МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1986

УДК 531.53

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРХНЕГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

ЗЕВИН А. А., ФИЛОНЕНКО Л. А.

Рассмотрен маятник, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с большой амплитудой. Доказано существование периодических колебаний маятника относительно верхнего положения равновесия, получено необходимое, а также достаточное условие их устойчивости и установлен вид соответствующей амплитудно-частотной характеристики.

Как известно [1–3], при большой частоте и малой амплитуде колебаний точки подвеса верхнее положение равновесия маятника устойчиво. При увеличении амплитуды устойчивость нарушается и появляется периодическое решение, отвечающее колебаниям маятника относительно этого положения. Существование такого решения в случае гармонических колебаний точки подвеса установлено численными методами в [4]; аналитические исследования этого решения отсутствуют. Так как оно существует только при большом возмущающем воздействии, то для него неприменимы асимптотические методы, используемые обычно при анализе таких систем. В данной работе выполнено строгое качественное исследование этого решения для определенного класса колебаний точки подвеса.

**1.** Уравнение движения физического маятника с вибрирующей точкой подвеса имеет вид

$$Ix^{\cdot\cdot}+me(ap^{\cdot\cdot}(\omega t)-g)\sin x=0 \qquad (1.1)$$

Здесь $I$, $m$ и $e$ — момент инерции, масса и эксцентриситет маятника, $g$ — ускорение силы тяжести, $x$ — угловая координата, отсчитываемая от верхнего положения равновесия, $ap^{\cdot\cdot}(\omega t)$ — ускорение точки подвеса.

Полагаем, что $p(\omega t)=p(-\omega t)=p(\omega t+\pi)=-p(\omega t+{}^1/_2\pi)$, $ap^{\cdot\cdot}(\omega t)\leqslant 0$ при $t\in(0, {}^1/_2\pi/\omega)$. Эти условия, в частности, выполняются при гармонических колебаниях точки подвеса ($p=-\cos 2\omega t$, $a>0$).

Будем рассматривать периодические колебания вида

$$x(t)=x(-t)=-x(t+{}^1/_2T),\ x^{\cdot}(t)<0 \text{ на } (0, {}^1/_2T),\ T=2\pi/\omega \qquad (1.2)$$

период которых $T$ равен удвоенному периоду колебаний точки подвеса; координата $x(t)$ монотонно убывает от $x(0)=A$ до $x({}^1/_2T)=-A$, где $A$ — амплитуда колебаний маятника.

Покажем, что при соответствующей амплитуде колебаний точки подвеса существуют рассматриваемые решения с любой наперед заданной частотой $\omega$ и амплитудой $A<\pi$.

Пусть $x(t, a)$ — решение уравнения (1.1) при начальных условиях $x(0, a)=A<\pi$, $x^{\cdot}(0, a)=0$. Так как $x^{\cdot\cdot}(0)\to-\infty$ при $a\to\infty$, то при достаточно больших $a$ справедливо неравенство $x^{\cdot}(t, a)<0$ на $(0, t_1)$, где $t_1$ — первый нуль решения $x(t, a)$. Точка $x=x^{\cdot}=0$ является особой точкой уравнения (1.1) и не может достигаться при конечных $t$, поэтому $x^{\cdot}\neq 0$ при $x=0$; следовательно, $t_1(a)$ — непрерывная функция. С уменьшением $a$ неравенство $x^{\cdot}(t, a)<0$ на $(0, t_1]$ сохраняется при $t_1\leqslant{}^1/_2\pi/\omega$, так как в силу (1.1) $x^{\cdot\cdot}(t, a)<0$ на $(0, t_0)$ и $x^{\cdot\cdot}(t, a)>0$ на $(t_0, t_1)$, где $ap^{\cdot\cdot}(\omega t_0)=g$ (по предположению, $ap^{\cdot\cdot}(\omega t)$ убывает на $(0, {}^1/_2\pi/\omega)$). С другой стороны, условия $x(t_1, a)=0$, $x^{\cdot}(t, a)<0$ на $(0, t_1]$ не сохраняются при $a\to g/p^{\cdot\cdot}(0)$ ($x^{\cdot\cdot}(t, a)\to 0$ на $(0, t_0)$, $t_0\to 0$). Следовательно, $t_1={}^1/_2\pi/\omega$ при некотором $a>(g/p^{\cdot\cdot}(0))$. Очевидно, что соответствующее решение $x(t, a)$, будучи продолжено по $t$, удовлетворяет условиям (1.2), т. е. является искомым решением.

Исследуем поведение амплитудно-частотной характеристики рассматриваемого решения. Положив $\tau=\omega t$, приведем (1.1) к виду

$$x''+(\mu p''(\tau)-\omega_0^2/\omega^2)\sin x=0 \qquad (1.3)$$

$$\mu=mea/I, \qquad \omega_0^2=meg/I$$

Здесь $\omega_0$ — частота свободных малых колебаний маятника; штрих означает дифференцирование по $\tau$.

Пусть $x(\tau)$ — положительное решение краевой задачи для уравнения (1.3) при условиях

$$x'(0)=x(^1/_2\pi)=0 \qquad (1.4)$$

Очевидно, что $x(\omega t)$ совпадает на $(0, {}^1/_2\pi/\omega)$ с решением (1.2).

Решению $x(\tau)$ отвечает уравнение в вариациях

$$y''+r(\tau)y=0, \quad r(\tau)=[\mu p''(\tau)-(\omega_0^2/\omega^2)]\cos x(\tau) \qquad (1.5)$$

Покажем, прежде всего, что решение $y_1(\tau, 0)$ уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям $y_1(0, 0)=1$, $y_1'(0, 0)=0$, положительно на $[0, {}^1/_2\pi]$.

Разделив и умножив (1.3) на $x(\tau)$, найдем, что $x(\tau)$ представляет собой собственную функцию линейной краевой задачи

$$y''+\lambda r_1(\tau)y=0, \quad y'(0)=y(^1/_2\pi)=0$$
$$r_1(\tau)=[\mu p''(\tau)-(\omega_0^2/\omega^2)]\sin x(\tau)/x(\tau) \qquad (1.6)$$

причем соответствующее собственное значение $\lambda_1=1$ является (ввиду положительности $x(\tau)$ на $(0, {}^1/_2\pi)$) наименьшим положительным собственным значением.

При $\lambda\in[0, 1)$ решение $y_1(\tau, 0, \lambda)$ уравнения (1.6) положительно на $[0, {}^1/_2\pi]$. Предположим сначала, что $x(\tau_0)\leqslant{}^1/_2\pi$, где $\tau_0=t_0/\omega$. Так как $\sin x>x\cos x$ на $(0, \pi]$, то $0<\lambda_*=\cos x(\tau_0)x(\tau_0)/\sin x(\tau_0)<1$, поэтому $y_1(\tau, 0, \lambda_*)>0$ на $[0, \pi/2]$. Но в силу монотонности $x(\tau)$ будем иметь $r(\tau)=r_1(\tau)\cos x(\tau)x(\tau)/\sin x(\tau)<\lambda_* r_1(\tau)$ при $\tau\neq\tau_0$, поэтому решение (1.5) $y_1(\tau, 0)>0$ на $[0, {}^1/_2\pi]$.

Пусть теперь $x(\tau_0)>{}^1/_2\pi$. Аналогично [5] можно показать, что любые решения $x(\tau)$ и $y(\tau)$ уравнений (1.3) и (1.5) удовлетворяют соотношению

$$x^\bullet(s)y^\bullet(s)\Big|_\tau^{^1/_2\pi}=\int_\tau^{^1/_2\pi}\mu p'''(s)\sin x(s)\,y(s)\,ds-\left(\mu p''(s)-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\sin x(s)\,y(s)\Big|_\tau^{^1/_2\pi} \qquad (1.7)$$

Положим в (1.7) $y=y_1(\tau, {}^1/_2\pi)$ $(y_1(^1/_2\pi, {}^1/_2\pi)=1, y_1'(^1/_2\pi, {}^1/_2\pi)=0)$, $x=x(\tau)$. Так как $r(\tau)<0$ при $\tau={}^1/_2\pi$, то $y_1'(\tau, {}^1/_2\pi)<0$ на некотором интервале $(\tau, {}^1/_2\pi)$. Это неравенство не может нарушиться при $\tau\in(\tau_0, {}^1/_2\pi)$, иначе при соответствующем $\tau$ левая часть (1.7) равна нулю, правая отрицательна $(p'''(s)<0,\ \sin x(s)>0,\ \mu p''(s)-(\omega_0^2/\omega^2)<0$ на $(\tau_0, {}^1/_2\pi))$. Неравенство $y'(\tau, {}^1/_2\pi)<0$ сохраняется и на $[0, \tau_0]$, так как здесь в (1.5) $r(\tau)<0$ ввиду $x(\tau)>{}^1/_2\pi$.

Пусть $C>y_1(0, {}^1/_2\pi)$, тогда $Cy_1(0, 0)=C>y_1(0, {}^1/_2\pi)$, $Cy_1'(0, 0)=0>y_1'(0, {}^1/_2\pi)$, следовательно [6], $Cy_1(\tau, 0)>y_1(\tau, {}^1/_2\pi)$, т. е. $y_1(\tau, 0)>0$ на $[0, {}^1/_2\pi]$.

Как известно, производная $x(\tau)$ по параметру $\omega$ является решением краевой задачи, полученной дифференцированием (1.3) и (1.4) по $\omega$

$$y''+r(\tau)y+2\omega_0^2/\omega^3\sin x(\tau, \omega)=0, \quad y'(0)=y(^1/_2\pi)=0 \qquad (1.8)$$

С помощью функции Грина $\Gamma(\tau, s)$ решение (1.8) представим в виде

$$x_\omega(\tau, \omega)=\frac{\partial x(\tau, \omega)}{\partial\omega}=-\frac{2\omega_0^2}{\omega^3}\int_0^{^1/_2\pi}\Gamma(\tau, s)\sin x(s, \omega)\,ds$$

$$\Gamma(\tau, s)=-y_2(^1/_2\pi, s)y_1(\tau, 0)/y_1(^1/_2\pi, 0) \text{ при } \tau<s \qquad (1.9)$$

$$\Gamma(\tau, s)=-y_2(^1/_2\pi, s)y_1(\tau, 0)/y_1(^1/_2\pi, 0)+y_2(\tau, s) \text{ при } \tau>s$$

Здесь $y_1(\tau, s)$ и $y_2(\tau, s)$ — решения однородного уравнения (1.5), удовлетворяющие условиям $y_1(s, s)=y_2'(s, s)=1$, $y_1'(s, s)=y_2(s, s)=0$.

Как установлено, $y_1(\tau, 0)>0$ на $[0, {}^1/_2\pi]$. Так как нули различных решений уравнения Штурма перемежаются [6], то $y_2({}^1/_2\pi, s)>0$ при $0\leqslant s<{}^1/_2\pi$. Поэтому $\Gamma(0, s)<0$ на $(0, {}^1/_2\pi)$, $x_\omega(0, \omega)=(dA(\omega)/d\omega)>0$, т. е. амплитудно-частотная характеристика рассматриваемого решения монотонно возрастает по $\omega$.

Заметим, что, в отличие от рассматриваемого случая, амплитудно-частотная характеристика параметрических колебаний маятника относительно нижнего положения равновесия монотонно убывает [5].

Так как $(\sin x/x)\to 1$ при $x\to 0$, то предельное значение $\omega_*=\lim\omega(A)$ при $A\to 0$ отвечает периодическому решению $x_0(\tau)$ уравнения Хилла

$$x''+(\mu p''(\tau)-\omega_0^2/\omega_*^2)x=0 \qquad (1.10)$$

При гармонических колебаниях точки подвеса уравнение (1.10) является уравнением Матье. Функция $x_0(\tau)$ качественно имеет такой же вид, что и $x(\tau)$ $(x_0(\tau)=x_0(-\tau)$, $x_0(\tau)>0$ на $(0, {}^1/_2\pi)$, $x_0({}^1/_2\pi)=0)$. Указанным условиям удовлетворяет функция Матье первого рода $\mathrm{ce}_1(\tau)$, поэтому $\omega_*(\mu)$ определяется выражением [7]: $\omega_*=(-1+{}^1/_2\mu+1/32\mu^2-1/512\mu^3+\ldots)^{-1/2}$.

Исследуем зависимость амплитуды от параметра $\mu$ при $A<{}^1/_2\pi$. Функция $x_\mu(\tau, \mu)=\partial x(\tau, \mu)/\partial\mu$ является решением краевой задачи

$$y''+r(\tau)y+p''(\tau)\sin x(\tau, \mu)=0, \quad y'(0)=y({}^1/_2\pi)=0 \qquad (1.11)$$

Представив решение (1.11) с помощью функции Грина аналогично (1.9), найдем при $\tau=0$:

$$x_\mu(0, \mu)=\frac{dA(\mu)}{d\mu}=\frac{1}{y_1({}^1/_2\pi, 0)}\int\limits_0^{{}^1/_2\pi} p''(s)\sin x(s, \mu)\, y_2({}^1/_2\pi, s)\, ds \qquad (1.12)$$

Проинтегрировав (1.12) по частям, получим

$$x_\mu(0, \mu)=\frac{1}{y_1({}^1/_2\pi, 0)}\left[-\int\limits_0^{{}^1/_2\pi} R(s)\, y_{2s}({}^1/_2\pi, s)\, ds+R(s)\, y_2({}^1/_2\pi, s)\Big|_0^{{}^1/_2\pi}\right]$$

$$R(s)=\int\limits_0^s p''(z)\sin x(z, \mu)\, dz, \qquad y_{2s}=\frac{\partial y_2({}^1/_2\pi, s)}{\partial s} \qquad (1.13)$$

Так как $R(0)=0$, $y_2({}^1/_2\pi, {}^1/_2\pi)=0$, то внеинтегральный член в (1.13) равен нулю. Как известно, $y_{2s}(\tau, s)$ удовлетворяет уравнению (1.5), причем $y_{2s}(s, s)=-1$, $y_{2s}'(s, s)=0$, т. е. $y_{2s}(\tau, s)=-y_1(\tau, s)$. Так как $r(\tau)>0$ на $(0, \tau_0)$, то $y_1(\tau, 0)<1$, $y_1'(\tau, 0)<0$ при $\tau<\tau_0$, поэтому $y_1(s, s)=1>y_1(s, 0)$, $y_1'(s, s)>y_1'(s, 0)$, следовательно [6], $y_1(\tau, s)>y_1(\tau, 0)>0$, $y_{2s}(\tau, s)<0$ на $(s, {}^1/_2\pi)$ при $s<\tau_0$. Если $s>\tau_0$, то указанное неравенство справедливо в силу $r(\tau)<0$ на $(\tau_0, {}^1/_2\pi)$. Учитывая, что $p''(z)=-p''({}^1/_2\pi-z)>0$, $\sin x(z)>\sin x({}^1/_2\pi-z)$ на $(0, 1/4\pi)$ ввиду монотонности $x(z)$ и неравенства $x(z)<{}^1/_2\pi$, найдем $R(s)>0$ на $(0, {}^1/_2\pi)$. Таким образом, $x_\mu(0, \mu)>0$, т. е. при $A<{}^1/_2\pi$ с увеличением амплитуды колебаний точки подвеса амплитуда колебаний маятника возрастает.

2. Исследуем устойчивость рассматриваемого решения в первом приближении, т. е. устойчивость уравнения в вариациях (1.5). С практической точки зрения такое исследование является вполне достаточным, так как наличие в реальной системе малых диссипативных сил, не учтенных в уравнении (1.1), приводит к тому, что устойчивое в первом приближении решение становится асимптотически устойчивым [5]. Ясно, что неустойчивое решение остается неустойчивым при достаточно малых диссипативных силах.

Так как $x(\tau)=-x(\tau+\pi)$, $\cos x=\cos(-x)$, то $r(\tau)=r(\tau+\pi)$, т. е. наименьший период $r(\tau)$ равен $\pi$.

Для исследования устойчивости уравнения (1.5) воспользуемся следующим критерием устойчивости уравнения Хилла. Пусть $\lambda_1$, $y_1(\tau)$ — наименьшее положительное собственное значение и соответствующая собственная функция краевой задачи

$$y''+\lambda r(\tau)y=0,\quad y(-{}^1/_2\pi)=-y({}^1/_2\pi),\quad y'(-{}^1/_2\pi)=-y'({}^1/_2\pi) \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.5) ($\lambda=1$) устойчиво, если оно является колебательным (т. е. любое его решение имеет на $(-\infty, \infty)$ более одного нуля) и $\lambda_1>1$ [8].

Так как $r(\tau)=r(-\tau)$, то функция $y_1(\tau)$ является четной или нечетной и удовлетворяет поэтому условиям $y'(0)=y({}^1/_2\pi)=0$ либо $y(0)=$ $=y'({}^1/_2\pi)=0$. Поэтому $\lambda_1=\min(\lambda_r, \lambda_h)$, где $\lambda_r$ и $\lambda_h$ — первые положительные собственные значения краевых задач для уравнения (2.1) с соответствующими краевыми условиями.

Как было установлено, решение $y_1(\tau, 0)$ уравнения (1.5) положительно на $[0, {}^1/_2\pi]$; следовательно, $\lambda_r>1$.

Непосредственным дифференцированием (1.3) можно убедиться, что $v(\tau)=x'(\tau)$ является собственной функцией краевой задачи

$$y''+\lambda a(\tau)y=0,\quad y(0)=y'({}^1/_2\pi)=0 \tag{2.2}$$

$$a(\tau)=r(\tau)+\mu p'''(\tau)\sin x(\tau)v^{-1}(\tau)$$

отвечающей собственному значению $\lambda=1$. В силу последнего условия (1.2) $v(\tau)$ сохраняет знак на $(0, {}^1/_2\pi)$, поэтому $\lambda=1$—первое положительное собственное значение. Так как, по предположению, $\mu p'''(\tau)<0$, $v(\tau)<0$, $\sin x(\tau)>0$ на $(0, {}^1/_2\pi)$, то $a(\tau)>r(\tau)$, откуда $\lambda_h>\lambda=1$. Следовательно, $\lambda_1=\min(\lambda_r, \lambda_h)>1$, поэтому необходимым и достаточным условием устойчивости уравнения (1.5) является осцилляция его решений. Покажем, что она имеет место, если $y_1'({}^1/_2\pi, 0)<0$.

Действительно, при уменьшении $r(\tau)$ значение $y_1'({}^1/_2\pi, 0)$ возрастает, поэтому $y_1(\tau, 0)>0$ на $[0, {}^1/_2\pi]$, $y_1'({}^1/_2\pi, 0)=0$ при некотором $r_*(\tau)<r(\tau)$. Положим $r_*(\tau)=r_*(-\tau)$, тогда $y_1(\tau, 0)=y_1(-\tau, 0)$, $y_1'(-{}^1/_2\pi, 0)=$ $=y_1'({}^1/_2\pi, 0)=0$, т. е. решение $y_1(\tau, 0)$ является периодическим и не имеет нулей на $(-\infty, \infty)$. В силу неравенства $r_*(\tau)<r(\tau)$ уравнение (1.5) колебательное [8]. В случае $y_1'({}^1/_2\pi, 0)\geqslant0$ аналогично показывается, что уравнение (1.5) неколебательное и, следовательно, неустойчиво. Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости решения $x(\tau)$ является неравенство $y_1'({}^1/_2\pi, 0)<0$.

Заметим, что $r(\tau)\approx r_1(\tau)$ при малых $A$. Так как уравнение (1.6) при $\lambda=1$ колебательное (его решение $x(\tau)$ имеет нули при $\tau={}^1/_2\pi$ и $\tau=-{}^1/_2\pi$), то уравнение (1.5) также колебательное. Следовательно, решения с достаточно малыми амплитудами устойчивы. Можно показать, что если решение с амплитудой $A_*$ устойчиво, то устойчивым является также любое решение с амплитудой $A<A_*$.

Достаточное условие устойчивости, не требующее отыскания $x(\tau)$, можно получить с помощью следующих соображений. Так как $\omega>\omega_*$, $\cos x(\tau)>\cos A$ на $(0, \tau_0)$, а $\cos x(\tau)<1$ на $(\tau_0, {}^1/_2\pi)$, то $r(\tau)>r_2(\tau, A)$; $r_2(\tau, A)=(\mu p''(\tau)-\omega_0^2/\omega_*^2)\cos A$ на $(0, \tau_0)$; $r_2(\tau, A)=\mu p''(\tau)-\omega_0^2/\omega_*^2$ на $(\tau_0, {}^1/_2\pi)$.

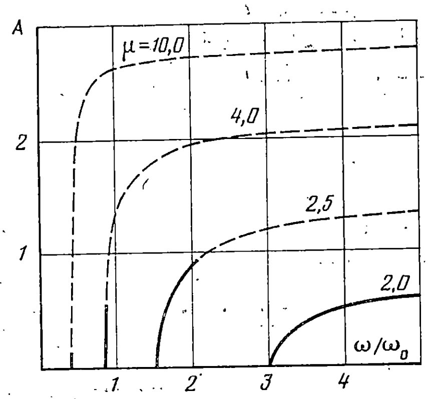
Следовательно, уравнение (1.5) будет колебательным, если таковым является уравнение

$$u''+r_2(\tau)u=0 \tag{2.3}$$

Таким образом, при заданных $\mu$ и $A$ рассматриваемое решение $x(\tau)$ устойчиво, если решение уравнения (2.3) $u_1'({}^1/_2\pi, 0)<0$ $(u_1(0, 0)=1$, $u_1'(0, 0)=0)$.

3. С целью иллюстрации полученных результатов выполнены числовые расчеты для случая гармонических колебаний точки подвеса.

При фиксированном значении параметра $\mu$ и амплитуде колебаний маятника $A$ соответствующее значение частоты $\omega$ определялось как корень уравнения $x(^1/_2\pi, \omega)=0$, где $x(\tau, \omega)$ — решение уравнения (1.3) при начальных условиях $x(0, \omega)=A$, $x'(0, \omega)=0$. При найденном $\omega$ вычислялось решение $x(\tau)$ и с помощью уравнения (1.5) проверялось необходимое и достаточное условие устойчивости $y_1'(^1/_2\pi, 0)<0$. С помощью уравнения (2.3) проверялось достаточное условие устойчивости $u_1'(^1/_2\pi, 0)<0$, не требующее отыскания $\omega$ и $x(\tau)$.




На фигуре для различных значений $\mu$ приведены амплитудно-частотные характеристики $A(\omega)$ рассмотренных колебаний маятника относительно верхнего положения равновесия. Сплошным линиям отвечают устойчивые, штриховым — неустойчивые колебания. Наибольшая амплитуда устойчивых колебаний уменьшается с возрастанием $\mu$. Заметим, что достаточное условие устойчивости при $\mu=2$ выполняется для всех $A$, при $\mu=2{,}5$ — для $A<0{,}708$, при $\mu=4$ — для $A<0{,}413$, при $\mu=10$ — для $A<0{,}083$.

Поведение амплитуды $A$ в зависимости от $\omega$ и $\mu$ полностью согласуется с установленными общими результатами.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике: Сб. тр. ин-та строит. механики АН УССР, 1950, № 4, с. 9—34.
2. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.— Ж. эксперим. и теорет. физики, 1951, т. 21, вып. 5, с. 588—597.
3. *Крейн М. Г.* О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем.— ПММ, 1955, т. 19, вып. 6, с. 641—680.
4. *Баталова З. С., Белякова Г. В.* О колебательных движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса.— В кн.: Динамика систем. Горький; Изд-е Горьк. ун-та, 1982, с. 145—170.
5. *Зевин А. А.* Качественное исследование устойчивости периодических колебаний и вращений в параметрически возбуждаемых нелинейных системах второго порядка.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 38—44.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
7. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем/Под ред. *Болотина В. В.* М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
8. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.



Днепропетровск

Поступила в редакцию 21.I.1985