

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КОГЕРЕНТНЫХ ПЕРЕХОДОВ

ГРИНФЕЛЬД М. А.

Описание гетерогенных равновесий однокомпонентных фаз значительно упрощается, если в реализующихся конфигурациях деформации оказываются весьма малыми относительно некоторых опорных состояний (для каждой фазы своего). В этой ситуации для ответа на многие физические вопросы достаточно иметь информацию только о значениях термоупругих модулей соответствующих порядков в опорных состояниях. В данной работе подобное описание развивается для когерентных переходов как мартенситного типа, так и переходов с предписанным семейством поверхностей превращения. Не делается, вообще говоря, специальное предположение о виде и малости «собственной» деформации, соответствующей переходу между опорными конфигурациями двух фаз. Полученные уравнения зародышей новой фазы при когерентных превращениях. В предположении о конечности собственной деформации рассматривается плоская задача об образовании включений новой фазы в слое конечной толщины в случае, когда семейство плоскостей превращения параллельно внешним границам слоя. Далее рассматривается проблема образования включений новой фазы при мартенситных переходах (в приближении малой собственной деформации превращения) в бесконечной упругой матрице, подверженной заданным напряжениям на бесконечности. В отличие от ранее решенных задач подобного рода форма и ориентация включения новой фазы не задаются заранее, но определяются в процессе решения задачи. Показывается, что в случае изотропной матрицы включение в равновесном состоянии может принимать форму трехосного эллипсоида (при этом новая фаза может быть анизотропной).

Современным рассмотрением фазовых превращений, использующим аппарат теории упругости [1—3], присущ ряд недостатков. Отметим три из них:

1. Используется представление о скалярном химическом потенциале твердого вещества, тогда как корректное обобщение понятия скалярного химического потенциала жидкости ведет к представлениям о тензоре химического потенциала негидростатически напряженного тела; различные фазовые переходы первого рода в твердых телах влекут введение различных «химических» тензоров [4—6]. При рассмотрении когерентных превращений в лагранжевых переменных наиболее удобен симметричный тензор химического потенциала $\mu^{\alpha\beta}$.

2. Использование приближения линейной теории упругости не дает необходимой точности, поскольку собственные деформации часто весьма велики. Даже в случае сколь угодно малых деформаций структура условий фазового равновесия такова, что точность понятий линейной теории принципиально недостаточна. Наряду с тензорной природой химического потенциала это обстоятельство постоянно ускользает от внимания материаловедов в связи с тем, что при малых деформациях напряжения линейным образом зависят от последних. Однако указанное обстоятельство является необходимым, но не достаточным условием применимости линейной теории. В то же время в отдельных практически важных случаях конечность собственных деформаций ведет лишь к необходимости учета геометрической нелинейности по этим величинам, тогда как для описания поведения вещества в окрестности опорных конфигураций достаточно использовать простое и обозримое описание физически линейной теории: соответствующие уравнения приводятся в третьем разделе статьи.

3. При рассмотрении фазовых переходов положение и форма межфазной границы не могут задаваться произвольно, но должны определяться в процессе решения задачи. Однако даже в классических работах Эшелби [7] по теории когерентных превращений форма включения задается априори и независимо от свойств фаз и характера внешних воздействий. Между тем с чисто формальной точки зрения условия фазового равновесия химического типа, есть дополнительные уравнения для нахождения межфазной границы. В пятом разделе статьи показано, однако, что в случае малой собственной деформации, изотропной бесконечной матрицы и линейных градиентов перемещений на бесконечности могут существовать зародыши новой фазы эллипсоидальной формы (что Эшелби, игнорировавший условия фазового равновесия химического типа, предполагал заранее). Но в отличие от [7] показано, что форма и ориентация равновесного эллипсоида не могут задаваться заранее, но од-

возначно диктуются материальными параметрами фаз, характером собственной деформации и полем напряжений на бесконечности. При этом включение может быть анизотропным и даже физически нелинейным — в то же время часто проводимое изучение эллипсоидальных включений в анизотропной матрице с указанной выше точки зрения лишено физического смысла.

1. Некоторые геометрические соотношения. Обозначим через x^i лагранжевы координаты материальных точек. Будем различать начальную, актуальную и опорные конфигурации материальных частиц. Единственным требованием, налагаемым на начальную конфигурацию, является ее однородность в том смысле, что плотность массы m в ней постоянна, а плотность свободной энергии зависит лишь от абсолютной температуры Θ и градиентов перемещений $U_{,i}$ (отсчитываемых от положения точки с координатой x^i в начальной конфигурации), но не от координат x^i явно. Подчиним выбор лагранжевых координат частиц условию, что начальной конфигурации соответствует аффинная система координат x^i с радиус-вектором $e(x)$, ковариантным базисом e_i , контравариантным базисом e^i и метрическими тензорами g_{ij} , g^{ij} . Очевидно, что выбор начальной конфигурации неединствен. Актуальная конфигурация понимается здесь в обычном смысле [8, 9]: это искомая равновесная (как правило, двухфазная) конфигурация.

Упрощенное описание гетерогенных систем, развиваемое в данной статье, базируется на основном предположении о том, что напряженно-деформированное состояние фаз в актуальной равновесной конфигурации мало отличается от некоторых выделенных — при этом подразумевается, что физические параметры выделенных состояний изучены заранее. Выделенными (будем называть их опорными¹) конфигурациями часто удобно выбирать такие, в которых однофазное вещество не напряжено [1–3, 7], однако это необязательно. (ненапряженное существование какой-либо фазы может быть невозможным, что типично для вещества недр небесных тел). В отличие от чисто механического подхода, который использовал Эшелби [7], в рамках полной термодинамической теории при описании опорных состояний следует указывать не только геометрическую конфигурацию, но и соответствующую опорную температуру (см. сноску 1). Как и начальная, опорные конфигурации могут в известной мере вводиться по-разному, соотносясь со спецификой конкретной задачи.

Будем использовать метки плюс и минус для различения двух фаз и предположим, что переходам из начальной конфигурации в опорные соответствуют аффинные деформации с полями перемещений (фиг. 1):

$$w_{\pm}(x) = (d_{\pm}^i + d_{,i\pm}^j x^j) e_i \quad (1.1)$$

Из геометрических соображений приходим к следующим формулам для ковариантных базисов $x_{i\pm}$, ковариантных метрических тензоров $x_{ij\pm}$, контравариантных метрических тензоров x_{\pm}^{ij} и контравариантных базисов $x_{\pm}^i = x_{\pm}^{ij} x_{j\pm}$ опорных конфигураций:

$$\begin{aligned} x_{i\pm} &= a_{,i\pm}^j e_j, & e_k &= b_{,k\pm}^l x_{l\pm}, & x_{\pm}^i &= b_{,k\pm}^i e^k \\ e^h &= a_{,l\pm}^h x_{\pm}^l, & a_{,i\pm}^j &= \delta_i^j + d_{,i\pm}^j, & a_{,i\pm}^j b_{,k\pm}^i &= \delta_k^j \\ x_{ij\pm} &= a_{,i\pm}^k a_{,j\pm}^l g_{kl}, & g_{kl} &= x_{ij\pm} b_{,k\pm}^i b_{,l\pm}^j \\ x_{\pm}^{ij} &= g^{kl} b_{,k\pm}^i b_{,l\pm}^j, & g^{kl} &= x_{\pm}^{ij} a_{,i\pm}^k a_{,j\pm}^l \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обозначим через $D_{,i}^j$ «собственный» градиент превращения, описывающий деформацию перехода между опорными конфигурациями: $d_{,i\pm}^j - d_{,i-}^j$.

Ко- и контравариантные компоненты некоторого вектора r по базисам e_i , e^i , $x_{i\pm}$, x_{\pm}^i будем обозначать соответственно: r_i , r^i , $r_{i\pm}$, r_{\pm}^i . Отме-

¹ Гринфельд М. А. Гетерогенные системы с поверхностями фазовых превращений (применение вариационных принципов): Автореф. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. М.: Ин-т физики Земли, 1983. 34 с.

тим, что использование нескольких метрических тензоров вынуждает специально оговаривать смысл операций с индексами.

Рассмотрим некоторую актуальную конфигурацию, содержащую две макроскопические области, заполненные различными фазами. Обозначая через U_{\pm} полные перемещения частиц фаз, отсчитываемые от начальной конфигурации, а через u_{\pm} — дополнительные перемещения, отсчитываемые от опорных конфигураций соответствующих фаз, имеем $U_{\pm} = u_{\pm} + w_{\pm}$.

Соотношения (1.1), (1.2) дают следующие связи между ковариантными компонентами полей u_{\pm} по базису начальной конфигурации $u_{i\pm}$ и соответствующим базисам опорных конфигураций $u_{i\pm}^*$, а также формулы для полей $U_{h\pm}$ и их производных:

$$\begin{aligned} u_{i\pm}^* &= u_{j\pm} a_{i\pm}^j, & u_{i\pm} &= u_{j\pm}^* b_{i\pm}^j, & U_{h\pm} &= u_{h\pm} + d_{j\pm} x^j g_{ih} = \\ &= d_{j\pm}^i x^j g_{ih} + u_{j\pm}^* b_{h\pm}^j, & U_{h,l\pm} &= d_{l\pm}^i g_{ih} + u_{j,l\pm}^* b_{h\pm}^j, \\ u_{i,l\pm}^* &= (U_{h,l\pm} - d_{l\pm}^j g_{jh}) a_{i\pm}^h \end{aligned} \quad (1.3)$$

Условия когерентности разрыва имеют вид

$$U_{i+} = U_{i-}, \quad [(d^i + d_{j\pm}^i x^j) g_{ih} + u_{j\pm}^* b_{h\pm}^j]_{-}^{+} = 0 \quad (1.4)$$

Плотности в опорных конфигурациях M_{\pm} даются соотношением

$$M_{\pm} |\delta_j^i + d_{j\pm}^i| = m \quad (1.5)$$

2. Точные условия фазового равновесия при когерентных превращениях. Обозначим через $\varphi(U_{i,j}, \Theta)$ зависимость плотности свободной энергии на единицу массы простого упругого вещества, которое может существовать в различных фазовых состояниях. В используемых обозначениях точные нелинейные условия равновесия гетерогенной системы при когерентных превращениях имеют вид [4–6]:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi}{\partial U_{i,j}} = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial U_{i,j}} \right]_{-}^{+} n_j = 0 \quad (2.1)$$

$$[\mu^{ij}]_{-}^{+} n_i n_j = 0, \quad \int d\xi [\mu^{ij}]_{-}^{+} n_i n_j = 0 \quad (2.2)$$

$$\mu^{ij} = \varphi g^{ij} - (\delta_k^i + g^{il} U_{h,l}) \partial \varphi / \partial U_{h,j}$$

Первое из силовых уравнений (2.1) выставляется внутри фаз, второе — на межфазной границе ξ (n_i — компоненты единичной нормали к прообразу этой границы в начальной конфигурации). Первое из условий равновесия (2.2) выставляется на когерентной границе мартенситного типа, а второе — в случае переходов с предписанным семейством поверхностей превращения.

Вместо единой для обеих фаз функции φ введем две новые по формуле $\psi_{\pm}(u_{h,l\pm}^*, \theta) \equiv \varphi(d_{l\pm}^i g_{ih} + u_{j,l\pm}^* b_{h\pm}^j, \theta)$.

С помощью ψ_{\pm} уравнения (2.1) и тензор химического потенциала μ^{ij} представляются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial u_{m,j\pm}^*} a_{i\pm}^m \right) &= 0, \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial u_{m,j}^*} a_{i\pm}^m \right]_{-}^{+} n_j = 0 \\ \mu_{\pm}^{ij} &= \psi_{\pm} g^{ij} - \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial u_{m,j\pm}^*} g^{il} (x_{ml\pm} + u_{m,l\pm}^*) \end{aligned} \quad (2.3)$$

3. Физически линейная теория при конечной собственной деформации превращения. Если в реализующихся конфигурациях деформации оказываются малыми относительно опорных состояний фаз, может оказаться достаточной информация только о значениях модулей упругости различных порядков в опорных конфигурациях. Под тензорами изотермических модулей упругости в некотором состоянии понимаются значения в этом состоянии производных свободной энергии по градиентам перемеще-

ний и температуре: эти тензоры могут определяться по-разному и зависят от того, на какие оси проектируются перемещения, от какой начальной конфигурации они отсчитываются, в какой метрике дифференцируются и так далее. Весьма удобно понимать под тензорами модулей упругости производные по градиентам перемещений в метрике опорного состояния, причем перемещения отсчитываются от опорного состояния и раскладываются по его лагранжеву базису. Удобство так вводимых тензоров связано с простотой соответствующих формул расчета скоростей слабых волн по модулям второго порядка (в отличие от тензоров модулей скорости волн являются физической реальностью, а не предметом соглашения — вопрос о восстановлении модели нелинейно-упругого тела по данным о скоростях волн рассматривается в [9]).

Зная термоупругие модули, можно найти коэффициенты разложения функций $\psi_{\pm}(u_{i,j\pm}^*, \Theta)$ в ряды Тейлора

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(u_{i,j\pm}^*, \theta) = & \psi_{\pm}^{\circ} + \psi_{\pm}^{ij} u_{i,j\pm}^* + \psi_{\theta\pm} T + 1/2 \psi_{\theta\theta\pm} T^2 + \\ & + \psi_{\theta\pm}^{ij} u_{i,j\pm}^* T + 1/2 \psi_{\pm}^{ijkl} u_{i,j\pm}^* u_{k,l\pm}^* + \dots, \quad T = \theta - \theta^{\circ} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Справедливы следующие связи коэффициентов рядов с тензором модулей упругости второго порядка (в узком смысле) c_{\pm}^{ijkl} , тензором модулей температурного расширения $c_{\theta\pm}^{ij}$, тензорами напряжений Пиолы — Кирхгофа p_{\pm}^{ji} и удельными энтропией η и теплоемкостью при постоянном объеме c_u на единицу массы в опорных конфигурациях [8, 9]:

$$\psi_{\pm}^{ijkl} = M_{\pm}^{-1} c_{\pm}^{ijkl}, \quad \psi_{\theta\pm}^{ij} = -M_{\pm}^{-1} c_{\theta\pm}^{ij} \quad (3.2)$$

$$\psi_{\theta\pm} = -\eta_{\pm}, \quad \psi_{\theta\theta\pm} = -\Theta^{\circ} c_{u\pm}, \quad M_{\pm} \psi_{\pm}^{ij} = p_{\pm}^{ij}$$

Если фазы изотропны и опорные конфигурации являются неискаженными, коэффициенты разложений (3.1) представляются в виде [10]:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}^{ij} = & -\frac{p_{\pm}}{M_{\pm}} x_{\pm}^{ij}, \quad \psi_{\theta\pm}^{ij} = -\frac{K_{\pm} \alpha_{\pm}}{M_{\pm}} x_{\pm}^{ij}, \quad \psi_{\pm}^{ijkl} = \frac{p_{\pm}}{M_{\pm}} (x_{\pm}^{il} x_{\pm}^{jk} - x_{\pm}^{ij} x_{\pm}^{kl}) + \\ & + \frac{\lambda_{\pm}}{M_{\pm}} x_{\pm}^{ij} x_{\pm}^{kl} + \frac{\mu_{\pm}}{M_{\pm}} (x_{\pm}^{ik} x_{\pm}^{jl} + x_{\pm}^{il} x_{\pm}^{jk}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь p_{\pm} — давления в опорных конфигурациях, λ_{\pm} , μ_{\pm} , K_{\pm} — соответствующие изотермические модули Ламе и объемного сжатия, α_{\pm} — температурные коэффициенты объемного расширения. В случае анизотропных фаз при определении структуры тензоров термоупругих модулей следует учитывать соотношения симметрии [11, 12].

Используя (1.2), (1.3), (2.3), (3.1) — (3.3), с точностью до членов второго порядка малости по $u_{i,j}^*$ и T тензор μ^{ij} представляем в виде

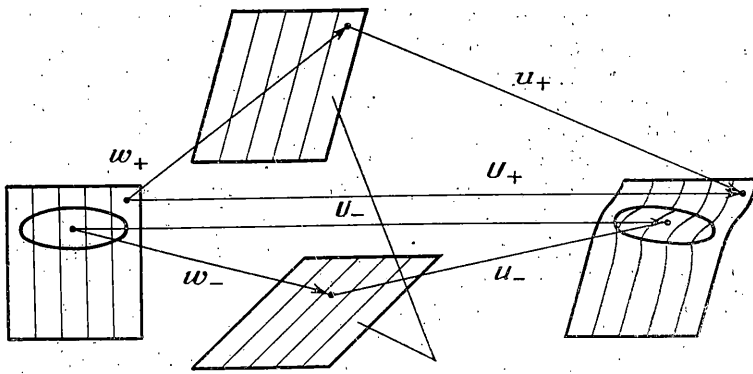
$$\begin{aligned} \mu_{\pm}^{ij} = & \psi_{\pm}^{\circ} g^{ij} + u_{k,l\pm}^* (\psi_{\pm}^{hl} g^{ij} - \psi_{\pm}^{kj} g^{il} - \psi_{\pm}^{mjh} g^{ir} x_{mr\pm}) + \\ & + T (\psi_{\theta\pm} g^{ij} - \psi_{\theta\pm}^{mj} x_{ml\pm} g^{il}) + u_{p,q\pm}^* u_{r,s\pm}^* (1/2 \psi_{\pm}^{pqrs} g^{ij} - \psi_{\pm}^{rj pq} g^{is} - 1/2 \psi_{\pm}^{mj p q r s} x_{ml\pm} g^{il}) + \\ & + u_{p,q\pm}^* T (\psi_{\theta\pm}^{pq} g^{ij} - \psi_{\theta\pm}^{pj} g^{iq} - \psi_{\theta\pm}^{mj pq} g^{il} x_{ml\pm}) + 1/2 T^2 (\psi_{\theta\theta\pm} g^{ij} - \psi_{\theta\theta\pm}^{mj} g^{il} x_{ml\pm}) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя разложения (3.1), (3.4) в (2.3), переходя к компонентам u_i и ограничиваясь членами первого порядка по $u_{i,j\pm}$ и T , приводим уравнения равновесия (2.1), (2.2) для случая мартенситных когерентных превращений к виду

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (\psi_{\pm}^{mjpl} a_{.m}^i a_{.p}^k a_{.r\pm}^h u_{k,l\pm}) = 0 \quad (3.5)$$

$$[\psi_{\pm}^{mjpl} a_{.m}^i a_{.p}^k a_{.r\pm}^h u_{k,l\pm} + \psi_{\theta\pm}^{mj} a_{.m}^i T]_{-}^{+} n_j = 0$$

$$[\psi_{\pm}^{\circ} g^{ij} + (\psi_{\pm}^{hl} g^{ij} - \psi_{\pm}^{kj} g^{il} - \psi_{\pm}^{mjh} g^{ir} x_{mr}) a_{.k}^p u_{p,l} + (\psi_{\theta\pm} g^{ij} - \psi_{\theta\pm}^{mj} x_{ml} g^{il}) T]_{-}^{+} n_i n_j = 0 \quad (3.6)$$



Фиг. 1

При изучении когерентных переходов с предписанным семейством поверхностей превращения соотношение (3.6) должно пониматься в интегральном смысле.

Для замыкания указанной системы первого приближения следует воспользоваться граничными условиями на внешней поверхности системы, а также условием когерентности в форме (эквивалентной (1.4)):

$$[(d^i + d^i_j x^j) g_{ik} + u_k]^- = 0 \quad (3.7)$$

Соотношения (3.5)–(3.7) позволяют описать гетерогенные фазовые равновесия в рамках физически линейной теории (в нее входят лишь тензоры модулей упругости второго порядка). В то же время, подобная теория не связана с предположением о малости собственной деформации, которая в силу (1.2), (1.3) входит в систему уравнений равновесия в весьма сложной нелинейной форме (в этом смысле, очевидно, можно говорить о геометрически нелинейной теории). Принципиальным преимуществом физически линейной теории является линейность дифференциальных уравнений равновесия (3.5); хотя в целом проблема остается глубоко нелинейной вследствие наличия неизвестной межфазной границы, это позволяет в некоторых конкретных случаях эффективно проинтегрировать систему уравнений равновесия (и лишь потом проверить, что полученные поля перемещений оказываются весьма малыми в соответствии с гипотезами, заложенными при выводе указанной системы). В следующем пункте приводится пример, когда предлагаемая теория заведомо приводит к корректным результатам.

4. Образование зародышей новой фазы при когерентных переходах с предписанным семейством поверхностей превращения. Рассмотрим плоский слой с защемленной нижней границей, упругое вещество которого может испытывать когерентные фазовые переходы с предписанным семейством плоскостей превращения, параллельных внешней поверхности слоя (фиг. 2). Совместим однородную однофазную начальную конфигурацию с опорной конфигурацией фазы «плюс» и введем в ней лагранжеву декартову систему координат, направив ось x^2 перпендикулярно слою, а x^1 — параллельно ему (для простоты далее рассматривается плоская задача). Пусть аффинная деформация d^i_{j-} не искажает семейство плоскостей (линий) превращения ($e_1 = x_{1-}$), что влечет $d^j_{1-} = 0$. В то же время величины $D_i = g_{ij} d^j_{i-}$ предполагаются конечными (D_1 характеризует конечный сдвиг, а D_2 — конечное сжатие слоя); считаем также, что поле w_- оставляет на месте нижнюю кромку слоя $x^2 = 0$, что дает $d^i_{i-} = 0$.

В качестве опорных выберем ненапряженные конфигурации фаз; опорная температура Θ^0 соответствует совпадению плотностей свободных

энергий фаз на единицу массы. Обозначим через H и M_+ толщину и плотность слоя в опорной конфигурации фазы плюс. Указанное состояние слоя возмущается изменением абсолютной температуры на величину εT_1 и перемещением точек верхней кромки на малый вектор $\varepsilon v_i e^i$, где $\varepsilon \ll 1$. Тогда, наряду с решением с однофазным состоянием слоя, естественно предположить появление двухфазной гетерогенной конфигурации с тонким зародышем фазы «минус», содержащимся внутри фазы плюс. Переходя к расчету последней конфигурации, представим поля дополнительных перемещений фаз, лагранжиану координату нижней кромки включения $s=x^2$ и его толщину (в геометрии начальной конфигурации) h в виде рядов

$$\mathbf{u}_+ = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N \mathbf{u}_{N+}, \quad \mathbf{u}_- = -\mathbf{w} \Big|_{\substack{x^1=0 \\ x^2=s}} + \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N \mathbf{u}_{N-} = -s D_p \mathbf{e}^p + \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N \mathbf{u}_{N-}, \quad (4.1)$$

$$s = \sum_{N=0}^{\infty} \varepsilon^N s_N, \quad h = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N h_N$$

Первый член в разложении поля \mathbf{u}_- введен для компенсации «увлечения» частиц, порождаемого переходом в опорную конфигурацию фазы минус всего слоя, поскольку в актуальной конфигурации нижняя часть слоя остается в фазовом состоянии плюс. В компонентной форме первые два из соотношений (4.1) принимают вид

$$u_{i+} = \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N u_{iN+}, \quad u_{i-} = -D_i s_0 + \sum_{N=1}^{\infty} \varepsilon^N (u_{iN} - D_i s_N). \quad (4.2)$$

Подставляя разложения (4.2) в условия фазового равновесия (2.1), (2.2), с помощью соотношений (3.1), (3.4) в первом порядке по ε получаем для $u' = u_i$ и T_1 уравнения, в точности совпадающие с (3.5), (3.6). Последнее с учетом ненапряженности опорных конфигураций принимает вид

$$\int_{\xi} d\xi [(\eta g^{ij} + \psi_{\theta}^{mj} x_{m1} g^{i1}) T_1 + \psi^{mjkl} g^{ir} x_{mr} a_{\cdot h}^p u_{p,l}']_{-}^{+} n_i n_j = 0 \quad (4.3)$$

В первом приближении по ε условие когерентности (3.7) на верхней и нижней кромках зародыша, а также кинематическое условие на верхней кромке слоя принимают вид

$$[u_k']_{-}^{+} \Big|_{x^2=s_0} = D_k h_1, \quad [u_k']_{-}^{+} \Big|_{x^2=s_0} = 0, \quad u_k' \Big|_{x^2=H} = v_k(x^1) \quad (4.4)$$

Рассмотрим решения системы (3.5), (4.3), (4.4) для постоянного на поверхности слоя поля перемещений v_k . Соответствующее решение имеет постоянные внутри каждой из фаз градиенты перемещений $u_{k,l\pm} = \kappa_{kl\pm}$. Из граничных условий (4.4) получаем $\kappa_{k1\pm} = 0$. Отсюда немедленно находим следующие выражения для полей перемещений частиц внутри фаз (индексы a, b введены для различения полей перемещений в нижней и верхней части фазы плюс соответственно):

$$u_{k+a}' = \kappa_{k2+} (x^2 - H) + v_k, \quad u_{k+b}' = \kappa_{k2+} x^2 \quad (4.5)$$

$$u_{k-}' = \kappa_{k2-} x^2 + v_k$$

Для решений указанного вида дифференциальные уравнения равновесия внутри фаз удовлетворяются автоматически, а для нахождения семи неизвестных $\gamma_{k\pm} = \kappa_{k2\pm}$, v_k , h_1 уравнения (3.5), (4.3), (4.4) дают необходимое число независимых соотношений. Первые два из уравнений (4.4) с помощью (4.5) дают

$$\gamma_{k+} s_0 = \gamma_{k-} s_0 + v_k, \quad \gamma_{k+} (s_0 - H) + v_k - D_k h_1 = \gamma_{k-} s_0 + v_k \quad (4.6)$$

Из (4.6) вытекает соотношение $\gamma_{k+} = H^{-1} (v_k - h_1 D_k)$, которое позволяет привести второе из уравнений (3.5) и уравнение (4.3) к виду, замкнуто-

му относительно неизвестных γ_{k-} , h_1 (в силу однородности решения в последнем уравнении снят интеграл по межфазной границе)

$$\psi_-^{mjpl} a_{.m-.}^i a_{.p-}^k \gamma_{k-} + \psi_+^{ijkl} n_j n_l D_k H^{-1} h_1 = \psi_+^{ijkl} n_j n_l v_k H^{-1} + [\psi_0^{mj} a_{.m.}^i]_{-}^{+} n_j T_1 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \psi_-^{mjhl} g^{ir} x_{mr-.}^p a_{.k-.}^p n_i n_j n_l \gamma_{p-} + \psi_+^{ijkl} n_i n_j n_l D_k H^{-1} h_1 = \\ & = \psi_+^{ijkl} n_i n_j n_l v_k H^{-1} + [\eta g^{ih} + \psi_0^{mj} x_{mi} g^{il}]_{-}^{+} n_i n_j T_1 \end{aligned}$$

Координата нижней кромки включения s_0 в рассматриваемом случае оказывается произвольной.

Полный расчет равновесной гетерогенной конфигурации удается провести для случая изотропных в опорных конфигурациях фаз. В этом случае с помощью (1.2), (3.3) получаем

$$\begin{aligned} & \psi_-^{mjpl} a_{.m-.}^i a_{.p-}^k = \frac{\lambda_-}{M_-} g^{ir} g^{kq} b_{.r-.}^j b_{.q-}^l + \\ & + \frac{\mu_-}{M_-} (g^{ih} x_{.}^{jl} + g^{ir} g^{kq} b_{.r-.}^j b_{.q-}^l), \quad \psi_-^{mjkl} x_{mr-.}^p a_{.k-.}^p g^{ir} = \\ & = \frac{\lambda_-}{M_-} g^{ij} g^{pm} b_{.m-}^l + \frac{\mu_-}{M_-} (g^{ir} a_{.r-}^p x_{.}^{jl} + g^{il} g^{pm} b_{.m-}^j) \\ & \psi_0^{mj.} a_{.m-}^i = \frac{K_- \alpha_-}{M_-} g^{im} b_{.m-}^j, \quad \psi_0^{ij} = -\frac{K_+ \alpha_+}{M_+} g^{ij} \\ & \psi_+^{ijkl} = \frac{\lambda_+}{M_+} g^{ij} g^{kl} + \frac{\mu_+}{M_+} (g^{ih} g^{jl} + g^{il} g^{jh}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Матрицы $a_{.j-}^i$, $b_{.j-}^i$, x_{ij-} , x_{-}^{ij} в двумерном случае принимают вид (их аналоги в фазе плюс — единичные матрицы):

$$\begin{aligned} & a_{.1-}^1 = 1, \quad a_{.2-}^1 = D_1, \quad a_{.1-}^2 = 0, \quad a_{.2-}^2 = D_2 + 1, \quad b_{.1-}^1 = 1 \quad (4.9) \\ & b_{.2-}^1 = -D_1(D_2 + 1)^{-1}, \quad b_{.1-}^2 = 0, \quad b_{.2-}^2 = (D_2 + 1)^{-1}, \quad x_{11-} = 1 \\ & x_{12-} = x_{21-} = D_1, \quad x_{22-} = D_1^2 + (D_2 + 1)^2, \quad x_{-}^{11} = 1 + D_1^2(D_2 + 1)^{-2} \\ & x_{-}^{12} = x_{-}^{21} = -D_1(D_2 + 1)^{-2}, \quad x_{-}^{22} = (D_2 + 1)^{-2} \end{aligned}$$

С помощью (4.7) — (4.9) находим следующие формулы для толщины зародыша, деформаций фаз и напряжений внутри них в первом порядке по параметру ε :

$$\begin{aligned} & h = \frac{\varepsilon}{\chi} \{ D_2(\lambda_+ + 2\mu_+) v_2 + D_1 \mu_+ v_1 - ([\eta]_{-}^{+} M_+ + \alpha_+ K_+ D_2) H T_1 \} \quad (4.10) \\ & u_{1,2+} = \frac{\varepsilon}{\chi} \left\{ \frac{D_2^2 D_1}{H} (\lambda_+ + 2\mu_+) \left(\frac{v_1}{D_1} - \frac{v_2}{D_2} \right) + ([\eta]_{-}^{+} M_+ + \alpha_+ K_+ D_2) D_1 T_1 \right\} \\ & u_{2,2+} = \frac{\varepsilon}{\chi} \left\{ -\frac{D_2 D_1^2}{H} \mu_+ \left(\frac{v_1}{D_1} - \frac{v_2}{D_2} \right) + ([\eta]_{-}^{+} M_+ + \alpha_+ K_+ D_2) D_2 T_1 \right\} \\ & u_{1,2-} = \frac{\mu_+ (D_2 + 1)}{\mu_-} u_{1,2+}, \\ & u_{2,2-} = \frac{(D_2 + 1)(\lambda_+ + 2\mu_+)}{\lambda_- + 2\mu_-} \left(u_{2,2+} - \frac{\alpha_+ K_+ - \alpha_- K_-}{\lambda_+ + 2\mu_+} T_1 \right), \\ & u_{i,1+} = u_{i,1-} = 0, \quad \chi = \mu_+ D_1^2 + (\lambda_+ + 2\mu_+) D_2^2 \\ & \varepsilon^{-1} \sigma_{ij\pm} = \lambda_{\pm} g^{hl} u'_{h,l\pm} g_{ij} + 2\mu_{\pm} u'_{(i,j)\pm} - \alpha_{\pm} K_{\pm} T_{\pm} g_{ij} \end{aligned}$$

Рассмотрим следствия соотношений (4.10) в частных случаях. При

$D_1=0$ на основании этой системы получаем

$$\varepsilon^{-1}\sigma_{21+}=\mu_+H^{-1}v_1, \quad \varepsilon^{-1}\sigma_{22+}=[\eta]^{-+}M_+D_2^{-1}T_1=-\frac{[\eta]^{-+}}{[M^{-1}]^+}T_1 \quad (4.11)$$

Второе из соотношений (4.11) по смыслу и форме близко соотношению Клапейрона — Клаузиуса для системы жидкость — пар. Для равновесных параметров системы жидкость — изотропное твердое тело имеются различные независимые аналоги соотношений Клапейрона — Клаузиуса [13], одно из которых совпадает с указанным выше. Однако в данном случае установлена справедливость обсуждаемого соотношения при когерентных превращениях, когда на границе фаз действуют также касательные напряжения.

Величины $\varepsilon v_1 H^{-1}$ и $\varepsilon v_2 H^{-1}$ можно отождествить с малой эффективной деформацией сдвига слоя (параллельного внешним граням) и осевого сжатия перпендикулярно образующим слоя соответственно. Коэффициент пропорциональности между $\varepsilon v_1 H^{-1}$ и σ_{21+} играет роль эффективного модуля сдвига μ_{eff} , а между $\varepsilon v_2 H^{-1}$ и σ_{22+} — эффективного модуля осевого сжатия E_{eff} . В этом смысле соотношения (4.11) приводят к значениям $\mu_{\text{eff}}=\mu_+$, $E_{\text{eff}}=0$ для эффективных изотермических модулей.

В случае $D_2=0$ соотношения (4.11) дают соответственно

$$\varepsilon^{-1}\sigma_{21+}=[\eta]^{-+}M_+D_1^{-1}T_1, \quad \varepsilon^{-1}\sigma_{22+}=(\lambda_++2\mu_+)H^{-1}v_2-\alpha_+K_+T_1 \quad (4.12)$$

Соотношения (4.12) дают $\mu_{\text{eff}}=0$, $E_{\text{eff}}=\lambda_++2\mu_+$. В более общей ситуации, когда $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$, соотношения (4.11) приводят к следующим значениям эффективных модулей:

$$\frac{E_{\text{eff}}}{\lambda_++2\mu_+}=\frac{\mu_+D_1^2}{\mu_+D_1^2+(\lambda_++2\mu_+)D_2^2}, \quad \frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu_+}=\frac{(\lambda_++2\mu_+)D_2^2}{\mu_+D_1^2+(\lambda_++2\mu_+)D_2^2} \quad (4.13)$$

Из (4.13) вытекают неравенства

$$0 \leq \mu_{\text{eff}}/\mu_+ \leq 1, \quad 0 \leq E_{\text{eff}}/(\lambda_++2\mu_+) \leq 1 \quad (4.14)$$

Согласно рассмотренным примерам, оценки (4.14) неупрощаемы. Получивший распространение метод осреднения, основанный на идее двухмасштабных разложений, с соответствующими коррективами допускает перенесение на двухфазные гетерогенные системы [14]. Помимо формул (4.13) он позволяет найти значения остальных осредненных модулей упругости.

Отметим, что в изотермическом случае упругие фазы остаются ненапряженными, если перемещения верхней границы удовлетворяют условию $v_1 D_2 = v_2 D_1$: в этой ситуации перемещения границы происходят не за счет упругого деформирования, а за счет подрастания зародыша новой фазы.

Аналогичный анализ образования зародышей новой фазы может быть проведен в случае, когда собственная деформация превращения, сохраняя направления базисных векторов в плоскостях превращения, порождает в этих плоскостях деформации растяжения — сжатия порядка ε . Пусть в рассмотренном выше двумерном случае в тензоре $d_{i,j}^2$ появляется дополнительная ненулевая компонента $d_{1,-}^1 = \varepsilon \Delta$. Аналогичный проведенному выше прямой расчет для случая изотропных фаз показывает, что в рассматриваемом более общем случае формулы (4.11) для толщины зародыша h_1 и градиентов перемещений в фазе плюс $u_{i,j+}$ остаются в силе, тогда как градиенты перемещений в фазе минус $u_{i,j-}$ определяются теперь соотношениями

$$u_{1,1-} = -\varepsilon \Delta, \quad u_{2,1-} = 0, \quad u_{1,2-} = \frac{\mu_+}{\mu_-} (D_2 + 1) u_{1,2+} + \varepsilon \Delta D_1$$

$$u_{2,2-} = (D_2 + 1) \frac{\lambda_+ + 2\mu_+}{\lambda_- + 2\mu_-} \left(u_{2,2+} - \frac{\alpha_+ K_+ - \alpha_- K_-}{\lambda_+ + 2\mu_+} T_1 \right) - \varepsilon (D_2 + 1) \frac{\lambda_-}{\lambda_- + 2\mu_-} \Delta$$

Вопрос о расчете фазового равновесия однородно деформированных упругих полупространств сводится к решению линейных алгебраических уравнений. Подсчет числа независимых уравнений и неизвестных показывает, что параметры равновесной конфигурации определяются однозначно, если известны деформации одной из фаз (например, $u_{i,j+}$) и ориентация нормали к межфазной границе n_i . В частности, при этом однозначно определяется температура фазового равновесия. Нижеследующая формула в первом приближении по ε дает соответствующую функцию для рассмотренной выше плоской задачи с матрицей d^i_{j-} , слабо деформирующей плоскости превращения:

$$T_1\{[\eta]^- M_+ + [K\alpha]^- (D_2+1)\} = u'_{i,1+} \lambda_+ D_2 + \\ + u'_{i,2+} \mu_+ D_1 + u'_{i,1+} (\mu_+ - \mu_-) D_1 + u'_{i,2+} (\lambda_+ + 2\mu_+) D_2 \quad (4.15)$$

Согласно формуле (4.15), при стремлении собственного градиента d^i_{j-} к нулю поправка к опорной температуре в первом приближении по ε также стремится к нулю. Если же собственный градиент имеет порядок ε , то температурная поправка становится порядка ε . Как станет ясно из следующего раздела, эта ситуация является общей — при различных переходах равновесным гетерогенным конфигурациям с собственным градиентом порядка ε соответствует диапазон изменения абсолютной температуры порядка ε^2 . Но тогда в уравнении (3.6) члены нулевого порядка выпадают в силу выбора опорных конфигураций, линейные — в силу второго из уравнений (3.5) и малости собственной деформации, так что в уравнениях химического типа оказываются существенными члены второго порядка малости. Однако в этой ситуации точность соотношения (3.6) оказывается заведомо недостаточной, так как ему соответствует отбрасывание в разложении тензора химического потенциала μ^{ij} (3.4) членов именно того порядка, учет которых становится принципиально необходимым.

5. Уравнения физически линейной теории при малой собственной деформации. Образование зародышей при мартенситных переходах. Будем считать, что в опорных конфигурациях обе фазы не напряжены, а опорная температура соответствует совпадению плотности свободных энергий фаз на единицу массы. Аффинную деформацию, связывающую опорные конфигурации фаз, будем считать малой $w_{i\pm} = \varepsilon \Delta_{ij\pm} x^j$, $\Delta_{ij} \sim 1$, $\varepsilon \ll 1$. Пусть на внешней границе системы заданы возмущающие поля перемещений либо поверхностных сил, имеющие порядок ε ; кроме того, состояние системы возмущается изменением абсолютной температуры $\varepsilon^2 T_2$ (возможны также постановки, в которых изменение температуры не задается, но рассчитывается на основании других данных).

Решение уравнений гетерогенного фазового равновесия в рассматриваемом случае будем искать в виде рядов по малому параметру ε

$$u_{\pm}^i = \sum_{N=0}^{\infty} u_{\pm N}^i \varepsilon^N, \quad x^i(\xi^{\alpha}, \varepsilon) = \sum_{N=0}^{\infty} x_{N}^i(\xi^{\alpha}) \varepsilon^N \quad (5.1)$$

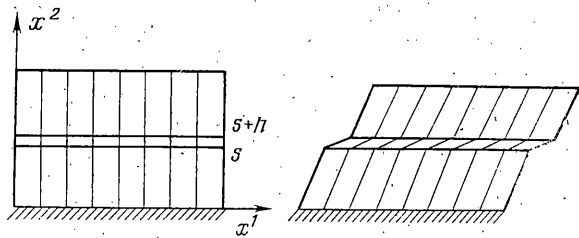
где u_{\pm}^i — поля дополнительных перемещений фаз, $x^i(\xi^{\alpha}, \varepsilon)$ — уравнение межфазной границы Σ .

Подставляя ряды (5.1) в (2.1), (2.2), (3.7) и используя разложения (3.1), (3.4), получаем приравниванием коэффициентов при степенях ε

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (c_0^{ijhl} u'_{h,l\pm}) = 0, \quad [c_0^{ijhl} u'_{h,l}]^- n_{j0} = 0, \quad [u'_j]^- = -[\Delta_{ji}]^+ x^i \quad (5.2)$$

$$m[\eta]^+ T_2 = \frac{1}{2} [c_0^{ijhl} u'_{i,j} u'_{h,l}]^+ - [c_0^{iphl} u'_{h,l} (u'_{(i}{}^a) + \Delta_{(i}{}^a)]^- n_{p0} n_{q0} \quad (5.3)$$

Здесь n_{p0} — компоненты единичной нормали к поверхности x_0^i . «Градус» обозначает, что значение тензора модулей упругости рассчитывается при $\varepsilon=0$ (в силу (3.2), (3.3) при малой собственной деформации эти



Фиг. 2

тензоры зависят от ε). Для получения (5.3) в соотношении (2.2) следует приравнять члены при ε^2 , а затем исключить модули упругости третьего порядка с помощью соотношения, получаемого приравнением членов при ε^2 во втором из уравнений (2.1).

Воспользуемся соотношениями (5.2), (5.3) для изучения образования зародышей новой фазы при когерентных мартенситных превращениях внутри безграничной изотропной упругой матрицы, подверженной на бесконечности воздействию поля перемещений, линейно зависящего от координат $u_i(x) \rightarrow \kappa_{ij}x^j$ при $x \rightarrow \infty$ (фиг. 2). В рассматриваемом случае для некоторых областей изменения κ_{ij} (сами эти области зависят от физических параметров фаз и могут вырождаться) существуют зародыши в форме трехосных эллипсоидов, при этом образующаяся фаза может быть анизотропной. По указанным выше причинам, развиваемый здесь подход существенно отличается от развитого Эшелби [7]. Однако, если доказано, что включение может иметь форму эллипсоида (это будет сделано ниже), соответствующие поля перемещений внутри включения и в матрице представимы в форме Эшелби [7]:

$$u'_{i+} = \kappa_{ij}x^j + \gamma_1 \tau_{ij} F_{,i}^j + \gamma_2 \tau_{jh} \Phi_{,i}^{j,h}, \quad u'_{i-} = \beta_{ij}x^j \quad (5.4)$$

где τ_{ij} , β_{ij} — некоторые постоянные тензоры, γ_1 и γ_2 — некоторые скаляры, а F и Φ — соответственно, ньютонов и бигармонический потенциал эллипсоида единичной плотности, имеющего форму включения.

При любой форме и ориентации эллипсоида можно так распорядиться выбором τ_{ij} , β_{ij} , γ_1 , γ_2 , чтобы удовлетворить соотношениям (5.2). При этом, вообще говоря, правая часть (5.3) оказывается непостоянной на фазовой границе. Исключением из этого правила, как будет показано, является случай пропорциональности тензоров τ_{ij} и g_{ij} , когда при выполнении (5.2) выбором температуры T_2 можно удовлетворить и соотношению (5.3). Требование же пропорциональности указанных тензоров позволяет единственным образом восстановить внутренний потенциал равновесного эллипсоида, являющийся квадратичной формой (считаем, что его центр находится в начале координат) $F = F^0 - 1/2 \omega_{ij}x^i x^j$, что, в свою очередь, позволяет рассчитать его форму и ориентацию (случай разрешимости этой задачи разбираются в [15]). В случае плавления подобная программа расчета равновесной конфигурации была реализована в [16, 17].² Учитывая, что лапласиан бигармонического потенциала дает удвоенный ньютонов потенциал, первое из соотношений (5.4) дает

$$u'_{i+} = \gamma / (4\pi) F_{,i} + \kappa_{ij}x^j \quad (5.5)$$

Потенциал F на бесконечности обращается в нуль вместе со всеми производными, непрерывен на границе эллипсоида вместе с первыми производными, а разрывы вторых производных удовлетворяют соотношениям совместности $[F_{,ij}]_{-+} = 4\pi n_i n_j$ (здесь и в дальнейшем метка «градус» опущена). Решения в форме (5.4), (5.5) удовлетворяют уравнениям равновесия внутри фаз и граничному условию на бесконечности. Комбинируя (5.5) с соотношениями совместности, получаем

$$u'_{i,+} |_{\Sigma} = \gamma (n_i n_j - 1 / (4\pi) \omega_{ij}) \quad (5.6)$$

² См. сноску с. 80.

Будем считать, что начальная конфигурация совпадает с опорной конфигурацией фазы плюс. Используя (5.4), (5.6), представим граничные условия (5.2) в виде (где $\sigma_+^{ij} = \lambda_+ \kappa_{.k}^i g^{ij} + 2\mu \kappa^{(ij)}$):

$$\{\sigma_+^{ij} + 2\mu_+ \gamma (g^{ij} - \omega^{ij} / (4\pi)) - c_{.ij}^{ijkl} \beta_{kl}\} n_j = 0 \quad (5.7)$$

$$(\gamma \omega_{ij} / (4\pi) - \kappa_{ij} + \beta_{ij} + \Delta_{ij-}) x^j = 0$$

В силу произвола в выборе n_j , x^j из (5.7) следуют уравнения

$$\sigma_+^{ij} + 2\mu_+ \gamma (g^{ij} - \omega^{ij} / (4\pi)) - c_{.ij}^{ijkl} \beta_{kl} = 0 \quad (5.8)$$

$$\gamma \omega_{ij} / (4\pi) - \kappa_{ij} + \beta_{ij} + \Delta_{ij-} = 0$$

Система (5.8) совместно с вытекающим из уравнения Пуассона условием $\omega_{.i}^i = 4\pi$ позволяет определить ω_{ij} , β_{ij} , γ .

Перейдем к доказательству независимости правой части (5.3) от компонент единичной нормали для решений вида (5.4), (5.5). Для этого с помощью уравнений (5.2) преобразуем (5.3) следующим образом:

$$m[\eta]_{-}^+ T_2 = 1/2 c_{.ij}^{ijkl} u'_{i,j-} u'_{k,l-} + c_{.ij}^{ijkl} \Delta_{(ij)} u'_{k,l-} + u'_{i,j+} (1/2 c_{.ij}^{ijkl} u'_{k,l+} - c_{.ij}^{ijkl} u'_{k,l-}) \quad (5.9)$$

В силу (5.4), (5.9) для доказательства достаточно исключить n_i из последней строки, что с помощью (5.6) достигается следующей цепочкой преобразований:

$$u'_{i,j+} (1/2 c_{.ij}^{ijkl} u'_{k,l+} - c_{.ij}^{ijkl} u'_{k,l-}) |_{\Sigma} = \quad (5.10)$$

$$= \left\{ \gamma \left(n_i n_j - \frac{\omega_{ij}}{4\pi} \right) + \kappa_{ij} \right\} \left\{ (1/2 \lambda_+ g^{ij} g^{kl} + \mu_+ g^i (g^l)^j) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\gamma \left(n_k n_l - \frac{\omega_{kl}}{4\pi} \right) + \kappa_{kl} \right] - c_{.ij}^{ijkl} \beta_{kl} \right\} =$$

$$= \left[\gamma \left(n_i n_j - \frac{\omega_{ij}}{4\pi} \right) - \kappa_{ij} \right] \left(\mu_+ \gamma n^i n^j - 1/2 \sigma_+^{ij} + \mu_+ \frac{\gamma}{4\pi} \omega^{ij} - 2\mu_+ \gamma g^{ij} \right) =$$

$$= \mu_+ \gamma^2 - \frac{\lambda_+}{2} \kappa_{.i}^i \kappa_{.j}^j - \mu_+ \kappa^{(ij)} \kappa_{(ij)} - 2\mu_+ \gamma \kappa_{.i}^i + \frac{\mu_+ \gamma}{2\pi} \omega^{ij} \kappa_{ij} - \frac{\mu_+ \gamma^2}{16\pi^2} \omega_{ij} \omega^{ij}$$

Комбинируя (5.9), (5.10), приходим к формуле для температуры

$$m[\eta]_{-}^+ T_2 = c_{.ij}^{ijkl} \beta_{kl} (1/2 \beta_{ij} + \Delta_{(ij)}) + \mu_+ \gamma^2 - 1/2 \lambda_+ \kappa_{.i}^i \kappa_{.j}^j -$$

$$- \mu_+ \kappa^{(ij)} \kappa_{(ij)} - 2\mu_+ \gamma \kappa_{.i}^i + \mu_+ \gamma / (2\pi) \omega^{ij} \kappa_{ij} - \mu_+ \gamma^2 / (16\pi^2) \omega_{ij} \omega^{ij} \quad (5.11)$$

В случае изотропных фаз решение системы (5.8) имеет вид

$$\beta_{(ij)} = g_{ij} \left\{ \frac{\lambda_+ + 2\mu_+}{3k_- + 4\mu_+} \kappa_{.k}^k + \frac{\mu_+ (\lambda_- + 2\mu_-)}{(3K_- + 4\mu_+) (\mu_+ - \mu_-)} \Delta_{.k}^k \right\} -$$

$$- \frac{\mu_+}{\mu_+ - \mu_-} \Delta_{(ij)}, \quad \beta_{[ij]} = \kappa_{[ij] \pm} - \Delta_{[ij]} \quad (5.12)$$

$$\omega_{ij} = - \frac{4\pi (3K_- + 4\mu_+)}{3(K_+ - K_-) \kappa_{.k}^k + 3K_- \Delta_{.k}^k} \left(\kappa_{(ij)} + \frac{\mu_-}{\mu_+ - \mu_-} \Delta_{(ij)} \right) +$$

$$+ g_{ij} \frac{4\pi (\lambda_+ + 2\mu_+)}{3(K_+ - K_-) \kappa_{.k}^k + 3K_- \Delta_{.k}^k} \left(\kappa_{.k}^k + \frac{\lambda_- + 2\mu_-}{\lambda_+ + 2\mu_+} \frac{\mu_+}{\mu_+ - \mu_-} \Delta_{.k}^k \right)$$

Из (5.12) следует, что эллипсоид соосен тензору напряжений на бесконечности в случае $\mu_- = 0$ (строго говоря, этот случай, когда изотропное твердое тело плавится, следует рассматривать в рамках теории гетерогенных фазовых переходов с проскальзыванием — соответствующий анализ [17]³ приводит к соотношениям, совпадающим с (5.12), если в по-

³ См. сноску с. 80.

следних положить модуль сдвига зародыша равным нулю) либо если собственная деформация перехода есть всестороннее растяжение — сжатие $\Delta_{ij} = \delta g_{ij}$. В случае гидростатического поля напряжений на бесконечности эллипсоид оказывается соосным тензору собственной деформации $\Delta_{(ij)}$. В остальных случаях форма и ориентация эллипсоида определяются обоими факторами — характером деформаций на бесконечности и собственной деформацией превращения.

Отметим, что решения с включениями в форме эллипсоидов, описываемые соотношениями (5.12), теряют смысл при совпадении модулей сдвига фаз, что делает физически бессодержательным наиболее часто рассматриваемый в проблеме фазовых превращений случай эллипсоидальных зародышей в матрице с теми же модулями упругости.

В важном частном случае образования включений новой фазы в свободной на бесконечности изотропной матрице соотношения (5.12) заметно упрощаются:

$$\beta_{(ij)} = \frac{\mu_+}{\mu_+ - \mu_-} \left(\frac{\lambda_- + 2\mu_-}{3K_- + 4\mu_+} \Delta_{,kl}^k g_{ij} - \Delta_{(ij)} \right)$$

$$\frac{\omega_{ij}}{4\pi} = \frac{\mu_+}{\mu_+ - \mu_-} \left(\frac{\lambda_- + 2\mu_-}{3K_-} g_{ij} - \frac{3K_- + 4\mu_+}{3K_-} \frac{\mu_-}{\mu_+} \frac{\Delta_{(ij)}}{\Delta_{,kl}^k} \right)$$

$$m[\eta]_-^+ T_2 = c^{ijkl} \beta_{kl} (1/2 \beta_{ij} + \Delta_{(ij)}) + \mu_+ \gamma^2 (1 - 1/16 \pi^{-2} \omega^{ij} \omega_{ij})$$

$$\gamma = -3K_- \Delta_{,kl}^k / (3K_- + 4\mu_+)$$

Отметим, что физически линейная теория когерентных фазовых переходов приводит к обычным линейным уравнениям термоупругости внутри фаз; при этом сохраняется (и проявляется в чистом виде) глубокая внутренняя нелинейность проблемы — наличие заранее неизвестных межфазных границ. В работе выяснено, что физически линейную теорию удается последовательно построить в двух случаях: при малой собственной деформации превращения, при конечной собственной деформации превращения, слабо искажающей некоторое семейство параллельных плоскостей. Уравнения общей нелинейной теории в обоих случаях упрощаются настолько, что для некоторых конкретных систем удается проанализировать проблему образования зародышей новой фазы.

В рамках физически линейной теории в первом случае показано, что при мартенситных когерентных превращениях в изотропной матрице при постоянных на бесконечности напряжениях зародыш новой фазы в равновесии может принимать форму трехосного эллипсоида (при этом новая фаза может быть анизотропной и даже физически нелинейной). В то же время часто рассматриваемый случай равновесия эллипсоидальных зародышей в анизотропной матрице (с рассматриваемой здесь точки зрения) лишен физического смысла.

Во втором случае в физически линейную теорию собственный градиент превращения входит в весьма сложной нелинейной форме (в этом смысле можно говорить о физически линейной, но геометрически нелинейной теории гетерогенных фазовых равновесий).

Наконец, осредненные упругие модули систем с поверхностями фазовых превращений качественно отличаются от осредненных модулей обычных композитов с такими же модулями компонент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристьян Дж. Теория превращений в металлах и сплавах. Т. 1. М.: Мир, 1978. 806 с.
2. Mura T. Micromechanics of defects in solids. Hague. Martinus Nijhoff Publ. 1982. 494 p.
3. Современная кристаллография. В 4 томах. Т. 2. М.: Наука, 1979. 359 с.
4. Grinfel'd M. A. Gibbs method in the thermodynamics of nonlinear elastic bodies. — Proc. EGS-ESC Symposium, Budapest, 1980, p. 353—356.
5. Гринфельд М. А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейноупругого материала. — Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 824—828.

6. *Гринфельд М. А.* О гетерогенном равновесии нелинейно-упругих фаз и тензоров химического потенциала.— В кн.: «Вопросы нелинейной механики сплошной среды». Таллин: Валгус, 1985, с. 33—47.
7. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
8. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
9. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
10. *Гринфельд М. А., Мовчан А. А.* Фазовые переходы второго рода в изотропной упругой среде.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1979, № 12, с. 85—89.
11. *Лозин В. В., Седов Л. И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 393—417.
12. *Вустер У.* Применение тензоров и теории группы для описания физических свойств кристаллов. М.: Мир, 1977. 383 с.
13. *Гринфельд М. А.* К теории фазовых переходов первого рода в изотропных упругих материалах.— Докл. АН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 571—575.
14. *Гринфельд М. А.* Об осреднении термодинамических параметров двухфазных сред.— Докл. АН СССР, 1983, с. 271, № 3, с. 584—589.
15. *Сртеґнский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.—Л.: Гостехиздат, 1946. 318 с.
16. *Бердичевский В. Л.* Зародыши расплава в твердом теле.— Докл. АН СССР, 1983, т. 273, № 4, с. 80—84.
17. *Гринфельд М. А.* Об одной асимптотике в проблеме гетерогенных когерентных фазовых равновесий однокомпонентных упругих сред.— Докл. АН СССР, 1984, т. 275, № 1, с. 43—47.

Москва

Поступила в редакцию
31.V.1985