  $b(x)$  вблизи контура при построении приближенного решения. Будем искать приближение решения в подпространстве  $E_n$ , натянутом на  $n$  элементов базиса  $e_1(x), \dots, e_n(x), \dots$ . Функции  $e_i(x)$  зададим в виде  $e_0(x)g_i(x)$ , где  $e_0(x)$  учитывает краевые условия и поведение решения вблизи контура,  $g_i(x)$  — полная система гладких функций. Запишем приближенное решение в виде  $b_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i e_i(x)$ ,  $i=1, n$ . Неизвестные коэффициенты определяются из условия минимизации на подпространстве  $E_n$  следующего функционала [1]:

$$S_N^2(b_n) = \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{i=1}^n c_i (e_i, \Omega_{\beta}^* \varphi_k) - (t, \varphi_k) \right] \left[ \sum_{i=1}^n c_i (e_i, \Omega_{\beta}^* \varphi_k) - (t, \varphi_k) \right] \quad (1.2)$$

Здесь  $\Omega_{\beta}^*$  — оператор, сопряженный к  $\Omega_{\beta}$ ,  $\varphi_k$  — некоторый ортонормированный базис в  $H_0 = L_2(G)$ . Функционал  $S_N^2(b_n)$  определяет отклонение между ортогональными (в смысле скалярного произведения в  $L_2(G)$ ) проекциями функций  $t$  и  $\Omega_{\beta} b_n$  на подпространства, натянутые на  $N$  элементов базиса  $\varphi_k$ . Сходимость достигается за счет увеличения  $N$  при фиксированной размерности подпространства, в котором ищется приближенное решение.

В отличие от статической задачи оператор  $\Omega_{\beta} = A_{\beta} + iB_{\beta}$  является комплекснозначным, вследствие чего коэффициенты  $c_j = p_j + iq_j$  комплексны. Поэтому система линейных алгебраических уравнений относительно  $p_j$  и  $q_j$ , получаемая из условия минимизации функционала (1.2), имеет вдвое более высокий порядок, чем в статике. Приведем вид этой системы

$$\sum_{j=1}^n (C_{ij} p_j + R_{ij} q_j) = \sum_{k=1}^N (t, \varphi_k) (e_i, A_{\beta} \varphi_k), \quad \sum_{j=1}^n (R_{ij} p_j - C_{ij} q_j) = \sum_{k=1}^N (t, \varphi_k) (e_i, B_{\beta} \varphi_k) \quad (1.3)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N [(e_i, A_{\beta} \varphi_k) (e_j, B_{\beta} \varphi_k) + (e_i, B_{\beta} \varphi_k) (e_j, A_{\beta} \varphi_k)] \quad (1.3)$$

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^N [(e_i, B_{\beta} \varphi_k) (e_j, A_{\beta} \varphi_k) - (e_i, A_{\beta} \varphi_k) (e_j, B_{\beta} \varphi_k)]$$

Следовательно, для применения двухбазисного проекционного метода осталось подобрать полную в  $L_2(G)$  систему функций, результат применения к которым операторов  $A_{\beta}$  и  $B_{\beta}$  достаточно просто вычислить. При помощи этих функций затем можно построить ортонормированный базис  $\varphi_k$ .

2. Возьмем, как и в [1], в качестве полной системы функции вида  $\psi_{\alpha}^{\gamma}(x_1, x_2) = \psi_{\alpha}^{\gamma}(x)$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,  $\gamma \geq 1/2$ :

$$\psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = [\alpha_3^2 - |x - \alpha_M|^2]^{\gamma}, \quad d_M < 1; \quad \psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = 0, \quad d_M \geq 1$$

$$\alpha_M = (\alpha_1, \alpha_2), \quad |x - \alpha_M|^2 = (x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2, \quad d_M = |x - \alpha_M|^2 / \alpha_3^2$$

Круги радиусов  $\alpha_3$  с центрами в точках  $\alpha_M$  принадлежат  $G$ . Результаты применения операторов  $A_{\beta}$  и  $B_{\beta}$  к функциям  $\psi_{\alpha}^{\gamma}(x)$  имеют

вид

$$A_{\beta} \psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = -\frac{C}{\beta^2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{(\beta^2 - 2t^2)^2 t^{-\gamma}}{\sqrt{t^2 - \alpha^2}} J_0(t|x - \alpha_M|) J_{1+\gamma}(t\alpha_3) dt +$$

$$+ \frac{4C}{\beta^2} \int_{\beta}^{\infty} t^{2-\gamma} \sqrt{t^2 - \beta^2} J_0(t|x - \alpha_M|) J_{1+\gamma}(t\alpha_3) dt \quad (2.1)$$

$$B_{\beta} \psi_{\alpha}^{\gamma}(x) = -\frac{C}{\beta^2} \int_0^{\alpha} \frac{(\beta^2 - 2t^2)^2 t^{-\gamma}}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}} J_0(t|x - \alpha_M|) J_{1+\gamma}(t\alpha_3) dt -$$

$$- \frac{4C}{\beta^2} \int_0^{\beta} t^{2-\gamma} \sqrt{\beta^2 - t^2} J_0(t|x - \alpha_M|) J_{1+\gamma}(t\alpha_3) dt$$

где  $C = \mu 2^{\gamma-1} \alpha_3^{\gamma+1} \Gamma(1+\gamma)$ ,  $J_{\nu}(s)$  — функция Бесселя,  $\Gamma(s)$  — гамма-функция. Выражения, входящие в (2.1), могут быть преобразованы после вычисления интегралов типа

$$I_{\nu\mu}(a, b) = \int_0^d J_{\nu}(ax) J_{\mu}(bx) x^{\theta-1} (d^2 - x^2)^{\kappa-1} dx \quad (2.2)$$

$$J_{\nu\mu}(a, b) = \int_d^{\infty} J_{\nu}(ax) J_{\mu}(bx) x^{\theta-1} (x^2 - d^2)^{\kappa-1} dx \quad (2.3)$$

Интегралы в (2.2), (2.3) представляются с помощью бесконечных рядов. Пусть  $\sigma = (\theta + \mu + \nu)/2$ . Обозначим

$$I_{\nu\mu}'(a, b) = \frac{d^{2\sigma+2\kappa-2} a^{\nu} b^{\mu} \Gamma(\kappa) \Gamma(\sigma)}{2^{1+\nu+\mu} \Gamma(\kappa+\sigma) \Gamma(1+\nu) \Gamma(\mu+1)} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sigma)_p}{(\kappa+\sigma)_p (1+\mu)_p} \frac{(-d^2 b^2/4)^p}{p!} {}_2F_1\left(-p, -\mu-p; 1+\nu; \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (2.4)$$

где  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_p = a(a+1) \dots (a+p-1)$  — символ Похгаммера,  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  — гипергеометрическая функция. Пусть также

$$J_{\nu\mu}'^{(1)}(a, b) = \frac{d^{2\sigma+2\kappa-2} a^{\nu} b^{\mu} \Gamma(\kappa) \Gamma(1-\kappa-\sigma)}{2^{1+\nu+\mu} \Gamma(1+\nu) \Gamma(1+\mu) \Gamma(1-\sigma)} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sigma)_p (-d^2 b^2/4)^p}{(\kappa+\sigma)_p (1+\mu)_p p!} {}_2F_1\left(-p, -\mu-p; 1+\nu; \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (2.5)$$

$$J_{\nu\mu}'^{(2)}(a, b) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^{\theta+2\kappa-2} \frac{\Gamma(\kappa+\sigma-1)}{\Gamma(1+\nu) \Gamma(2+\mu-\kappa-\sigma)} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1-\kappa)_p (-d^2 b^2/4)^p}{(2-\kappa-\sigma)_p (2+\mu-\kappa-\sigma)_p p!} {}_2F_1(\kappa+\sigma-1-p, \kappa+\sigma-1-\mu-p; 1+\nu; a^2/b^2) \quad (2.6)$$

Тогда при  $\kappa > 0$ ,  $\sigma > 0$ ; и при  $\kappa > 0$ ,  $\theta + 2\kappa < 3$  имеем соответственно

$$I_{\nu\mu}(a, b) = \begin{cases} I_{\nu\mu}'(a, b), & a < b \\ I_{\mu\nu}'(b, a), & a > b \end{cases} \quad (2.7)$$

$$J_{\nu\mu}(a, b) = \begin{cases} J_{\nu\mu}(a, b) + J_{\mu\nu}(a, b), & a < b \\ J_{\mu\nu}'^{(1)}(b, a) + J_{\nu\mu}'^{(2)}(b, a), & a > b \end{cases} \quad (2.8)$$

Из (2.1) — (2.8) окончательно получим

$$A_\beta \psi_\alpha^\Gamma(x) = A_\beta^{\text{st}} \psi_\alpha^\Gamma(x) + A_\beta^D \psi_\alpha^\Gamma(x) \quad (2.9)$$

$$A_\beta^{\text{st}} \psi_\alpha^\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{(1-\eta^2) \mu \alpha_3^{2\Gamma-1} \Gamma(1+\gamma) \Gamma(1/2)}{\Gamma(\gamma+1/2)} {}_2F_1(3/2, 1/2-\gamma; 1; d_M), & d_M < 1 \\ -\frac{(1-\eta^2) \mu \alpha_3^{2(1+\gamma)}}{2(1+\gamma) |x-\alpha_M|^3} {}_2F_1(3/2, 3/2; 2+\gamma; 1/d_M) & d_M > 1 \end{cases}$$

$$A_\beta^D \psi_\alpha^\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{\mu \alpha_3^{1+2\Gamma} \Gamma(1+\gamma) \Gamma(1/2) \beta^2}{4\Gamma(\gamma+3/2)} G_A(1+\gamma, 0, \alpha_3, d_M), & d_M < 1 \\ -\frac{\mu \alpha_3^{2(1+\gamma)} \beta^2}{4(1+\gamma) |x-\alpha_M|} G_A(0, 1+\gamma, |x-\alpha_M|, 1/d_M), & d_M > 1 \end{cases}$$

$$G_A(\delta, \varepsilon, a, b) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{H_p^R(-\beta^2 a^2/4)^p}{(\delta+1/2)_p p!} {}_2F_1(1/2-p, 1/2-\delta-p; 1+\varepsilon; b)$$

$$H_p^R = \eta^{2p} \left( 1 - \frac{2(2p+1)}{p+1} \eta^2 + \frac{(2p+1)(2p+3)}{(p+1)(p+2)} \eta^4 \right) + \frac{2p+1}{(p+1)(p+2)}$$

$$\eta^2 = (1-2\nu)/(2(1-\nu))$$

$$B_\beta \psi_\alpha^\Gamma(x) = -\frac{\mu \beta^3 \alpha_3^{2(1+\Gamma)}}{4(1+\gamma)} \begin{cases} G_B(1+\gamma, 0, \alpha_3, d_M), & d_M < 1 \\ G_B(0, 1+\gamma, |x-\alpha_M|, 1/d_M), & d_M > 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$G_B(\delta, \varepsilon, a, b) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{H_p^I(-\beta^2 a^2/4)^p}{(3/2)_p (1+\delta)_p} {}_2F_1(-p, -\delta-p; 1+\varepsilon; b)$$

$$H_p^I = \eta^{2p+1} \left( 1 - \frac{8(1+p)}{2p+3} \eta^2 + \frac{16(1+p)(2+p)}{(2p+3)(2p+5)} \eta^4 \right) + \frac{8(p+1)}{(2p+3)(2p+5)}$$

В формуле (2.9)  $A_\beta^{\text{st}} \psi_\alpha^\Gamma(x)$  с точностью до постоянного множителя совпадает с результатом применения оператора статической задачи к функции  $\psi_\alpha^\Gamma(x)$  [1]. Из (2.9), (2.10) видно, что  $A_\beta \psi_\alpha^\Gamma(x)$  разлагается в ряд по четным степеням  $\beta$ , а  $B_\beta \psi_\alpha^\Gamma(x)$  — по нечетным степеням, начиная с трех. Вычисление функций  $A_\beta \psi_\alpha^\Gamma(x)$  и  $B_\beta \psi_\alpha^\Gamma(x)$  можно упростить заметив, что при переходе от предыдущего члена ряда к последующему первые два аргумента у гипергеометрической функции уменьшаются на единицу. Это позволяет при вычислении  ${}_2F_1(a-1, b-1; c; z)$  воспользоваться рекуррентными соотношениями [8]:

$${}_2F_1(a-1, b-1; c; z) = p_1 {}_2F_1(a, b-1; c; z) + q_1 {}_2F_1(a, b; c; z) \quad (2.11)$$

$${}_2F_1(a-1, b-2; c; z) = p_2 {}_2F_1(a, b-1; c; z) + q_2 {}_2F_1(a, b; c; z)$$

$$p_1 = (c-a-b+1)/(c-a), \quad q_1 = (b-1)(1-z)/(c-a)$$

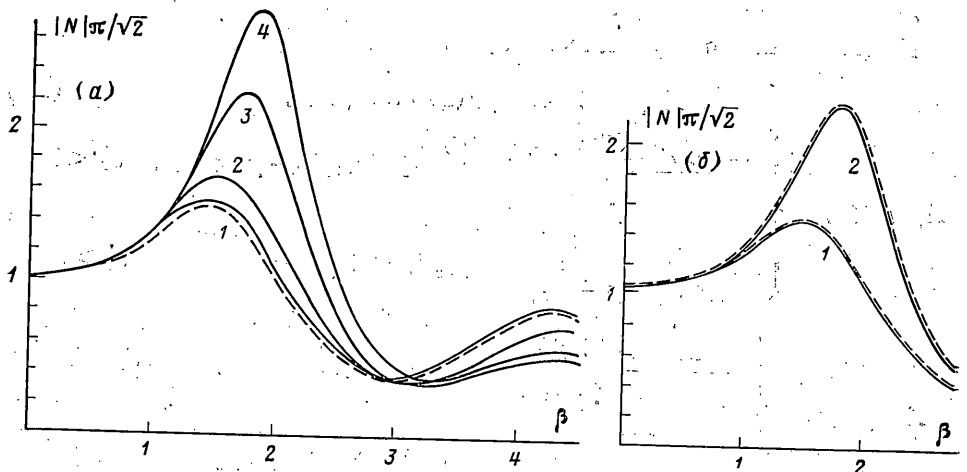
$$p_2 = (p_1(c-2b+2+(b-a)z) + q_1(c-b))/(c-b+1)$$

$$q_2 = q_1(c-b-a+2)/(c-b+1)$$

Таким образом, зная значения  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  и  ${}_2F_1(a, b-1; c; z)$ , можно по (2.11) получить значения  ${}_2F_1(a-p, b-p; c; z)$  для любого натурального  $p$ .

3. Рассмотрим результаты расчетов задач о круговой и квадратной в плане трещинах, полученные с помощью указанного метода.

В задаче о круговой трещине единичного радиуса при построении первого базиса функция  $e_0(x)$  была выбрана в виде  $e_0(x) = \sqrt{1-|x|^2}$ . В качестве функций  $g_i(x)$



Фиг. 1

брались тригонометрические функции  $g_i(x) = \cos(i-1)\pi r$ ,  $r = |x|$ . Рассматривались также  $g_i(x)$ , включающие как тригонометрические функции, так и полиномы. Количество элементов первого базиса в зависимости от частоты  $\omega$  варьировалось от четырех до семи. Количество элементов второго базиса доводилось до 19. Функция  $\psi_{\alpha^1}(x)$ , используемые при построении базиса  $\Phi_h$ , рассматривались при значениях  $\gamma$  от двух до шести. Получаемые при этом результаты близки между собой. Для определенности в дальнейших расчетах было выбрано  $\gamma=3$ . В табл. 1 приведены значения  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , характеризующие круги, являющиеся носителями функций  $\psi_{\alpha^1}$ . Круги выбирались так, чтобы полнее покрыть область трещины, иметь немного взаимных пересечений и лучше представить окрестность контура трещины, в которой нужна повышенная точность решения. Коэффициенты интенсивности напряжений вычислялись аналитически непосредственно из выражения для скачка нормального смещения.

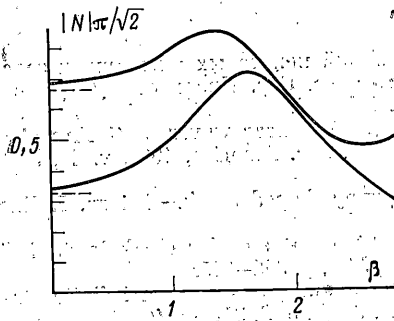
На фиг. 1, а представлены графики изменения отношения амплитуды коэффициента интенсивности напряжений к статическому значению  $|N|/N_{st}$  в зависимости от  $\beta$ , при различных значениях коэффициента Пуассона, а также результаты для  $\nu=0,25$  из [3] (кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют  $\nu=0,25; 0,4; 0,49; 0,5$  соответственно, штриховая кривая взята из [3]). Согласно полученным результатам, при  $\nu=0,25$  максимальное значение  $|N|/N_{st}$  достигает 1,52, что несколько выше, чем в [3]. На фиг. 1, а не представлены результаты для  $\nu=0,1$  и  $0,3$ , полученные авторами, так как они совпадают с результатами, приведенными в [6] с такой же точностью, как и для  $\nu=0,25$ . Максимальное значение  $|N|/N_{st}$  зависит от  $\nu$ , что иллюстрируется ниже

$\nu$	0,1	0,25	0,4	0,45	0,49	0,5
$ N _{max}/N_{st}$	1,51	1,52	1,69	1,84	2,25	2,87

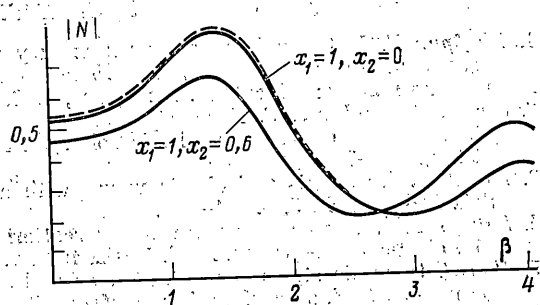
Эта зависимость не очень значительна до  $\nu=0,4$ ; где изменение происходит в пределах от 1,5 до 1,7. В интервале  $0,4 < \nu < 0,5$  увеличение максимального значения  $|N|/N_{st}$  становится существенным и достигает 2,87. Отвечающее максимальному значению коэффициента интенсивности напряжений значение  $\beta_{res}$  также зависит от  $\nu$  и меняется от  $\beta_{res} \approx 1,4$  при  $\nu=0,25$  до  $\beta_{res} \approx 1,9$  при  $\nu=0,5$ . Несмотря на то что при  $\nu=0,5$  скорость распространения продольной волны бесконечна, уравнение (1.1) сохраняет смысл, поэтому на фиг. 1 приведена кривая, отвечающая предельному значению  $\nu$ . Для иллюстрации устойчивости полученных численных результатов на

Таблица 1

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
0	0	1	0,667	0	0,333	0,249	0,249	0,125
0	0	0,5	0	0	0,25	0,332	0,332	0,125
0,5	0	0,5	0	0,25	0,25	0,415	0,415	0,125
0	0	0,333	0	0,50	0,25	0,498	0,498	0,125
0,333	0	0,333	0	0,75	0,25	0,581	0,581	0,125
0	0	0,1	0	0,9	0,1	0,4	0	0,2
0,6	0	0,2						



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 1, б приведены зависимости  $|N|/N_{st}$  от  $\beta$  для двух значений коэффициента Пуассона ( $\nu=0,25$ ,  $\nu=0,49$ ) при разных количествах первого и второго базисов. Коэффициенту Пуассона  $\nu=0,25$  отвечают расчеты с пятью элементами первого базиса и 15 второго (сплошная кривая 1) и шестью первого и 18 второго (штриховая кривая 1). Коэффициенту  $\nu=0,49$  отвечают расчеты с пятью элементами первого и 17 второго (сплошная кривая 2) и пятью первого и 19 второго (штриховая кривая 2). Видно, что кривые для разных базисов практически совпадают.

Поскольку уравнение (1.1) отвечает задаче о трещине, к поверхностям которой прикладываются нормальные, симметричные относительно плоскости трещины, гармонически изменяющиеся во времени нагрузки, интерес представляет случай, когда амплитуда нагрузки является функцией координат  $t=t(x)$ . Оказывается, что вид функции  $t(x)$  существенно влияет на превышение амплитудой коэффициента интенсивности напряжений статического значения. На фиг. 2 изображены зависимости  $|N|$  от  $\beta$  при  $\nu=0,25$  для  $t(x)=r^2$  и  $t(x)=1-r^2$  (статические значения  $N_{st}/\sqrt{2}$ , для этих двух случаев равные соответственно  $2/3$  и  $1/3$ , обозначены на фиг. 2 штрихами). Если при  $t(x)=r^2$  максимальное значение  $|N|/N_{st}$  равняется 1,3, что ниже, чем в случае  $t=1$ , то при  $t(x)=1-r^2$  максимальное значение  $|N|/N_{st}$  достигает 2,1.

Таблица 2

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
0	0	1	-0,5	0	0,25	0,554	0,230	0,25
0	0	0,5	-0,75	0	0,25	-0,875	0	0,125
0,5	0	0,5	-0,75	-0,75	0,25	-0,875	0,125	0,125
0,5	0,5	0,5	-0,574	-0,574	0,25	-0,875	0,25	0,125
0	0	0,25	-0,398	-0,398	0,25	-0,875	0,375	0,125
-0,25	0	0,25	0,277	0,115	0,25	-0,875	0,5	0,125

На фиг. 3 приведены зависимости  $|N|$  от  $\beta$  в двух точках стороны квадрата. Расчеты проводились для случая  $\nu=0,2$  и квадрата, сторона которого равна 2 ( $|x_1| < 1$ ,  $|x_2| < 1$ ). Здесь же приведены решения, полученные в [5]. При решении задачи первый базис выбирался соответственно [1] с учетом симметрии и особенностей в угловых точках  $e_0(x) = \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)} (r_1 r_2 r_3 r_4)^{-0,184}$ ;  $r_1^2 = (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2$ ;  $r_2^2 = (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2$ ;  $r_3^2 = (x_1+1)^2 + (x_2+1)^2$ ;  $r_4^2 = (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2$ . Функции  $g_i(x)$  брались как в виде  $g_i(x) = \cos kA \cos mB + \cos mA \cos kB$ ,  $A = \pi x_1$ ,  $B = \pi x_2$ , так и вместе с полиномиальными функциями. Количество элементов первого базиса доводилось до семи. Во втором базисе насчитывалось до 18 элементов. Он строился из функций  $\psi_{\alpha}^3(x)$ . Значения  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  приведены в табл. 2.

Отметим, что для тех значений  $\beta$ , до которых было доведено решение в [5] ( $0 \leq \beta \leq 2,4$ , штриховая кривая на фиг. 3 взята из [5]), полученные там результаты хорошо совпадают с расчетами данной работы. При этих  $\beta$  амплитуда коэффициента интенсивности достигает максимального значения в середине стороны квадрата. При больших значениях  $\beta$  в рассматриваемом диапазоне частот максимум коэффициента интенсивности достигается в двух точках стороны квадрата, симметричных относительно середины стороны. Координаты точек зависят от  $\beta$ .

Все расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1040 и ЕС-1050 и занимали 15-20 мин для одного значения  $\beta$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин Е. И. О приближенном решении уравнений некоторых смешанных задач теории упругости. — Механика деформируемого тела. Сер. Прочность, упруговязкопластичность: Сб. статей. М.: Наука, 1986, с. 154–164.
2. Sih G. C., Loeber J. F. Normal compression and radial shear waves scattering at a penny-shaped crack in an elastic solid. — J. Acoust. Soc. America, 1969, v. 46, № 3, pt 2, p. 711–721.
3. Mal A. K. Interaction of elastic waves with a penny-shaped crack. — Intern. J. Eng. Sci., 1970, v. 8, № 5, p. 381–388.
4. Shindo Y. Normal compression waves scattering at a flat annular crack in an infinite elastic solid. — Quart. Appl. Math., 1981, v. 39, № 3, p. 305–315.
5. Itou S. Dynamic stress concentration around a rectangular crack in an infinite elastic medium. — Z. angew. Math. und Mech., 1980, B, 60, H. 8, S. 317–322.
6. Mechanics of fracture. V. 4. Elastodynamic crack problems / Ed. Sih G. C. Leyden: Noordhoff, 1977. 352 p.
7. Гольдштейн Р. В., Капцов А. В. О трещине нормального отрыва в упругой среде под действием гармонической волны. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 6, с. 93–100.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.

Москва

Поступила в редакцию  
17.IX.1985