

Пример 1. Пусть тело — шар, ограниченной поверхностью $\varphi = (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 - 1 = 0$, где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — вектор, задающий положение геометрического центра шара. Тогда функции (4) — частные интегралы, если выполнены условия $c_2 = 0, c_3 \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} \mp c_1 \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} = 0$ (ср. с условиями Гесса — Апфельрота).

Пример 2. Пусть поверхность тела — эллипсоид

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} x_i x_j - 1 = 0$$

Тогда частный интеграл вида (4) существует при выполнении условий $b_{i2} = 0$ ($i=1, 3$)

$$\begin{aligned} \sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}}(b_{22} - b_{33}) \pm \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}} b_{13} &= 0 \\ -\sqrt{I_2^{-1} - I_1^{-1}} b_{13} \pm \sqrt{I_3^{-1} - I_2^{-1}}(b_{11} - b_{22}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

При этом средняя ось эллипсоида инерции совпадает с одной из осей эллипсоида поверхности, а оба эллипсоида повернуты друг относительно друга вокруг общей оси на угол α : $\operatorname{tg} 2\alpha = 2b_{13}/(b_{11} - b_{33})$. Эллипсоидальное тело с таким распределением масс относится к классу кельтских камней. Условия (7) совпадают с условиями существования частного интеграла вида (4) в задаче о движении тела в идеальной жидкости [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Апфель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
3. Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа. — Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1298—1300.

Москва

Поступила в редакцию
21.X.1985

УДК 534.1

РЕАЛИЗАЦИЯ НАИБОЛЬШЕЙ ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

КОРНИЛОВ Ю. Н., ПЕТРОВ Ю. П.

Для систем управления второго порядка с релейным оптимальным по быстродействию управлением, зависящим от состояния системы, показано построение простого регулятора, реализующего наибольшую область управляемости для управления, ограниченного по модулю. Построены области управляемости для системы, описываемой уравнением Ван-дер-Поля.

При анализе и оптимизации различных систем управления большое внимание уделяется построению наибольшей области управляемости. Если в системе управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ является вектор-функцией размерности n , а скалярное управление u ограничено неравенством

$$|u| \leq \alpha \quad (2)$$

то для каждого конкретного управления $u = u(\mathbf{x})$ в фазовом пространстве существует область (называемая областью управляемости), из точек которой достижимо начало координат. Область управляемости может совпадать со всем фазовым пространством. Существуют управления $u = u(\mathbf{x})$, которые обеспечивают наибольшую область управляемости. Естественно, что большое практическое значение имеет проблема отыскания уравнения регулятора $u = u(\mathbf{x})$, реализующего наибольшую область управляемости и построение самой области для различных систем управления. Эта проблема рассматривается в [1—4]. В публикуемой статье излагается ее решение для систем управления второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u) \quad (3)$$

с управлением (2) и таких, что управление, оптимальное по быстродействию имеет вид

$$u = \alpha \operatorname{sign} f_2(x_1, x_2) \quad (4)$$

т. е. u равно либо α , либо $-\alpha$ и меняет знак в момент пересечения фазовой траекторией системы линии переключения $f_2(x_1, x_2) = 0$. Известно, что для очень многих систем управление, оптимальное по быстродействию, имеет именно такой вид.

Решение опирается на положения, опубликованные в [5, 6], где показано, что: 1. управлений, обеспечивающих наибольшую область управляемости, много; в частности, таковыми являются управления, доставляющие системе (1) минимум функционала вида $J = \int f(x_1, x_2, \dots, x_n, u) dt$ ($0 \leq t \leq \infty$), где функция f положительна, ограни-

чена и обращается в нуль лишь при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = u = 0$; 2. одним из управлений, обеспечивающих наибольшую область управляемости, является управление, оптимальное по быстродействию; 3. при приближении изображающей точки системы (3) на фазовой плоскости к границе наибольшей области управляемости все эти управления сближаются между собой. Из этих положений следует, что регулятор

$$u = \alpha \operatorname{sign}(k_1 x_1 + k_2 x_2) \quad (5)$$

линия переключения которого является прямой, обеспечит системе (3) реализацию наибольшей ограниченной области управляемости, если только отношение k_1/k_2 выбрано так, что линия переключения управления (5) (прямая) проходит через предельные точки более сложной линии переключения управления, оптимального по быстродействию (эти точки лежат на границе области управляемости), и внутри области нет замкнутых траекторий.

Граница области управляемости может быть найдена интегрированием системы (3), замкнутой регулятором (5) в обратном времени.

Таким образом, построение наибольшей области управляемости для многих систем управления второго порядка сводится к отысканию отношения k_1/k_2 в регуляторе (5). Если положение предельных точек линии переключения управления, оптимального по быстродействию, известно, то отношение k_1/k_2 определяется сразу. Если предельные точки неизвестны, то отношение может быть найдено подбором или проверкой подозрительных значений. Наиболее существенно то, что регулятор (5) обеспечивает простую реализацию максимальной области управляемости, т. е. в аварийном режиме будут использованы все ресурсы управляемой системы.

В качестве примера рассмотрим систему Ван-дер-Поля

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \mu(x_2 - x_2^3/3) - x_1 + u, \quad \mu > 0 \quad (6)$$

Если $u = 0$, то, как известно, точка $x_1 = 0, x_2 = 0$ системы (6) неустойчива. Фазовая траектория, начинающаяся в окрестности начала координат, с течением времени удаляется от него и наматывается изнутри на предельный цикл, размеры и форма которого (зависящие от параметра μ) неоднократно исследовались. Для системы (6) управление, оптимальное по быстродействию, имеет вид (4). Его предельные точки лежат на оси абсцисс. Поэтому регулятор (5) для системы (6) принимает вид

$$u = -\alpha \operatorname{sign} x_2 \quad (7)$$

Для простоты, удобства и реализации управления можно использовать регулятор

$$u = -\alpha \operatorname{sat}(K_0 \dot{x}_2), \quad \operatorname{sat}(y) = y(|y| < 1); \quad \operatorname{sat}(y) = \operatorname{sign}(y)(|y| > 1) \quad (8)$$

$\operatorname{sat}(y)$ — достаточно большое число, который сколь угодно мало (при больших k_0) отличается от (7).

При малых α область управляемости ограничена и легко строится интегрированием в обратном времени системы (6) замкнутой регулятором (8). Фазовые траектории в обратном времени наматываются изнутри на область управляемости, которая играет роль притягивающего предельного цикла. Области управляемости для $\mu = 0, 3, 1, 4, 6$ и 10 и различных значений α показаны соответственно на фиг. 1–5 сплошной линией, а предельные циклы — штриховой.

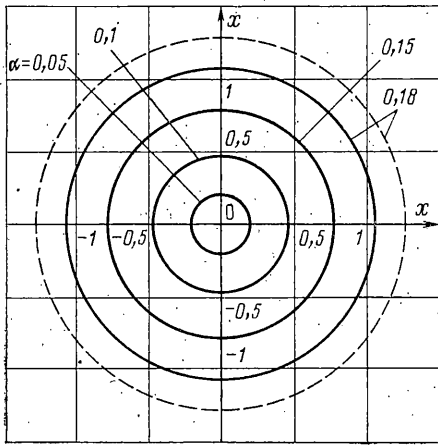
При значениях $\mu < 2$ форма границы области управляемости близка к эллипсу (фиг. 1, 2), особая точка системы Ван-дер-Поля является особой точкой типа «фокус» и граница области состоит из кусков спиралевидных фазовых траекторий. Отрезок $[-\alpha, \alpha]$ оси Ox расположен внутри области управляемости.

При $\mu > 2$ особая точка системы является особой точкой типа «узел». Концы отрезка $[-\alpha, \alpha]$ оси Ox лежат у границы области управляемости (фиг. 3–5).

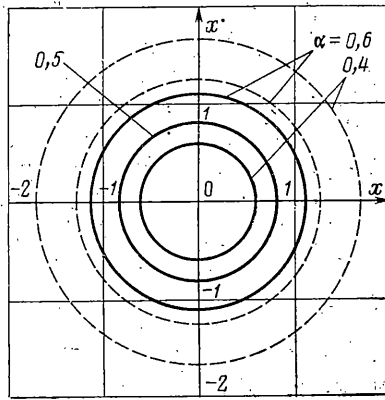
Представляет интерес поведение системы (6) с управлением (8) внутри области управляемости. Если $\mu < 2$, то изображающая точка системы до пересечения с отрезком оси Ox описывает сходящуюся спираль. Далее, после момента пересечения с отрезком, движение переходит на скользящий режим вдоль оси Ox в начало координат. При $\mu > 2$ уже при первом пересечении изображающей точкой оси Ox происходит переход на движение вдоль оси Ox в начало координат.

При всех значениях параметра μ по мере приближения к началу координат движение изображающей точки замедляется. При умеренных α фазовая плоскость системы (6) с управлением (8) состоит из трех областей. Начало координат окружает область управляемости, внутри которой фазовые траектории с течением времени удаляются от начала координат и стремятся к предельному циклу, который зависит как от μ , так и от α . С ростом α величина этого предельного цикла на фазовой плоскости уменьшается. Наконец, за границами предельного цикла расположена третья, неограниченная область фазовой плоскости; в ней фазовые траектории движутся к началу координат, но не могут его достигнуть, наматываясь по дороге на предельный цикл. С ростом α область управляемости расширяется, а предельный цикл уменьшается. Наконец, при некотором $\alpha = \alpha_*$ (зависящем от μ) они сливаются. Если в регуляторе (8) будет $\alpha > \alpha_*$, то область управляемости охватит всю фазовую плоскость, т. е. из любой ее точки начало координат достижимо.

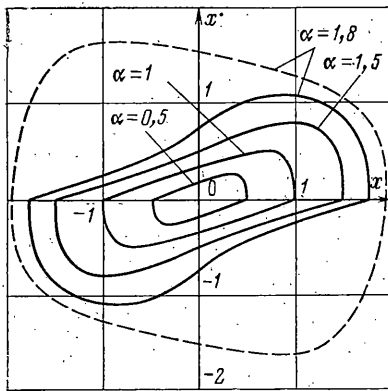
Явление скачкообразного расширения области управляемости системы Ван-дер-Поля при изменении α было известно ранее. Трудоемкие исследования были посвящены выявлению зависимости α_* от μ [7, 8]. С помощью регулятора (8) эти зависимости и полную картину областей управляемости для любых μ и α можно по-



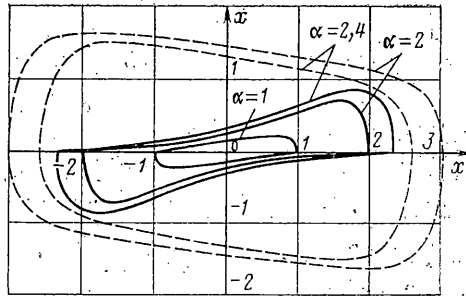
Фиг. 1



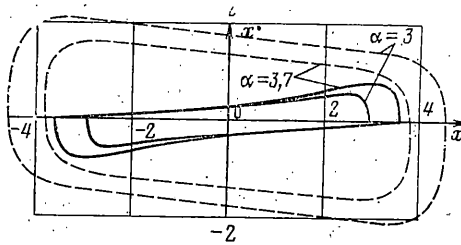
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

строить легко и быстро. Действительно, для каждого μ и α для построения области управляемости достаточно проинтегрировать систему уравнений (6) и (8) с начальными условиями $x_1 \approx 0$ и $x_2 \approx 0$ в обратном времени, что выполняется достаточно быстро. Если α мало, то фазовые траектории при интегрировании в обратном времени быстро наматываются изнутри (можно, для большей точности, производить аппроксимацию и снаружи) на предельный цикл, который совпадает с границей области управляемости системы (6) в прямом времени. Увеличивая постепенно α и повторяя интегрирование, замечаем, как и следовало ожидать, что с ростом α предельный цикл (а значит, и область управляемости, граница которой совпадает с предельным циклом) медленно растет. Затем, при некотором значении α , предельный цикл скачком расширяется и область управляемости заполняет всю фазовую плоскость. Это значение α_* , зависящее от μ , является критическим.

Для систем управления второго порядка, у которых управление, оптимальное по быстродействию, имеет вид (4), указано правило построения простого регулятора, реализующего наибольшую область управляемости при управлении, ограниченном по модулю. Построены области управляемости для системы, описываемой уравнением Ван-дер-Поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
2. *Черноуцко Ф. Л.* Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемых систем.— ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 11—19.
3. *Овсевич А. И., Черноуцко Ф. Л.* Двусторонние оценки областей достижимости управляемых систем.— ПММ, 1982, т. 46, вып. 5, с. 737—744.
4. *Кирилл Н. Е., Нелепин Р. А., Байдаев В. Н.* Построение области притяжения по методу Зубова.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 8, с. 1347—1361.
5. *Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П.* Области устойчивости синхронной машины.— Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1980, № 6, с. 172—173.
6. *Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П.* Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.
7. *Плисс П. В.* О кривой разрывов множества управляемости уравнения Ван дер Поля с управлением.— Вестн. ЛГУ, 1981, № 7, вып. 2, с. 59—62.
8. *Алексеев Н. К.* Некоторые вопросы управляемости двумерных систем.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 3, с. 387—397.

Ленинград

Поступила в редакцию
29.IV.1985

УДК 534.1

ОБКАТЫВАНИЕ ВАЛА ШАЙБОЙ

ВОРОНЦОВ Г. Г.

Известно интересное явление: если костяшкe конторских счет, насаженной на вертикальную неподвижную спицу, сообщить быстрое вращение, то костяшка сначала поднимается по спице вверх на некоторую высоту, а потом падает. В выяснении механики этого явления заключается так называемая «задача Мухелишвили».

В связи с этой задачей А. Ю. Ишлинский предложил проверить наличие этого эффекта при вращении тонкой шайбы, насаженной на вал,— абсолютно твердый прямой круговой цилиндр радиуса b . В качестве шайбы рассматривается абсолютно твердое тело массы m с внутренним острым краем в виде окружности радиуса a . Центр масс шайбы находится в центре окружности внутреннего острого края, а прямая, проходящая через центр масс шайбы перпендикулярно плоскости окружности внутреннего острого края, является осью динамической симметрии шайбы. Момент инерции шайбы относительно этой прямой обозначим S . Моменты инерции шайбы относительно произвольных диаметров окружности внутреннего острого края равны между собой, поэтому их обозначим A . Ускорение свободного падения обозначим g . Шайба обкатывает неподвижный вертикальный вал в поле силы тяжести. При этом предполагается, что: вал и шайба имеют лишь одну общую точку e , принадлежащую окружности внутреннего острого края шайбы; обкатывание происходит без проскальзывания (т. е. абсолютная скорость точки контакта, принадлежащей шайбе, равна нулю); связи, наложенные на систему, являются идеальными;

Рассматриваемая механическая система имеет 5 степеней свободы, поэтому для определения положения шайбы относительно вала выберем 5 обобщенных координат. Для этого введем абсолютную неподвижную правую прямоугольную систему координат $O\xi\eta\zeta$, жестко связанную с валом, такую, что ее начало (точка O) есть некоторая точка оси вала, ось ζ совпадает с осью вала; оси ξ и η расположены в плоскости нормального сечения вала. Обозначим через ζ координату точки контакта e по оси ζ , φ — угол, отсчитываемый от оси ξ до проекции вектора Oe на плоскость осей ξ и η . Введем еще систему координат $exyz$ с началом в точке контакта, такую, что: ось x проходит через центр масс шайбы, ось z перпендикулярна плоскости окружности внутреннего острого края шайбы, ось y дополняет оси x и z до правой ортогональной системы.

Рассмотрим касательную к окружности внутреннего острого края шайбы в точке контакта. Обозначим через α острый угол между этой касательной и ее проекцией на плоскость осей ξ и η , отсчитываемый от этой проекции. Через β обозначим острый угол, отсчитываемый от нормали, проведенной к поверхности вала в точке контакта, до оси x .

Пусть f теперь f есть фиксированная точка на окружности внутреннего острого края шайбы. Центральный угол, соответствующий дуге fe , обозначим γ .

Таким образом введены 5 обобщенных координат, полностью определяющих положение шайбы относительно вала в следующем порядке: $\zeta, \varphi, \alpha, \beta, \gamma$.

Теперь получим уравнения движений шайбы. Для этого запишем векторное выражение обобщенной теоремы об изменении кинетического момента (взятого относительно точки контакта e) в проекциях на оси подвижной системы координат $exyz$. Получим динамические уравнения

$$\begin{aligned} Ap^* + (C-A)qr + Cq\dot{\varphi} &= 0 \\ (A+ma^2)\dot{q} - (C+ma^2-A)pr - (C+ma^2)p\dot{\varphi} &= -mga \cos \alpha \cos \beta \\ (C+ma^2)(\dot{r} + \dot{\gamma}) + ma^2pq &= mga \sin \alpha \end{aligned}$$