ЛИТЕРАТУРА

1. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемых систем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 11—19.
3. *Овсеевич А. И., Черноусько Ф. Л.* Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 737—744.
4. *Кирин Н. Е., Нелепин Р. А., Байдаев В. Н.* Построение области притяжения по методу Зубова.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1347—1361.
5. *Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П.* Области устойчивости синхронной машины.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1980, № 6, с. 172—173.
6. *Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П.* Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.
7. *Плисс П. В.* О кривой разрывов множества управляемости уравнения Ван дер Поля с управлением.— Вестн. ЛГУ, 1981, № 7, вып. 2, с. 59—62.
8. *Алексеев Н. К.* Некоторые вопросы управляемости двумерных систем.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 3, с. 387—397.

Ленинград

Поступила в редакцию 29.IV.1985

УДК 534.1

ОБКАТЫВАНИЕ ВАЛА ШАЙБОЙ

ВОРОНЦОВ Г. Г.

Известно интересное явление: если костяшке конторских счет, насаженной на вертикальную неподвижную спицу, сообщить быстрое вращение, то костяшка сначала поднимается по спице вверх на некоторую высоту, а потом падает. В выяснении механики этого явления заключается так называемая «задача Мусхелишвили».

В связи с этой задачей А. Ю. Ишлинский предложил проверить наличие этого эффекта при вращении тонкой шайбы, насаженной на вал,— абсолютно твердый прямой круговой цилиндр радиуса b. В качестве шайбы рассматривается абсолютно твердое тело массы m с внутренним острым краем в виде окружности радиуса a. Центр масс шайбы находится в центре окружности внутреннего острого края, а прямая, проходящая через центр масс шайбы перпендикулярно плоскости окружности внутреннего острого края, является осью динамической симметрии шайбы. Момент инерции шайбы относительно этой прямой обозначим C. Моменты инерции шайбы относительно произвольных диаметров окружности внутреннего острого края равны между собой, поэтому их обозначим A. Ускорение свободного падения обозначим g. Шайба обкатывает неподвижный вертикальный вал в поле силы тяжести. При этом предполагается, что: вал и шайба имеют лишь одну общую точку e, принадлежащую окружности внутреннего острого края шайбы; обкатывание происходит без проскальзывания (т. е. абсолютная скорость точки контакта, принадлежащей шайбе, равна нулю); связи, наложенные на систему, являются идеальными.

Рассматриваемая механическая система имеет 5 степеней свободы, поэтому для определения положения шайбы относительно вала выберем 5 обобщенных координат. Для этого введем абсолютную неподвижную правую прямоугольную систему координат $O\xi\eta\zeta$, жестко связанную с валом, такую, что ее начало (точка O) есть некоторая точка оси вала, ось ζ совпадает с осью вала, оси ξ и η расположены в плоскости нормального сечения вала. Обозначим через ζ координату точки контакта e по оси ζ, а через φ — угол, отсчитываемый от оси ξ до проекции вектора Oe на плоскость осей ξ и η. Введем еще систему координат $exyz$ с началом в точке контакта, такую, что: ось x проходит через центр масс шайбы, ось z перпендикулярна плоскости окружности внутреннего острого края шайбы, ось y дополняет оси x и z до правой ортогональной системы.

Рассмотрим касательную к окружности внутреннего острого края шайбы в точке контакта. Обозначим через α острый угол между этой касательной и ее проекцией на плоскость осей ξ и η, отсчитываемый от этой проекции. Через β обозначим острый угол, отсчитываемый от нормали, проведенной к поверхности вала в точке контакта, до оси x.

Пусть теперь f есть фиксированная точка на окружности внутреннего острого края шайбы. Центральный угол, соответствующий дуге fe, обозначим γ.

Таким образом введены 5 обобщенных координат, полностью определяющих положение шайбы относительно вала в следующем порядке: ζ, φ, α, β, γ.

Теперь получим уравнения движений шайбы. Для этого запишем векторное выражение обобщенной теоремы об изменении кинетического момента (взятого относительно точки контакта e) в проекциях на оси подвижной системы координат $exyz$. Получим динамические уравнения

$$Ap^{\boldsymbol{\cdot}}+(C-A)qr+Cq\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=0$$

$$(A+ma^2)q^{\boldsymbol{\cdot}}-(C+ma^2-A)pr-(C+ma^2)p\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=-mga\cos\alpha\cos\beta$$

$$(C+ma^2)(r^{\boldsymbol{\cdot}}+\gamma^{\boldsymbol{\cdot\cdot}})+ma^2pq=mga\sin\alpha$$

Здесь через p, q, r обозначены проекции абсолютной угловой скорости подвижной системы координат $exyz$ на оси x, y, z соответственно.

Кинематические уравнения, выражающие зависимость величин p, q, r от обобщенных координат и их производных по времени, имеют вид

$$p=\alpha^{\cdot}\cos\beta-\varphi^{\cdot}\cos\alpha\sin\beta$$

$$q=\beta^{\cdot}+\varphi^{\cdot}\sin\alpha,\qquad r=\alpha^{\cdot}\sin\beta+\varphi^{\cdot}\cos\beta\cos\alpha$$

Уравнения связей, наложенных на систему, получим из условия равенства нулю абсолютной скорости той точки шайбы, которая находится в контакте с валом. Они имеют вид

$$b\varphi^{\cdot}+\gamma^{\cdot}a\cos\alpha=0,\qquad \zeta^{\cdot}+\gamma^{\cdot}a\sin\alpha=0$$

Система динамических, кинематических уравнений и уравнений связи справедлива при условии, что шайба и вал имеют лишь одну общую точку. Это условие накладывает определенные требования на форму шайбы и значения величины α и β, поскольку ясно, что a должно быть больше b. Окружность внутреннего острого края может иметь не более одной общей точки с валом, если выполняются неравенства $b\cos\beta<a(1-\cos^2\alpha\sin^2\beta)$, $b\cos\beta<a\cos^2\alpha$.

Форма шайбы предполагается такой, что дополнительных ограничений на углы α и β (помимо уже перечисленных) не возникает.

Совокупность динамических, кинематических уравнений и уравнений связей представляет собой полную систему уравнений движения шайбы. Эта система уравнений имеет интеграл энергии

$$0{,}5[Ap^2+(A+ma^2)q^2+(C+ma^2)(r+\gamma^{\cdot})^2]+mg(\zeta+a\cos\alpha\sin\beta)=\mathrm{const}$$

Из уравнений движения следует, что есть стационарные движения шайбы, при которых точка контакта движется с постоянной угловой скоростью по окружности нормального сечения вала, а плоскость шайбы наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом (т. е. $\alpha(t)\equiv0$, $\varphi^{\cdot}(t)\equiv\varphi_0^{\cdot}=\mathrm{const}$, $\beta(t)\equiv\beta_0=\mathrm{const}$, $\zeta(t)=$ $=\zeta_0=\mathrm{const}$). Действительно, в этом случае уравнения движения шайбы будут иметь вид (добавим еще одно остающееся из неравенств, при которых они справедливы):

$$a\gamma^{\cdot}=-b\varphi_0^{\cdot}$$

$$\varphi_0^{\cdot 2}\sin\beta_0[(C+ma^2-A)\cos\beta_0-(C+ma^2)b/a]=-mga\cos\beta_0$$

$$b\cos\beta_0<a\cos^2\beta_0$$

Отсюда получаем, что заданному углу β_0 (лежащему либо в области $D_1=$ $=\{\beta:b/a<\cos\beta<1\}$, либо в области $D_2=\{\beta:b/a<\cos\beta<b(C+ma^2)/[a(C+ma^2-A)]\}$ соответствует определенная величина

$$\varphi_0^{\cdot}=\pm\sqrt{mga\operatorname{ctg}\beta_0/[(C+ma^2)b/a-(C+ma^2-A)\cos\beta_0]}$$

(знак определяет направление движения точки контакта).

Интересно выяснить – есть ли среди движений шайбы периодические? В данной механической системе не происходит диссипации энергии, поэтому все движения обратимы. Рассмотрим такие движения, для которых в начальный момент времени $t=0$ выполняются условия: $\alpha(0)=0$, $\beta^{\cdot}(0)=0$. Тогда обобщенные координаты как функции времени обладают следующими свойствами четности и нечетности относительно начального момента времени $t=0$: $\varphi^{\cdot}(-t)=\varphi^{\cdot}(t)$; $\gamma^{\cdot}(-t)=\gamma(t)$, $\alpha(-t)=$ $=-\alpha(t)$, $\beta(-t)=\beta(t)$, $\zeta^{\cdot}(-t)=-\zeta^{\cdot}(t)$.

Если существует такой момент времени $t^*\neq0$, что $\alpha(t^*)=0$, $\beta^{\cdot}(t^*)=0$, то обобщенные координаты как функции времени будут обладать указанными свойствами четности и нечетности и относительно момента времени t^*. Показав, что такой момент времени существует, тем самым покажем существование периодических по $\zeta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}$, α, β, $\gamma^{\cdot}$ движений. А поскольку ζ можно выразить через $\varphi^{\cdot}$, α, β, $\alpha^{\cdot}$, $\beta^{\cdot}$, $\gamma^{\cdot}$, используя интеграл энергии, то тем самым будет показано существование движений, периодических по ζ, $\varphi^{\cdot}$, α, β, $\gamma^{\cdot}$.

Обозначим через t_α момент времени (отличный от начального $t=0$), когда $\alpha(t_\alpha)=0$. Аналогично обозначим через $t_{\beta^{\cdot}}$ момент времени (отличный от начального $t=0$), когда $\beta^{\cdot}(t_{\beta^{\cdot}})=0$.

Для того чтобы доказать существование такого момента времени t^*, воспользуемся численным интегрированием уравнений движения шайбы, записанных в виде системы уравнений первого порядка:

$$\alpha^{\cdot}=u,\qquad \beta^{\cdot}=v,\qquad \gamma^{\cdot}=w,$$

$$u^{\cdot}=p_1\cos\beta+r_1\sin\beta-vwn\cos^2\alpha$$

$$v^{\cdot}=q_1+R\sin\alpha\cos\alpha+vwn\cos2\alpha$$

$$w^{\cdot}=R,\qquad z^{\cdot}=-w\sin\alpha,\qquad \varphi^{\cdot}=-wn\cos\alpha$$

$$p_0=u\cos\beta+wn\cos^2\alpha\sin\beta,\qquad q_0=v-wn\sin\alpha\cos\alpha,\qquad r_0=u\sin\beta-wn\cos^2\alpha\cos\beta$$

$$p_1=[(s-1)q_0r_0+(s-\rho)qw]/(\rho-1),\qquad q_1=sp_0w+(s+\rho-1)p_0r_0$$

$$r_1 = [n \cos^2 \alpha \rho (\varepsilon \sin \alpha - p_0 q_0)/s - uw \sin 2\alpha - (p_1 \sin \beta + uv)]/(n \cos^2 \alpha - \cos \beta)$$

$$R = (p_1 \sin \beta - r_1 \cos \beta + uv - uwn \sin 2\alpha)/(n \cos^2 \alpha)$$

$$z = \zeta/a, \quad n = a/b, \quad \rho = ma^2/(A + ma^2), \quad s = (C + ma^2)/A + ma^2), \quad \varepsilon = g/a$$

Численное интегрирование выполнялось на ЭВМ ЕС 1040 с использованием стандартной программы DRKGS (стандартный метод Рунге – Кутта). Сначала было получено стационарное решение, соответствующее $\beta_0 = -0{,}5$, $\rho = {}^2/_3$, $s = {}^4/_3$, $n = 3$, $\varepsilon = 981$. Шаг, отрезок и точность интегрирования были выбраны соответственно: 0,001, [0; 1], 0,0001. В дальнейшем в окрестности указанного стационарного решения вариацией по начальному значению угла β была получена серия решений вида: $\beta(0) = \beta_0 - \Delta\beta$, $0{,}2 \leqslant \Delta\beta \leqslant 0{,}202$. Из сравнений численных решений указанной серии установлено, что существует такой интервал времени Δ, не содержащий начальный момент времени $t = 0$, на котором в каждом решении серии величины α и $\beta^\bullet$ обращаются в нуль лишь по одному разу, а разность $t_\alpha - t_\beta$ при увеличении величины $\Delta\beta$ монотонно убывает, принимая сначала положительные, а потом отрицательные значения. В силу теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий найдется такое значение $\Delta\beta^* \in (0{,}2;\ 0{,}202)$, что на указанном отрезке времени Δ величины α и $\beta^\bullet$ обратятся в нуль одновременно. Из этого следует, что среди движений шайбы (при конкретных значениях ρ, s, n, ε), для которых $\alpha(0) = 0$, $\beta^\bullet(0) = 0$, существуют и периодические по ζ, $\varphi^\bullet$, $\gamma^\bullet$, α, β. Движение же костяшки счет на спице, как правило, не является периодическим, а имеет лишь восходящую ветвь.

Возможно, что наличие сил сопротивления движению (сила трения в точке контакта и сила аэродинамического сопротивления) так искажает периодическое движение костяшки, которое имело бы место при отсутствии силы сопротивления движению, что оно перестает быть периодическим.

Москва

Поступила в редакцию
4.I.1984