УДК 531.38

О ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ГЛАДКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

БУРОВ А. А.

В задаче о движении тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости известны два случая, когда уравнения движения допускают дополнительный общий первый интеграл: когда тело — шар, центр масс которого совпадает с геометрическим центром, и когда тело является телом вращения (см., например, [1]). Вопрос о том, имеются ли в этой задаче другие случаи интегрируемости уравнений движения, вообще говоря, остается открытым.

В публикуемой работе получены достаточные условия существования частного интеграла рассматриваемой механической системы, дана их геометрическая интерпретация.

Рассмотрим задачу о катании выпуклого тяжелого твердого тела по гладкой горизонтальной плоскости. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — жестко связанная с телом подвижная система координат, начало которой, точка O, совпадает с центром масс тела, а оси Ox_i направлены по главным центральным осям инерции. Пусть $\mathbf{I}=\operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — центральный тензор инерции тела, $\varphi(x_1, x_2, x_3)=0$ — уравнение ограничивающей тело поверхности, $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$ — вектор, задающий положение точки касания тела и плоскости. Здесь и далее все вектора берутся в проекциях на оси $Ox_1x_2x_3$. В этих осях уравнения движения тела можно представить в виде (см., например, [2])

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{X}R(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела, $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор нормали к плоскости, $R(\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ — величина нормальной реакции плоскости. При этом вектора $\mathbf{X}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\gamma}=-\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{X})/|\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{X})| \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), представим систему уравнений движения в виде

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}+\mathbf{X}\times\operatorname{grad}\varphi R/|\operatorname{grad}\varphi|, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{\cdot}}=\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

Под частным интегралом будем понимать функцию $F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$, такую, что на поверхности $\{F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})=0\}$ выполнено соотношение

$$d/dt|_{(3)}F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})=0$$

Предположим, что $I_3<I_2<I_1$. Будем искать частный интеграл в виде

$$F(\boldsymbol{\omega})=\omega_1I_1\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}\pm\omega_3I_3\sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}} \tag{4}$$

Дифференцируя функцию (4) в силу системы уравнений (3), получим

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{(3)} F=\pm\sqrt{(I_3^{-1}-I_2^{-1})(I_2^{-1}-I_1^{-1})}I_2\omega_2(\omega_1I_1\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}\pm\omega_3I_3\sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}})-$$

$$-\left(\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}\left(x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}}\left(x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)\right)R/|\operatorname{grad}\varphi|, \qquad \mathbf{x}=\mathbf{X}$$

Тогда на поверхности $\{F(\boldsymbol{\omega})=0\}$ при выполнении условия

$$\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}\left(x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\pm\sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}}\left(x_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=0 \tag{5}$$

производная $F^{\boldsymbol{\cdot}}|_{(3)}$ обращается в нуль, а соответствующая функция (4) является частным интегралом, аналогичным интегралу Гесса — Аппельрота в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Общее решение уравнений (5) имеет вид

$$\varphi=\Phi(u, v)=0 \tag{6}$$

$$u=ax_1\pm bx_3, \quad v=(\mp bx_1+ax_3)^2+x_2^2$$

$$a=\sqrt{(I_2^{-1}-I_1^{-1})/(I_3^{-1}-I_1^{-1})}, \quad b=\sqrt{(I_3^{-1}-I_2^{-1})/(I_3^{-1}-I_1^{-1})}$$

Если поверхность тела удовлетворяет соотношению (6), то интеграл вида (4) существует. При этом поверхность тела является поверхностью вращения с осью вращения, ортогональной к одной из плоскостей круговых сечений гирационного эллипсоида.

Пример 1. Пусть тело — шар, ограниченной поверхностью $\varphi=(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2+(x_3-c_3)^2-1=0$, где $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)$ — вектор, задающий положение геометрического центра шара. Тогда функции (4) — частные интегралы, если выполнены условия $c_2=0$, $c_3\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}\mp c_1\sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}}=0$ (ср. с условиями Гесса — Аппельрота).

Пример 2. Пусть поверхность тела — эллипсоид

$$\varphi=\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}x_ix_j-1=0$$

Тогда частный интеграл вида (4) существует при выполнении условий $b_{i2}=0$ $(i=1, 3)$

$$\begin{gathered}\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}(b_{22}-b_{33})\pm\sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}}b_{13}=0\\ -\sqrt{I_2^{-1}-I_1^{-1}}b_{13}\pm\sqrt{I_3^{-1}-I_2^{-1}}(b_{11}-b_{22})=0\end{gathered}\tag{7}$$

При этом средняя ось эллипсоида инерции совпадает с одной из осей эллипсоида поверхности, а оба эллипсоида повернуты друг относительно друга вокруг общей оси на угол α: $\operatorname{tg} 2\alpha=2b_{13}/(b_{11}-b_{33})$. Эллипсоидальное тело с таким распределением масс относится к классу кельтских камней. Условия (7) совпадают с условиями существования частного интеграла вида (4) в задаче о движении тела в идеальной жидкости [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
2. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
3. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1298—1300.

Москва

Поступила в редакцию 21.X.1985

УДК 534.1

РЕАЛИЗАЦИЯ НАИБОЛЬШЕЙ ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

КОРНИЛОВ Ю. Н., ПЕТРОВ Ю. П.

Для систем управления второго порядка с релейным оптимальным по быстродействию управлением, зависящим от состояния системы, показано построение простого регулятора, реализующего наибольшую область управляемости для управления, ограниченного по модулю. Построены области управляемости для системы, описываемой уравнением Ван-дер-Поля.

При анализе и оптимизации различных систем управления большое внимание уделяется построению наибольшей области управляемости. Если в системе управления

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}}=f(\mathbf{x}, u)\tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t)$ является вектор-функцией размерности n, а скалярное управление u ограничено неравенством

$$|u|\leqslant\alpha\tag{2}$$

то для каждого конкретного управления $u=u(\mathbf{x})$ в фазовом пространстве существует область (называемая областью управляемости), из точек которой достижимо начало координат. Область управляемости может совпадать со всем фазовым пространством. Существуют управления $u=u(\mathbf{x})$, которые обеспечивают наибольшую область управляемости. Естественно, что большое практическое значение имеет проблема отыскания уравнения регулятора $u=u(\mathbf{x})$, реализующего наибольшую область управляемости и построение самой области для различных систем управления. Эта проблема рассматривается в [1—4]. В публикуемой статье излагается ее решение для систем управления второго порядка

$$x_1^{\boldsymbol{\cdot}}=x_2,\quad x_2^{\boldsymbol{\cdot}}=f_1(x_1, x_2, u)\tag{3}$$

с управлением (2) и таких, что управление, оптимальное по быстродействию имеет вид

$$u=\alpha \operatorname{sign} f_2(x_1, x_2)\tag{4}$$

т. е. u равно либо α, либо $-\alpha$ и меняет знак в момент пересечения фазовой траекторией системы линии переключения $f_2(x_1, x_2)=0$. Известно, что для очень многих систем управление, оптимальное по быстродействию, имеет именно такой вид.

Решение опирается на положения, опубликованные в [5, 6], где показано, что: 1. управлений, обеспечивающих наибольшую область управляемости, много; в частности, таковыми являются управления, доставляющие системе (1) минимум функционала вида $J=\int f(x_1, x_2\ldots x_n, u)\,dt$ $(0\leqslant t\leqslant\infty)$, где функция f положительна, ограни-