

УДК 622.011.4

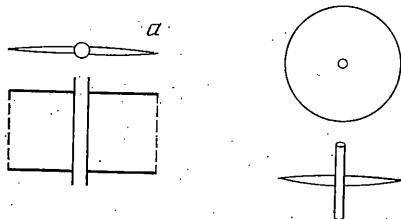
АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В НЕПРОНИЦАЕМОЙ ГОРНОЙ ПОРОДЕ

ЗАВОВСКИЙ А. Ф., ОДИШАРИЯ М. Г., ПЕСЛЯК Ю. А.

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи о распространении трещин в упругой непроницаемой горной породе при нагнетании в них вязкой жидкости. Получены автомодельные решения двух типов, отвечающие медленному и экспоненциальному режимам нагнетания. При медленном нагнетании жидкость заполняет трещину вплоть до ее конца и распределение давления жидкости в трещине в каждый момент времени постоянно. При этом размер трещины, ее раскрытие, объем и давление жидкости в ней являются степенными функциями времени. Когда расход закачиваемой жидкости растет экспоненциально со временем, фронт проникновения жидкости в трещину отстает от ее конца, относительная глубина проникновения фиксирована, а форма трещины и распределение давления в ней сохраняют геометрическое подобие. Исследованы основные закономерности роста трещин; обсуждается роль сил сцепления и горного давления в механизме распространения трещин гидроразрыва.

Теория гидравлического разрыва пласта была заложена в работах [1—3]. Задачи о распространении трещин гидроразрыва рассматривались в них в приближенной постановке методом интегральных соотношений: пренебрегалось влиянием сил сцепления по сравнению с горным давлением и предполагалось, что жидкость заполняет некоторую фиксированную часть трещины. В [4] дана строгая упругогидродинамическая постановка задачи о распространении дискообразной трещины и исследованы режимы нагнетания при постоянном расходе и постоянном давлении (распределение давления жидкости в трещине при определении ее раскрытия заменялось равномерно распределенным статически эквивалентным). Эта же задача рассматривалась в [5] в предположении, что вся трещина заполнена жидкостью (распределение давления при этом оказывалось логарифмически убывающим вблизи конца трещины) и исследовался случай медленного нагнетания. В [6] показано, что в отсутствие сил сцепления существует автомодельный режим распространения дискообразной трещины, при котором ее радиус растет экспоненциально со временем, а степень заполнения остается постоянной.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать развитую стадию гидроразрыва. Пусть в безграничной упругой среде имеется плоская (вертикальная) или дискообразная (горизонтальная) трещина, размер которой $2R$ (соответственно, ее длина или диаметр) значительно больше радиуса скважины r_0 , через которую производится нагнетание жидкости. Как в плоском, так и в осесимметричном случаях трещина считается симметричной относительно скважины (фиг. 1). Движение жидкости в трещине будем считать ламинарным, давление в каждом сечении трещины p постоянным, осредненным по ее раскрытию $2w$, а скоростью движения жидкости в трещине v малой по сравнению со скоростью распространения упругих волн. В такой постановке процесс развития трещины под действием закачиваемой жидкости описывается следующими уравнениями:



Фиг. 1

$$w(x, t) = \frac{1}{c} \int_x^{R(t)} \frac{\xi^{2-h} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \int_0^\xi \frac{p(\eta, t) - \sigma}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \eta^{h-1} d\eta, \quad c = \frac{\pi E}{4(1-\nu^2)} \quad (1.1)$$

$$v(x, t) = -\frac{w^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (0 \leq x \leq R_1), \quad p(x, t) = 0 \quad (R_1 \leq x \leq R) \quad (1.2)$$

$$q(x, t) = 4(\pi x)^{k-1} w v = -\frac{4(\pi x)^{k-1} w^3}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (0 \leq x \leq R_1) \quad (1.3)$$

$$q(x, t) = 4\pi^{k-1} \frac{d}{dt} \int_x^{R_1(t)} \xi^{k-1} w(\xi, t) d\xi \quad (0 \leq x \leq R_1) \quad (1.4)$$

$$\frac{dR}{dt} \geq 0, \quad \int_0^{R(t)} \frac{p(x, t) - \sigma}{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(\frac{x}{R}\right)^{k-1} dx = \frac{K}{\sqrt{2R}} \quad (1.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = 0, \quad \int_0^{R(t)} \frac{p(x, t) - \sigma}{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(\frac{x}{R}\right)^{k-1} dx < \frac{K}{\sqrt{2R}} \quad (1.6)$$

Здесь x — линейная ($k=1$) или радиальная ($k=2$) координата, t — время, σ — горное давление, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, K — модуль сцепления горной породы, характеризующий ее трещиностойкость [7] ($N_0 = K/\pi$ — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений), $R_1(t)$ — расстояние фронта жидкости в трещине от точки нагнетания $x=0$, μ — вязкость жидкости, $k=1$ отвечает плоской задаче, $k=2$ — осесимметричной. Величина q имеет смысл расхода жидкости через фиксированное сечение трещины поверхностью, равноудаленной от ее середины $x=0$.

Соотношение (1.1) — формула Снеддона для раскрытия трещины $2w$ в упругой среде под действием внутреннего давления p в условиях предварительного сжатия, обусловленного действием горного давления σ ; разность $p-\sigma$ играет роль эффективного давления жидкости в трещине. Отметим, что (1.1) имеет физический смысл только в том случае, когда всюду $w(x, t) \geq 0$; случай частичного контакта поверхностей трещины здесь не рассматривается.

Соотношение (1.2) — формула Буссинеска для скорости движения вязкой жидкости в узкой щели, в данном случае осредненной по сечению трещины. При этом предполагается, что давление в трещине изменяется от своего максимального значения в точке нагнетания жидкости $x=0$ до нуля при $|x|=R_1$, а в области $R_1 \leq |x| \leq R$ жидкость отсутствует.

Соотношение (1.3) получается интегрированием (1.2) по сечению трещины и связывает расход жидкости $q(x, t)$ в каждом сечении трещины $|x| = \text{const}$ с ее раскрытием и градиентом давления.

Уравнение (1.4) — интегральное уравнение неразрывности для течения жидкости в трещине — означает, что жидкость полностью занимает каждое фиксированное сечение трещины $|x| = \text{const}$ вплоть до фронта проникновения $|x|=R_1(t)$. При этом учитывается, что заполнение трещины одновременно сопровождается как изменением ее раскрытия, так и увеличением глубины проникновения жидкости в трещину.

Наконец, соотношения (1.5) и (1.6) определяют условия распространения трещины (условие разрушения) [8]. Трещина может расти ($dR/dt \geq 0$) только в том случае, когда выполняется условие ее предельного равновесия (1.5), т.е. коэффициент интенсивности напряжений в концах трещины N достигает своего критического значения $N_0 = K/\pi$ или, другими словами, силы сцепления в горной породе уравниваются эффективным давлением жидкости в трещине. Если же это условие не достигается ($N < N_0$), то трещина не распространяется ($dR/dt = 0$).

Интерес представляет решение системы уравнений (1.1)–(1.6) при заданном расходе нагнетания $q(0, t) = q_0(t)$, либо при заданном давлении $p(0, t) = p_0(t)$. Очевидно, в рамках предположения о малости радиуса скважины ($r_0 \ll R_1 < R$) условие для давления, вообще говоря, может быть задано только в случае плоской задачи ($k=1$). Кроме того, требуется также задание начальных условий: начального размера трещины $R(0) = R_0$ и глубины проникновения в нее жидкости $R_1(0) = R_{10}$.

Отметим одну особенность системы (1.1)–(1.6). Хотя производная по времени входит в уравнение (1.4), анализ показывает, что при этом не требуется начального условия для распределения давления $p(x, t)$, а также $w(x, t)$ или $q(x, t)$. Действительно, задание давления в силу (1.1) определяет раскрытие трещины, а в соответствии с (1.3) — распределение потока жидкости в ней. Это распределение может быть не согласовано с начальным условием для расхода. Если же задано давление нагнетания, то может нарушаться уравнение неразрывности (1.4).

Таким образом, начальные распределения w , p и q должны находиться в процессе решения задачи и должны быть согласованы. Далее ограничимся случаем распространения трещины, т. е. будем считать, что в каждый момент времени выполняются соотношения (1.5), причем $dR/dt > 0$.

Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{R_1}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad t_0 = \frac{3\mu}{\sigma} \left(\frac{c}{\sigma} \right)^2, \quad \lambda(\tau) = \frac{R(t)}{R_1(t)} \\ \alpha(\tau) &= \frac{1}{R_1} \frac{dR_1}{d\tau}, \quad W(X, \tau) = \frac{c}{\sigma} \frac{w(x, t)}{R_1(t)}, \quad P(X, \tau) = \frac{p(x, t)}{\sigma} \\ Q(X, \tau) &= \frac{\pi^{1-h}}{4} \left(\frac{c}{\sigma} \right) \frac{t_0 q(x, t)}{R_1^{h+1}(t)}, \quad W_0(\tau) = W(0, \tau) \\ P_0(\tau) &= P(0, \tau), \quad Q_0(\tau) = Q(0, \tau) \end{aligned} \quad (1.7)$$

и преобразуем систему (1.1)–(1.5) к виду

$$W(X, \tau) = \int_x^1 \frac{\xi^{2-h} d\xi}{\sqrt{\xi^2 - X^2}} \int_0^1 \frac{P(\eta, \tau) - 1}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} \eta^{h-1} d\eta \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} P(X, \tau) &= \int_x^1 \frac{Q(\xi, \tau) \xi^{1-h} d\xi}{W^3(\xi, \tau)} = \\ &= P_0(\tau) - \int_0^x \frac{Q(\xi, \tau) \xi^{1-h} d\xi}{W^3(\xi, \tau)} \quad (0 \leq X \leq 1), \quad P=0 \quad (1 \leq X \leq \lambda) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$Q(X, \tau) = Q_0(\tau) + \alpha(\tau) \left[X^h W(X, \tau) - (h+1) \int_0^x W(\xi, \tau) \xi^{h-1} d\xi \right] - \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^x \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} \xi^{h-1} d\xi &= \alpha(\tau) \left[X^h W(X, \tau) + (h+1) \int_x^1 W(\xi, \tau) \xi^{h-1} d\xi \right] + \\ &+ \int_x^1 \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} \xi^{h-1} d\xi \quad (0 \leq X \leq 1) \\ \int_0^1 \frac{P(X, \tau) - 1}{\sqrt{\lambda^2 - X^2}} X^{h-1} dX &= \frac{\lambda^{h-1} K}{\sigma \sqrt{2R}} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь W , P и Q — безразмерные распределения смещений, давления и потока жидкости в трещине, α — логарифмическая скорость фронта жидкости в трещине. Характерное время t_0 определяется гидравлической проницаемостью трещины.

Уравнения (1.8)–(1.11) содержат единственный физический параметр $K/(\sigma \sqrt{2R})$ — отношение сил сцепления к горному давлению. В новых переменных размер части трещины, заполненной жидкостью, фиксирован ($0 \leq X \leq 1$) и меняется только безразмерная длина (диаметр) трещины $2\lambda(\tau) \geq 2$.

2. Медленное нагнетение жидкости. Рассмотрим режимы нагнетения с малыми расходами, когда можно считать, что перераспределение жидкости в трещине происходит мгновенно. Естественно при этом считать, что жидкость заполняет трещину вплоть до ее концов ($R_1=R$, $\lambda=1$). Формально полагая в (1.9) $Q=0$, получаем, что давление жидкости в трещине $P(X, \tau)$ в каждый момент времени постоянно и совпадает с давлением нагнетания P_0 . Из (1.8), (1.10) и (1.11) получаем

$$W(X, \tau) = (\pi/2)^{2-h} (P_0 - 1) (1 - X^2)^{1/2} \quad (2.1)$$

$$(\pi/2)^{2-h} (P_0 - 1) = K/\sigma\sqrt{2R} \quad (2.2)$$

$$Q_0(\tau) = (k+1)\alpha(\tau) \int_0^1 W(X, \tau) X^{k-1} dX + \quad (2.3)$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial W(X, \tau)}{\partial \tau} X^{k-1} dX, \quad \alpha(\tau) = R^{-1} \frac{dR}{d\tau}$$

Подставляя (2.1) в (2.3) и дифференцируя (2.2) по τ , будем иметь

$$P_0(\tau) = 1 + (\pi/2)^{k-2} \Omega R^{-1/2} \quad (2.4)$$

$$P_0'(\tau) = dP_0/d\tau = -1/2 (\pi/2)^{k-2} \Omega \alpha R^{-1/2} \quad (2.5)$$

$$Q_0(\tau) = A_k (k+1/2) \Omega \alpha R^{-1/2} \quad (2.6)$$

$$\Omega = \frac{K}{\sigma\sqrt{2}}, \quad A_k = \int_0^1 X^{k-1} (1-X^2)^{1/2} dX = \begin{cases} \pi/4, & k=1 \\ 1/3, & k=2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Найдем зависимость радиуса трещины от времени $R(t)$. Для этого перейдем в (2.6) к исходным размерным переменным, используя (1.1), (1.7) и (2.7). После разделения переменных и интегрирования получим

$$R^{k+1/2}(t) = R_0^{k+1/2} + \frac{\sqrt{2} \pi^{2-h} E}{16(1-\nu^2) A_k K} \int_0^t q_0(t') dt' \quad (2.8)$$

Пусть $R_0 \ll R$, тогда при постоянном расходе q_0 размер плоской трещины ($k=1$) растет пропорционально $t^{2/3}$, а в случае дискообразной трещины ($k=2$) несколько медленнее — как $t^{1/3}$. Это обстоятельство связано с тем, что объем плоской трещины (на единицу ее ширины) пропорционален R , а объем дискообразной — R^2 , так что на заполнение последней при ее распространении требуется больше времени.

Из (2.3), а также (2.1), (2.4) и (2.6) следует, что все параметры трещины — раскрытие, объем, эффективное давление жидкости в ней — изменяются со временем степенным образом. Это означает, что полученное решение является автомодельным. Его можно было бы получить непосредственно из системы (1.8) — (1.11), подставив вместо искомым величин степенные функции времени, умноженные на постоянные и функции X .

Из (2.4) и (2.8) следует также, что при $k=1$ избыточное над горным давление жидкости в трещине $\Delta P = P_0 - 1$ убывает как $t^{-1/3}$, а при $k=2$ — как $t^{-1/3}$, т. е. медленнее. Это обстоятельство, в принципе, может быть использовано при определении типа образующейся трещины.

Наблюдения за давлением нагнетания и расходом закачиваемой жидкости, кроме того, можно использовать для определения модуля сжатия породы [5]. Действительно, продифференцируем соотношение (2.8) по времени, а затем исключим из него с помощью (2.4) и (2.5) R и dR/dt . В результате будем иметь

$$K = \sqrt{2} (p_0 - \sigma) (2 - \alpha \pi)^{2-h} \left[\frac{-E q_0}{16(2k+1) (1-\nu^2) A_k p_0'} \right]^b \quad (2.9)$$

$$p_0' = \frac{dp_0}{dt}, \quad a = \frac{2k+1}{2k+2}, \quad b = \frac{1}{2(k+1)}$$

Согласно [4], режим медленного нагнетания реализуется, например, в тех случаях, когда жидкость закачивается в трещину неограниченно долго с постоянным расходом. При этом величина, стоящая в правой части (2.9) должна стремиться к модулю сцепления горной породы.

3. Нагнетение жидкости с экспоненциальным увеличением расхода. Рассмотрим его асимптотическую стадию, отвечающую большим размерам трещины. При этом отношение сил сцепления к горному давлению стремится к нулю.

Полагая в (1.11) $K/(\sigma\sqrt{2R})=0$, приходим к задаче, уже не содержащей физических параметров. Эта задача допускает автомодельное решение, описывающее распространение трещины с постоянной логарифмической скоростью при неизменной форме трещины и фиксированной степени заполнения ее жидкостью [6]:

$$W=W(X), \quad P=P(X), \quad Q=Q(X), \quad \lambda=\text{const}, \quad \alpha=\text{const} \quad (3.1)$$

Из (1.7) и (1.10) получаем, что при этом размер трещины и расход закачиваемой жидкости должны экспоненциально расти со временем

$$R=R_0 e^{\alpha\tau}, \quad R_1=R_{10} e^{\alpha\tau}, \quad \lambda=R_0/R_{10}, \quad \alpha=R^{-1}dR/d\tau \quad (3.2)$$

$$Q_0 = (k+1)\alpha \int_0^1 W(X) X^{k-1} dX, \quad q_0(\tau) = \frac{4\pi^{k-1}\sigma}{3\mu} \left(\frac{\sigma}{c}\right)^3 Q_0 R_{10}^{k+1} \exp[(k+1)\alpha\tau]$$

Решение (3.1), (3.2) инвариантно относительно сдвига по времени: при замене $\tau=\tau'+\omega$ и $R_{10}'=R_{10}e^{\alpha\omega}$ получаем ту же самую задачу. Оно однозначно определяется заданием единственного геометрического параметра λ , характеризующего глубину проникновения жидкости в трещину. Действительно, полагая в (1.8)–(1.10) $\partial W/\partial\tau=0$ и $\alpha=\text{const}$, подставляя (1.8) в (1.9) и (1.10), а затем выражение для $Q(X)$ через $P(X)$ в (1.9), можно получить интегральное уравнение для $P(X)$ вида

$$P(X) = \alpha F[P(X)] \quad (3.3)$$

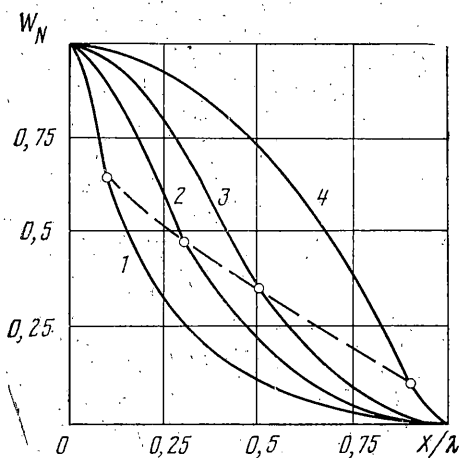
где $F(P)$ — нелинейный оператор, который здесь не выписывается из-за громоздкости.

Уравнение (3.3) вместе с соотношением (1.11), где правая часть равна нулю, определяет функцию $P(X)$ и число α .

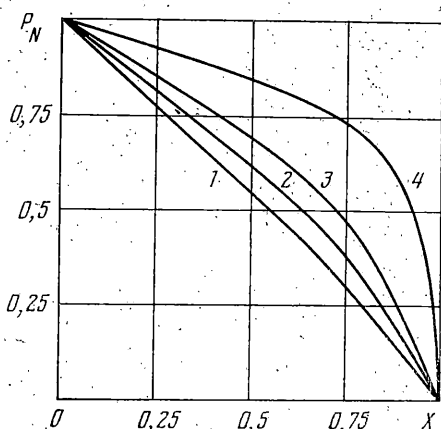
Аutomодельное решение (3.1), (3.2) строилось численно, методом последовательных приближений, сходным с использованным в [5]. Для этого на отрезке $0 \leq X \leq 1$ вводилось некоторое число M равноотстоящих узлов. Затем в них задавалось начальное распределение давления $P=P^{(0)}$, удовлетворяющее условию (1.11) (обычно $P^{(0)}=\text{const}$). Далее из (1.8) находилось $W=W^{(0)}$, после чего по формуле (1.10) вычислялось распределение потока жидкости в трещине в виде отношения $Q^{(0)}/\alpha^{(0)}$, где параметр $\alpha^{(0)}$ еще не был известен. Для его определения использовалось соотношение (1.11), в которое подставлялось выражение для P (1.9) через $W^{(0)}$ и $Q^{(0)}$. Найденное значение $\alpha^{(0)}$ позволяло вычислить новое распределение давления $P=P^{(1)}$ по формуле (1.9) через $W^{(0)}$ и $Q^{(0)}$. Итерации повторялись до сходимости распределений $P^{(i)}$, $W^{(i)}$, $Q^{(i)}$ и стабилизации величины $\alpha^{(i)}$ с заданной точностью. При числе узлов $M \approx 50$ и относительной погрешности $\epsilon=0,001$ для получения решения требовалось 5–9 итераций.

Результаты расчетов для плоской ($k=1$) и дискообразной ($k=2$) трещин представлены соответственно на фиг. 2–4 и 5–7.

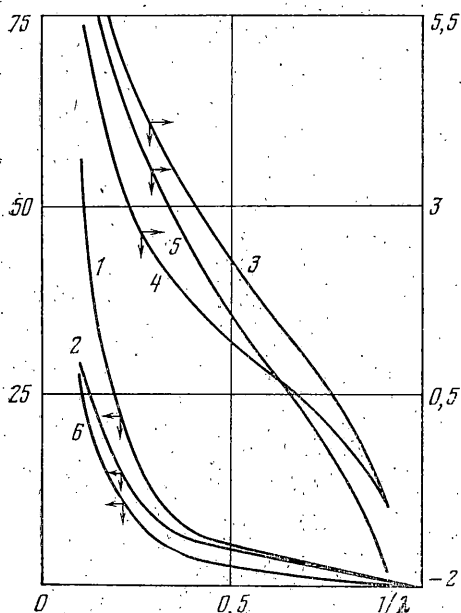
На фиг. 2 и 3 показано, как меняются форма плоской трещины и распределение давления жидкости в ней в зависимости от степени заполнения. Функции $W(X)$ и $P(X)$ нормированы на свои максимальные значения в середине трещины W_0 и P_0 : $W_N=W/W_0$, $P_N=P/P_0$. Кривые 1–4 отвечают значениям $\lambda^{-1}=0,1; 0,3; 0,5$ и $0,9$. Пересечения штриховой линии с кривыми 1–4 на фиг. 2 определяют положения фронта жидкости в тре-



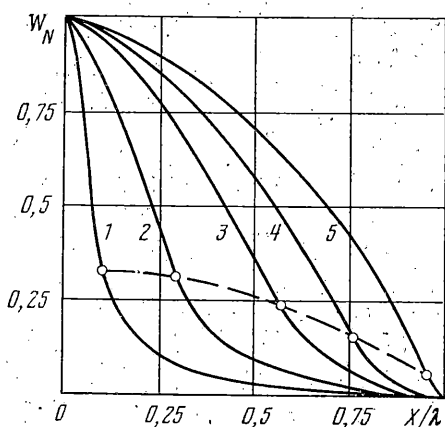
Фиг. 2



Фиг. 3



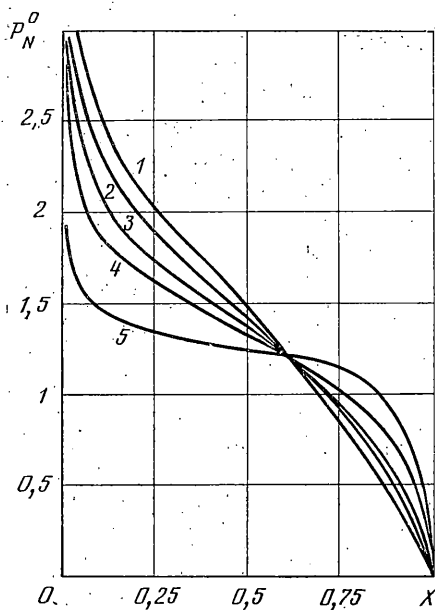
Фиг. 4



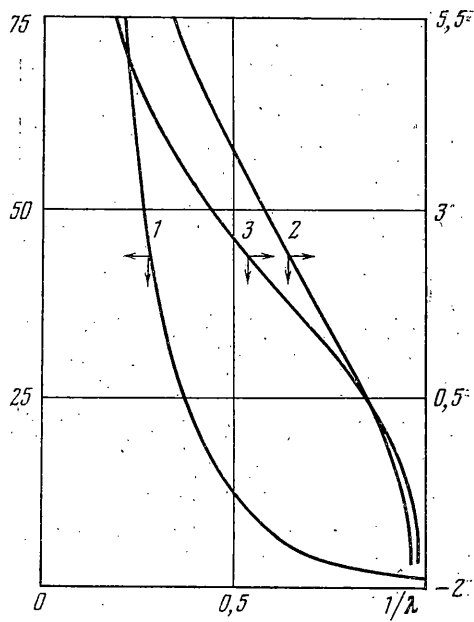
Фиг. 5

щине. Из фиг. 3 видно, что с увеличением степени заполнения λ^{-1} основной перепад давления смещается к концевой части трещины. При этом форма трещины стремится к эллиптической, а $W_N(X)$ — к дуге окружности $W_N(X) = (1 - X^2/\lambda^2)^{1/2}$. На фиг. 4 показаны зависимости от λ^{-1} максимального полуоткрытия трещины W_0 — кривая 1, давления нагнетания P_0 — 2, расхода закачиваемой жидкости $\lg Q_0$ — 3 и величины $\lg \alpha - 4$; здесь же приведены функции $\lg Q_1 = \lg Q(1)$ и $P_0' = Q_0/W_0^3$ — соответственно кривые 5 и 6. Величина Q_1 имеет смысл расхода через симметричные сечения трещины, отвечающие фронту заполнения, а P_0' — градиента давления в середине трещины. Все величины быстро стремятся к нулю при $\lambda^{-1} \rightarrow 1$ и резко возрастают при $\lambda^{-1} \rightarrow 0$.

На фиг. 5 и 6 приведены распределения смещений поверхностей дискообразной трещины $W_N(X)$ и давления жидкости в ней $P_N^\circ(X) = P(X)/P^\circ$, где $P^\circ = (1 - \delta)^{-1}$ и $\delta = (1 - \lambda^{-2})^{1/2}$, в зависимости от параметра λ^{-1} . Величина P° определяет эквивалентное равномерное распределение давления жидкости в трещине $P(X) = P^\circ$, при котором имеет место плавное смыкание ее поверхностей при $X=1$ [2]. Кривые 1–5 соответствуют значениям $\lambda^{-1} = 0,095; 0,285; 0,57; 0,76; 0,95$; их пересечения со штриховой линией



Фиг. 6



Фиг. 7

на фиг. 5 — положениям фронта заполнения трещины. На фиг. 7' показаны зависимости W_0 — кривая 1, $\lg Q_0$ — 2 и $\lg \alpha$ — 3 от λ^{-1} .

Сравнивая форму плоской и дискообразной трещин при одинаковой глубине проникновения жидкости, можно отметить, что максимальное раскрытие дискообразной трещины больше, чем плоской. Кроме того, раскрытие дискообразной трещины более круто убывает вблизи ее центра $X=0$. Это обстоятельство связано с логарифмическим распределением давления в ней в окрестности точки $X=0$. С увеличением λ^{-1} трещина принимает эллиптическую форму и график $W_N(X)$ стремится к дуге окружности. При одной и той же глубине проникновения жидкости в трещину λ^{-1} скорость распространения α и безразмерный расход Q_0 закачиваемой жидкости для дискообразной трещины больше, чем для плоской.

При $\lambda^{-1} \rightarrow 1$ можно найти приближенное решение задачи путем разложения по параметру $\delta = (1 - \lambda^{-2})^{1/2} \rightarrow 0$ [6]. В частности, для нулевого приближения в случае дискообразной трещины будем иметь

$$\begin{aligned} P^{(0)} &= 1 + \delta \quad (0 \leq X \leq 1), & W^{(0)} &= \delta [1 - (X/\lambda)^2]^{1/2} \\ (0 \leq X \leq \lambda), & Q^{(0)} &= \alpha^{(0)} \delta [1 - (X/\lambda)^2]^{1/2} \quad (0 \leq X \leq 1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $P^{(0)}$ получено из выражения для $P^0 = (1 - \delta)^{-1}$ с точностью до малых порядка δ ; в формуле для $W^{(0)}$ опущено слагаемое, выражающееся через эллиптические интегралы.

Используя (3.4), (1.9) и (1.11), находим следующее приближение для давления и скорость роста трещины

$$P^{(1)}(X) = \frac{1}{\ln \delta^{-1}} \ln \left[\frac{\sqrt{1 - (X/\lambda)^2}}{\delta X} \right], \quad \alpha^{(0)} = \frac{\delta^2}{\ln \delta^{-1}} \quad (3.5)$$

Как видно из (3.5), распределение давления $P^{(1)}(X)$ уже имеет логарифмическую особенность при $X=0$. Анализ показал, однако, что выход численного решения на приближенное решение (3.4), (3.5) происходит лишь при значениях параметра δ , отвечающих очень малым значениям λ^{-1} (менее 0,001).

При численном решении осесимметричной задачи ($k=2$) значение давления в узле, совпадающем с $X=0$, не вычислялось, а вычисление интегралов от давления производилось с явным выделением логарифмиче-

ской особенности. Из (1.9) имеем

$$\partial P / \partial X = -A/X; \quad A = Q_0/W_0^3 \quad (X \rightarrow 0) \quad (3.6)$$

Определим давление $P^* = P(X^*)$ на контуре $x = r_0$, соответствующем стенке скважины. Интегрируя (3.6) от $X_0^* = r_0/R_{10}$ до $X^* = r_0/R_1$ и учитывая, что $r_0 \ll R_1$ и $R_1 = R_{10}e^{\alpha\tau}$, получаем

$$P^*(\tau) = P^*(0) + A\alpha\tau \quad (3.7)$$

Таким образом, при распространении дискообразной трещины гидро-разрыва давление на стенке скважины линейно растет со временем. В случае плоской трещины давление на скважине $P^* = P_0$ постоянно. Это обстоятельство позволяет, в принципе, идентифицировать тип трещины на развитой стадии ее распространения в режиме экспоненциально нарастающего расхода закачиваемой жидкости. Если установлено, что трещина является дискообразной ($k=2$), то по измерениям давления на забое скважины $P^*(\tau)$ можно найти угловой коэффициент прямой (3.7) $\propto Q_0/W_0^3$ и с помощью графиков на фиг. 7 определить величины λ , W_0 , Q_0 и α . Далее, если воспользоваться последним соотношением (3.2), то по измерениям расхода $q_0(\tau)$ можно вычислить R_{10} и, следовательно, $R_0 = \lambda R_{10}$; после чего находится радиус трещины $R(\tau)$ и все остальные интересные характеристики.

В случае плоской трещины ($k=1$) давление нагнетания постоянно и совпадает с давлением на стенке скважины P^* . Поэтому параметр λ находится сразу по кривой 2 на фиг. 4. Остальные величины, характеризующие процесс распространения трещины, определяются так же, как и при $k=2$.

В соответствии с классификацией [9] исходная задача о нагнетании жидкости в трещину через скважину конечного радиуса r_0 полностью автомодельна по параметру r_0/R_{10} при стремлении его к нулю. По параметру $\delta(\lambda)$, характеризующему глубину проникновения жидкости в трещину, задача не автомодельна, и потому автомодельная переменная $X = X(x, \tau)$ не представляется степенным одночленом, а выражается в экспоненциальном виде $X = (x/R_{10})e^{-\alpha\tau}$.

4. О роли сил сцепления и горного давления при развитии трещин гидроразрыва. Два рассмотренных автомодельных решения описывают асимптотики решений полной задачи, отвечающие предельным стационарным режимам распространения трещины при постоянном и экспоненциально возрастающем расходе закачиваемой жидкости. При постоянном расходе в процессе нагнетания увеличивается раскрытие трещины и соответственно растет ее гидравлическая проводимость. Однако так как расход остается постоянным, а давление нагнетания падает, то движение жидкости в трещине становится все более медленным и область основных потерь давления в трещине смещается в направлении ее концов. Эффекты перераспределения давления в трещине, расширения границ потока в центральной части трещины и сужения их при приближении к ее концам приводят к тому, что скорость фронта заполнения трещины падает медленнее, чем скорость движения жидкости в ее средней части. В результате глубина проникновения жидкости в трещину возрастает, разность между силами внутреннего давления жидкости на поверхности трещины и силами горного давления падает и определяющее влияние на закономерности распространения трещины начинают оказывать силы сцепления горной породы, локализующиеся вблизи концов трещины. При этом с увеличением размера трещины «замедление» движения в ней жидкости усиливается и асимптотическая стадия процесса описывается соотношением (2.8). Заметим, что размер трещины определяется отношением модуля Юнга к модулю сцепления и объемом закачанной жидкости и не зависит ни от горного давления, ни от вязкости жидкости. Таким образом, при постоянном темпе нагнетания гидродинамические эффекты движения жидкости в трещине затухают со временем и горное давление полностью компенсируется внутренним давлением жидкости. Следует иметь в виду, что именно такой режим нагне-

тания реализуется, как правило, при проведении гидравлического разрыва горных пород на его завершающей стадии. Поэтому пренебрежение силами сцепления [1–3, 7] при определении основных параметров процесса даже при больших размерах образующихся трещин недопустимо.

Условия, при которых горное давление оказывает определяющее влияние на распространение трещины в режиме заданного расхода, реализуются в тех случаях, когда размер трещины достаточно велик ($K/(\sigma\sqrt{2R}) \ll 1$) и, кроме того, фронт заполнения ее жидкостью отстает от концов трещины. Тогда положением фронта заполнения, распределением давления жидкости на поверхности трещины и величиной горного давления полностью определяется форма и размер трещины. Для этого требуется, как минимум, экспоненциальное возрастание расхода со временем, иначе увеличение объема трещины происходит медленнее, чем ее заполнение. Данный результат, на первый взгляд, кажется парадоксальным. Казалось бы, что с увеличением расхода скорость заполнения трещины жидкостью разрыва должна возрастать. Однако этого не происходит, так как определенное количество закачиваемой жидкости все время «тратится» на компенсацию нормальных смещений поверхностей трещины. При экспоненциальном увеличении расхода соотношение между «продольной» (определяемой гидродинамическими факторами) и «поперечной» (определяемой решением задачи теории упругости) составляющими скорости заполнения трещины фиксировано, и потому относительная глубина проникновения жидкости в трещину оказывается постоянной. Другими словами — скорость фронта заполнения трещины пропорциональна скорости смещения ее поверхностей. Очевидно, данные режимы нагнетания практически трудно реализуемы в течение длительного времени. Поэтому полученное в п. 3 решение фактически описывает некоторую начальную стадию реального процесса гидроразрыва (или его промежуточную стадию, если начальный размер трещины недостаточно велик, т. е. $r_0 \ll R_0 \approx 1/2 (K/\sigma)^2$, и влияние сил сцепления сначала также существенно). По мере дальнейшего распространения трещины в условиях ограничений на темпы закачки роль сил горного давления падает, а роль сил сцепления возрастает. Эта стадия гидроразрыва должна описываться решением полной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтов Ю. П., Христианович С. А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. — Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 5, с. 3–41.
2. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. — ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 475–486.
3. Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О распространении горизонтальной трещины в горной породе под воздействием нефилтующейся жидкости в случае постоянного горного давления. — Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 5, с. 166–169.
4. Abe H.; Mura T., Keer L. M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks. — J. Geophys. Res., 1976, v. 81, No. 29, p. 5335–5340.
5. Завосский А. Ф. Распространение круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе. — Изв. АН СССР. МГТ, 1979, № 2, с. 103–109.
6. Песляк Ю. А. Расчет круговой трещины гидроразрыва. — В кн.: Динамика многофазных сред. Новосибирск: Изд-е Ин-та теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1985, с. 188–193.
7. Баренблатт Г. И., Христианович С. А. О модуле сцепления в теории трещин. — Изв. АН СССР. МГТ, 1968, № 2, с. 70–75.
8. Разрушение. Т. 2/Ред. Либовиц. М.: Мир, 1975. 764 с.
9. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
12.VII.1985