

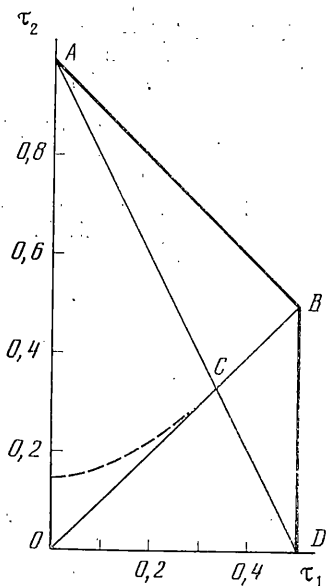
УДК 531.8

## УПРАВЛЕНИЕ АЛЛЮРАМИ ЧЕТЫРЕХНОГОЙ ХОДЬБЫ

ЗАЦЕПИН М. Ф., НОВОЖИЛОВ И. В.

Богатство кинематической схемы четырехногих животных и шагающих аппаратов дает широкие возможности для варьирования типов аллюров (походок). Эти возможности изучены пока мало. В [1] приведен большой объем биомеханических наблюдений по аллюрам животных. В [2] изучается плоская модель четырехногого аппарата. В недавних исследованиях<sup>1</sup> высказаны соображения об устойчивости периодических движений пространственной модели. Предполагается, что корпус движется поступательно и приведены результаты исследования пространственного движения двухопорными аллюрами типа «иноходь» и «рысь». При этом угловые движения корпуса допускаются, а программное движение центра масс корпуса считается равномерно-прямолинейным. В публикуемой работе предлагаются алгоритмы управления четырехногим шагающим аппаратом, посредством которых реализуется его передвижение с аллюрами, подобными аллюрам животных из [1]. Исследованы угловые колебания корпуса на разных аллюрах.

**1. Аллюры.** Для дальнейшего удобно считать, что четырехногий аппарат образован двумя одинаковыми двуногими модулями (передняя и задняя пары ног), соединенными корпусом.



Фиг. 1

Обозначим  $T_0$  время опорной фазы каждой из ног,  $T_1$  — время двухопорной фазы для каждого из модулей,  $T_2$  — временной сдвиг между началами опорных фаз передней и задней диагональных ног. Движение ног повторяется с периодом  $2(T_0 - T_1)$ . Учитывая лево-правостороннюю симметрию движения, в качестве времени цикла  $T_n$  будем далее брать половину периода  $T_n = T_0 - T_1$ .

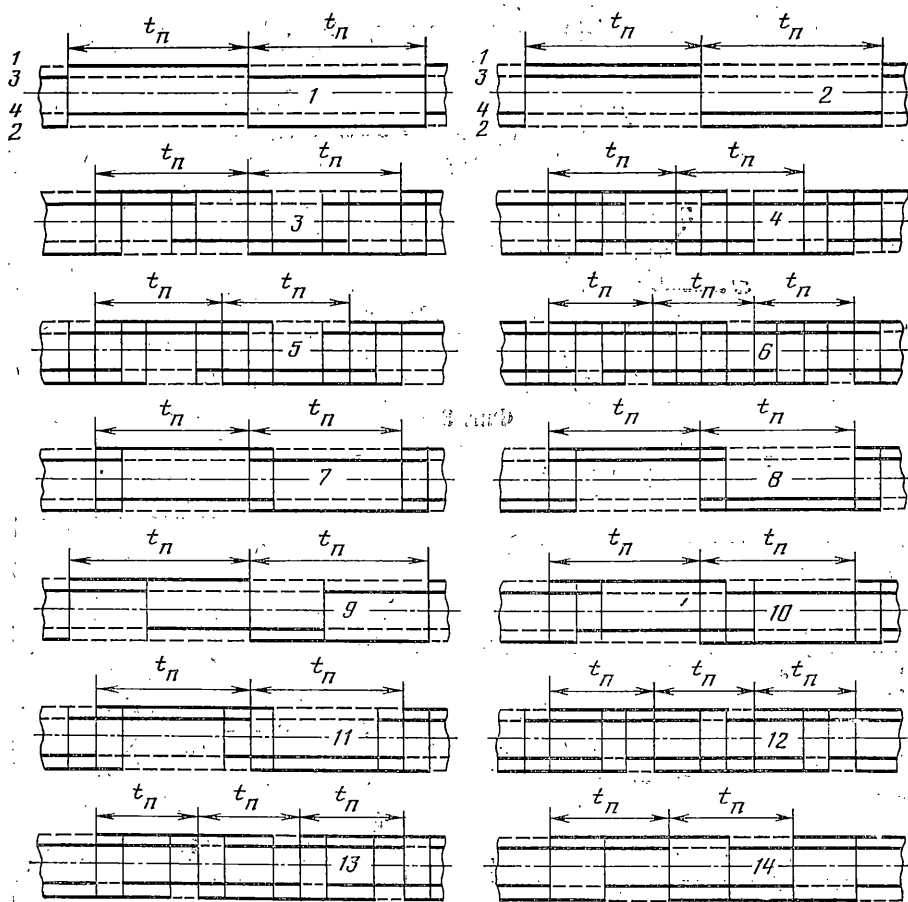
Ограничимся далее случаем  $T_1 \geq 0$ . При этом каждый из модулей движется без отрыва от поверхности, что исключает галопообразные аллюры. Величину  $T_2$  ограничим условием  $T_0 \geq T_2 \geq 0$ , достаточным для статической устойчивости трехопорных фаз движения.

На фиг. 1 представлено разбиение плоскости параметров  $\tau_1 = T_1/T_0$ ,  $\tau_2 = T_2/T_0$  на области, соответствующие различным аллюрам из [1]. Опорные графики этих аллюров даны на фиг. 2. Сплошными линиями здесь изображены длительности фаз опоры, штриховыми — фаз переноса ног аппарата. Номера

1, 2 приданы передним, 3, 4 — задним ногам; нечетные — левым, четные — правым по ходу движения ногам;  $t_n = T_n/T_0$ .

Точке O на фиг. 1 соответствует аллюр «двухопорная рысь» (график 1), точке A — «двухопорная иноходь» (график 2). Области OAC со-

<sup>1</sup> Голубев Ю. Ф., Новикова И. А. Режимы движения шагающего аппарата с нарушением статической устойчивости. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М., 1983, № 5. 30 с.; Болотин Ю. В. Динамическая стабилизация статически неустойчивых походок шагающего аппарата. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. М.: 1983, № 63. 28 с.

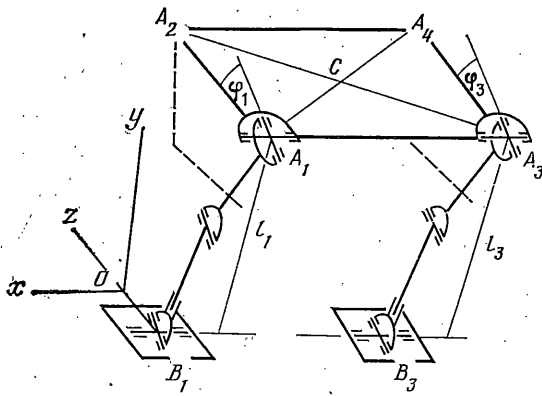


Фиг. 2

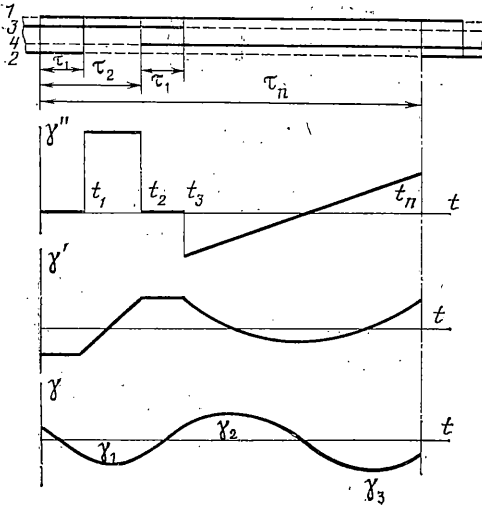
ответствуют аллюры типа «нормальный шаг» (график 3), области  $OCD$  — «медленный рысеобразный шаг» (график 4), области  $ABC$  — «медленный иноходообразный шаг» (график 5), области  $B CD$  — «очень медленный шаг» (график 6). Линии  $OD$  соответствуют аллюры типа «медленная рысь» (график 7), линии  $AB$  — «медленная иноходь» (график 8), линиям  $OA$ ,  $OC$ ,  $AC$ ,  $CB$ ,  $CD$  — аллюры с опорными графиками 9, 10, 11, 12, 13. Линия  $BD$  соответствует передвижению только с четырехопорными фазами. Оно не реализуемо, так как время переноса ног обращается в нуль.

Опишем модель аппарата и постановку задачи управления. На фиг. 3 представлена кинематическая схема аппарата. Корпус обладает лево-правосторонней симметрией, ноги: одинаковые, двухзвенные, невесомые. Корпус и ноги абсолютно жесткие. За опорную поверхность принимается горизонтальная плоскость. Верхнее звено ноги «бедро» соединяется с корпусом двухстепенным шарниром, с нижним звеном «голенью» — шарниром с одной степенью свободы. Голень соединяется с неподвижной относительно опорной поверхности «стойкой» трехстепенным шарниром. Размеры всех шарниров считаем пренебрежимо малыми. Точки крепления ног на корпусе расположены по вершинам прямоугольника длины  $2L$  и ширины  $2D$ . Центр масс корпуса для простоты поместим на пересечении диагоналей прямоугольника.

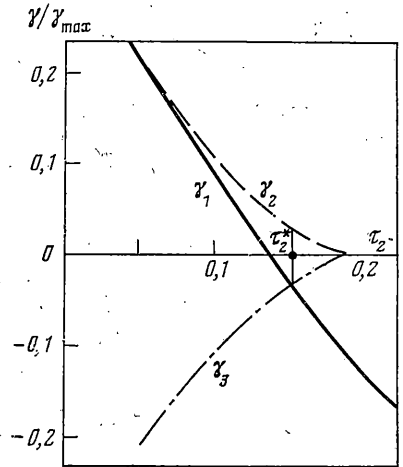
Далее будет рассматриваться система управления, предназначенная обеспечить заданное программное движение корпуса. Потребуем высокой точности выполнения программы. Такая постановка задачи управления позволяет решить ее в два этапа [3, 4]. На первом рассматривается обратная задача движения системы по сервосвязям, соответствующим



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

программе. На втором — выбирается «жесткое» управление, удерживающее систему на сервосвязях.

Будем считать стопу неуправляемой, моменты управления задаются по осям остальных шарниров. Такое управление в фазе опоры на три или четыре ноги может обеспечить произвольное движение корпуса (если оговорить кинестатическую устойчивость). В двухопорной, статически неустойчивой фазе движение корпуса принципиально неуправляемо по одному угловому параметру.

**2. Уравнения движения по сервосвязям.** Введем (фиг. 3) неподвижную систему координат  $Oxyz$ , плоскость  $Oxz$  которой совпадает с опорной плоскостью. Начало отсчета  $O$  поместим так, чтобы точка опоры передней ноги лежала на оси  $z$ . Обозначим  $X_c, Y_c, Z_c$  координаты центра масс  $C$  корпуса. Зададим трехгранник  $Cx_1y_1z_1$ , связанный с корпусом и совпадающий с его главными осями инерции. Ориентацию  $Cx_1y_1z_1$  относительно  $Oxyz$  зададим углами  $\psi, \theta, \gamma$  — рысканья, тангажа и крена.

Составим уравнения движения центра масс в проекциях на оси  $Oxyz$  и кинетического момента относительно точки  $C$  в проекциях на оси  $Cx_1y_1z_1$  для всего аппарата. Считая углы малыми и пренебрегая величинами второго порядка малости по  $\psi, \theta, \gamma, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\gamma}$ , имеем

$$mX_c'' = \sum_k R_{kx}, \quad mY_c'' = \sum_k R_{ky} - G, \quad mZ_c'' = \sum_k R_{kz} \quad (2.1)$$

$$I_{y_1}\psi'' = M_{Cy_1}, \quad I_{z_1}\theta'' = M_{Cz_1}, \quad I_{x_1}\gamma'' = M_{Cx_1}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени  $T$ ,  $m, G$  —

масса и вес аппарата,  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{z_1}$  — главные моменты инерции корпуса,  $R_{kx}$ ,  $R_{ky}$ ,  $R_{kz}$  — проекции силы реакции в точке опоры  $k$ -й ноги,  $M_{cx_1}$ ,  $M_{cy_1}$ ,  $M_{cz_1}$  — проекции момента внешних для системы сил веса и реакций в точках опоры; суммирование в (2.1) идет по индексам опорных ног.

Выберем вид сервосвязей, налагаемых на систему (2.1). На двухопорных фазах движения в качестве сервосвязей примем

$$X_c = V_c, \quad Y_c = H, \quad Z_c = 0, \quad \psi = 0, \quad \phi = 0 \quad (2.2)$$

В движении (2.2) центр масс движется в плоскости  $Oxy$  на постоянной высоте  $H$  с постоянной скоростью  $V_c$ ; неуправляемым остается движение по углу крена  $\gamma$ .

На сервосвязях (2.2) система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_k R_{kx} = 0, \quad \sum_k R_{ky} - G = 0, \quad \sum_k R_{kz} = 0 \\ M_{cy_1} = 0, \quad M_{cz_1} = 0, \quad I_{x_1} \gamma'' = - \sum_k R_{ky} z_{B_k} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $z_{B_k}$  — боковой вынос точки опоры  $B_k$  для  $k$ -й опорной ноги относительно плоскости  $Oxy$ .

Предположим далее, что боковые координаты опорных точек обеих ног выбираются равными по модулю, величина которого не изменяется от шага к шагу. Обозначим  $z_B$  боковой вынос передней ноги. Длину шага примем равной  $L$ , а величину начального продольного выноса точки опоры ноги относительно точки ее крепления к корпусу —  $L/2$ .

Тогда в случае иноходи, односторонних опорных ног, из (2.3) получим:

$$I_{x_1} \gamma'' = -G z_B \quad (2.4)$$

В случае рыси, диагональных опорных ног, имеем

$$I_{x_1} \gamma'' = -G z_B / (2L - V_c T_2) (2V_c T - V_c T_2 - L) \quad (2.5)$$

Перейдем в (2.4), (2.5) к безразмерному времени  $t = T/T_0$ . Тогда для иноходи и для рыси получим соответственно (штрихом здесь обозначено дифференцирование по  $t$ ):

$$\gamma'' = -u z_B, \quad u = GL T_0^2 / I_{x_1} \quad (2.6)$$

$$\gamma'' = -u z_B / (2 - \tau_2) (2t - \tau_2 - 1)$$

На трех- и четырехопорных полностью управляемых фазах движения примем дополнительно к (2.6):

$$\gamma'' = 0 \quad (2.7)$$

**3. Колебания корпуса на разных аллюрах.** Периодические движения по углу крена, соответствующие аллюрам фиг. 1, 2, будем «склеивать» из движений, описываемых уравнениями (2.6), (2.7). Условиями склейки в момент перехода от одной фазы движения к другой будут условия непрерывности по  $\gamma$  и  $\gamma'$ , что является условием безударности в момент перехода. (Следует заметить, что сервосвязи, допускающие в отличие от (2.2) одновременно с  $\gamma$  движение по  $\phi$ , не реализуются безударным способом.)

Условием периодичности движения будет

$$\gamma(0) = -\gamma(t_n), \quad \gamma'(0) = -\gamma'(t_n); \quad (t_n = T_n/T_0 = 1 - \tau_1) \quad (3.1)$$

Построим периодическое движение, соответствующее аллюру «нормальный шаг» (график 3 на фиг. 2). Движение, соответствующее другим аллюрам, можно получить как частные случаи из этого, наиболее общего.

Решая последовательно уравнения (2.6), (2.7) и производя непрерывную по  $\gamma$ ,  $\gamma'$  склейку, получим (фиг. 4):

при  $0 \leq t < t_1$  ( $t_1 = \tau_1$ ) — трехопорная фаза

$$\gamma(t) = \gamma'(0), \quad \gamma(t) = \gamma(0) + \gamma'(0)t \quad (3.2)$$

при  $t_1 \leq t < t_2$  ( $t_2 = \tau_2$ ) — двухопорная, иноходообразная фаза

$$\gamma'(t) = \gamma'(t_1) - uz_B(t - t_1) \quad (3.3)$$

$$\gamma(t) = \gamma(t_1) + \gamma'(t_1)(t - t_1) - uz_B(t - t_1)^2$$

при  $t_2 \leq t < t_3$  ( $t_3 = \tau_2 + \tau_1$ ) — трехопорная фаза

$$\gamma'(t) = \gamma'(t_2); \quad \gamma(t) = \gamma(t_2) + \gamma'(t_2)(t - t_2) \quad (3.4)$$

при  $t_3 \leq t < t_n$  — двухопорная рысеобразная фаза

$$\gamma'(t) = \gamma'(t_3) - \frac{uz_B}{2 - \tau_2}(t - t_3) [(t - t_3) + (2t_3 - \tau_2 - 1)] \quad (3.5)$$

$$\gamma(t) = \gamma(t_3) + \gamma'(t_3)(t - t_3) - \frac{uz_B}{3(2 - \tau_2)}(t - t_3)^2 \left[ (t - t_3) + \frac{3}{2}(2t_3 - \tau_2 - 1) \right]$$

Значения величин  $\gamma'(0)$ ,  $\gamma(0)$ , соответствующих периодическому режиму, найдем из (3.2)–(3.5) и условий периодичности (3.1):

$$\gamma'(0) = \frac{1}{2}uz_B(\tau_2 - \tau_1)$$

$$\gamma(0) = \frac{(1 - 2\tau_1 - \tau_2)}{2} \left[ \gamma'(0) - \frac{uz_B(1 - 2\tau_1 - \tau_2)}{6(2 - \tau_2)} \right]$$

Оценим размах колебаний корпуса по  $\gamma$  в зависимости от величины параметров  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . График  $\gamma(t)$  на фиг. 4 имеет три локальных экстремума  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ . Исследование экстремумов показывает, что два из них, обозначенные  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ , совпадают по модулю при любых  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . При  $\tau_1 = \tau_2$  совпадают величины всех трех экстремумов  $\gamma_1 = \gamma_2 = -\gamma_3 = -\frac{1}{12}uz_B(1 - 3\tau_1)^3 / (2 - \tau_1)$ .

Отсюда при  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ , что соответствует аллюру двухопорная рысь, имеем

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\gamma_3 = -\frac{1}{24}uz_B \quad (3.6)$$

Другой предельный случай получим для границы  $AC$  области  $OAC$  (фиг. 1), когда  $\tau_2 = 1 - 2\tau_1$ . При этом  $\gamma_2 = -\gamma_3 = 0$ , а экстремум  $\gamma_1$  принимает значение

$$\gamma_1 = \frac{1}{8}uz_B(1 - 2\tau_1 - 3\tau_1^2) \quad (3.7)$$

Из (3.7) для  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 1$ , соответствующих аллюру двухопорная иноходь, получим максимальное по  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  отклонение

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{8}uz_B \quad (3.8)$$

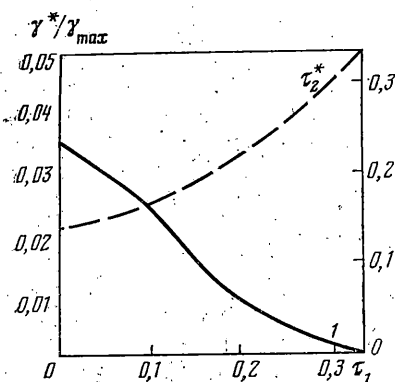
Сравнивая (3.6) с (3.8), замечаем, что максимальные размахи колебаний корпуса по  $\gamma$  при движении иноходью в три раза больше, чем при движении рысью.

Типичная зависимость величин  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  от  $\tau_2$  при фиксированном  $\tau_1 = 0,05$  представлена на фиг. 5, из которой видно, что величины всех трех экстремумов совпадают и при некотором  $\tau_2 = \tau_2^*$ . Очевидно, для данного фиксированного  $\tau_1$  выбор  $\tau_2 = \tau_2^*$  обеспечивает минимальный размах колебаний  $\gamma_2 = -\gamma_3 = -\gamma_1 = \gamma^*$ . При изменении  $\tau_1$  величины  $\tau_2^*$ ,  $\gamma^*$  меняются. Зависимость  $\gamma^*(\tau_1)$  представлена на фиг. 6, зависимость  $\tau_2^*(\tau_1)$  — на фиг. 1 и 6 штриховой линией.

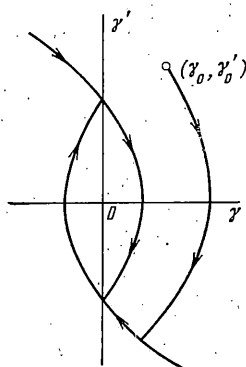
При  $\tau_1 = \frac{1}{3}$  имеем  $\tau_2^* = \frac{1}{3}$ ,  $\gamma^* = 0$ , т. е. корпус движется поступательно. Такое движение соответствует точке  $C$  фиг. 1 и складывается только из трехопорных фаз (график 14 на фиг. 2).

Проведем количественную оценку колебаний, взяв шагающий аппарат, длина которого  $2L = 4$  м, а ширина следовой дорожки  $2z_B = 0,5$  м. Пусть аппарат движется со скоростью  $V_c = L/T_0 = 5$  м/с. Для этих числовых значений получим из (3.16) размах колебаний при движении аллюром иноходь  $\gamma_{\max} \approx 18^\circ$ .

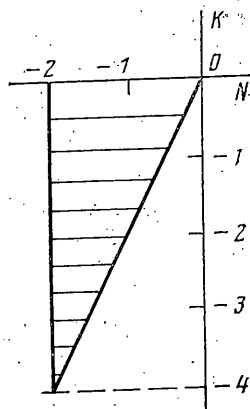
4. Если рассматриваемый аллюр включает фазы трех- или четырехопорного движения, то возмущения периодического движения могут быть



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

ликвидированы во время этих фаз. Задача устойчивости стоит по существу лишь для чисто двухопорных аллюров.

Исследуем сначала двухопорную иноходь. Так как безынерционные ноги в фазе переноса могут быть поставлены, с известными ограничениями, в произвольную точку плоскости и в произвольный момент времени, то имеется две возможности управления: за счет выбора бокового выноса  $z_{B_1} = z_{B_2} = z_B$  и времени шага.

Рассмотрим случай  $|z_B| = \text{const}$ , время шага не фиксировано. Правая часть уравнения (3.6) при этом постоянна по модулю и меняет знак в момент смены пары опорных ног. Задачи с ограничением по управлению неоднократно рассматривались в теории регулирования [5]. По аналогии с известными задачами линию переключения знака управления (смены опорных ног) составим из отрезков парабол в фазовом пространстве  $(\gamma, \gamma')$ , как изображено на фиг. 7. При этом выход на периодический режим из произвольных начальных условий осуществляется не более чем за два шага.

Рассмотрим теперь случай фиксированного времени шага и  $|z_B| \neq \text{const}$ . Выберем простейший линейный закон формирования величины бокового выноса  $z_{B,i+1}$  в момент начала  $(i+1)$ -го шага по измерениям  $\gamma_i, \gamma'_i$  в момент окончания предыдущего  $i$ -го шага

$$z_{B,i+1} = -[z_{B,i} + K(\gamma_i - \gamma_i^0) + N(\gamma'_i - \gamma_i'^0)] \quad (4.1)$$

Здесь  $z_{B,i}^0, \gamma_i^0, \gamma_i'^0$  — значения соответствующих величин на периодическом режиме из п. 4 в момент окончания  $i$ -го шага.

Уравнения (3.6), (4.1) позволяют составить конечно-разностные уравнения в рассогласованиях от периодического движения. Условия устойчивости этой системы в параметрах  $K, N$  получаются такими же, как в [6]. Область устойчивости на фиг. 8 отмечена штриховкой. Здесь исправлена погрешность, допущенная в [6].

Исследуем аллюр двухопорная рысь. Пусть управление реализуется за счет выбора координат точек опоры, удовлетворяющих условиям симметрии  $z_{B_1} = -z_{B_2}, z_{B_2} = -z_{B_1}$ . Время шага фиксировано. Тогда конечно-разностные уравнения в рассогласованиях от периодического движения будут в точности такими же, как в случае иноходи. Отсюда следует, что управление (4.1) обеспечивает устойчивость этой походки.

5. Рассмотрим жесткое управление по рассогласованиям от сервосвязей. Поясним выбор структуры управления на примере аппарата в фазе движения иноходь (фиг. 3).

В фазе опоры на данную пару ног из шести обобщенных координат системы непрерывное управление возможно лишь по пяти координатам, управление шестой, углом  $\gamma$ , осуществляется (п. 4) дискретно — за счет смены пар опорных ног.

Непрерывное управление пятью координатами сформируем таким, чтобы при этом были использованы результаты из [6, 7] по управлению моделью двуногого шагающего аппарата. В качестве этих пяти координат выберем (фиг. 3) высоту  $l_1$  и продольную скорость  $V_{A_1x}$  точки  $A_1$  подвеса передней ноги, измеряемые в плоскости этой ноги; аналогичную величину  $l_3$  для задней ноги, углы  $\varphi_k$  между плоскостями ног и корпусом ( $k=1,3$ ). Измерение текущих значений этих величин может производиться, например, по показаниям датчиков углов поворота в осях шарниров бедра и голени. В качестве программных значений  $l_1^0, l_3^0, V_{A_1x}^0, \varphi_k^0$  переменных должны вычисляться как функции времени величины, соответствующие движению по сервосвязям (2.2) и синхронизированные с началом данного шага.

Жесткое управление движением обеих ног в осях шарниров бедра, связанных с корпусом, должно осуществляться по рассогласованиям  $\varphi_k - \varphi_k^0$ . Управление движением бедра и голени в осях шарниров, перпендикулярных плоскостям ног, должно осуществляться по рассогласованиям  $l_1 - l_1^0, l_3 - l_3^0, V_{A_1x} - V_{A_1x}^0$ , как в плоской задаче из [4, 6, 7].

Возникающая задача обеспечения устойчивости системы по «быстрым» движениям решается исследованием системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гамбарян П. П. Бег млекопитающих. Л.: Наука, 1972. 334 с.
2. Калинин В. В. О выборе походки четырехногого шагающего аппарата. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 51–58.
3. Новожилов И. В., Зацепин М. Ф. К сравнению разных типов пространственных походок четырехногого шагающего аппарата. — В кн.: Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф. по проблемам биомеханики. Рига: Изд-во М-ва здравоохранения ЛатвССР, 1983, с. 109–110.
4. Новожилов И. В. Управление ногой шагающего аппарата в фазе опоры. — В кн.: Биомеханика, вып. 13. Тр. Рижск. Н.-и. ин-та травматологии и ортопедии, 1975, вып. 3, с. 634–639.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
6. Новожилов И. В. Управление пространственным движением двуногого шагающего аппарата. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 47–53.
7. Болотин В. В., Новожилов И. В. Управление походкой двуногого шагающего аппарата. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3, с. 47–52.

Москва

Поступила в редакцию  
15.III.1984