

УДК 534.11

СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ КОНТУРОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗИ

ЛОКОТЬ Н. М., СЛЮСАРЬ В. М.

Рассматривается задача о самосинхронизации двух параметрически связанных автоколебательных контуров с близкими собственными частотами. Исходя из полученных методом усреднения уравнений первого приближения определена зависимость ширины частотной области синхронизации от параметров системы и рассмотрены способы управления ею. Анализируются закономерности поведения частоты и амплитуд синхронных автоколебаний при различных частотных соотношениях в системе.

1. Рассмотрим автономную систему двух связанных квазилинейных осцилляторов Ван дер Поля — Релея — Дуффинга, описываемую уравнениями

$$W_i'' + W_i = \varepsilon F_i(W_i, W_i^*, U) \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon F_i(W_i, W_i^*, U) = & (-1)^{i+1} \Delta W_i + (\lambda_i + \beta_{i1} W_i^2 + \beta_{i2} W_i'^2) W_i' + \\ & + [(-1)^i \alpha_i U + \gamma_i W_i^2] W_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

причем функция связи $U = U(\tau, [W_1], [W_2])$, определяемая из уравнения

$$U'' + 2hU' + \mu^2 U = \sum_i (-1)^i \zeta_i W_i^2 \quad (1.3)$$

при нулевых начальных условиях выражается через W_i следующим образом:

$$\begin{aligned} U(\tau) = \sum_i (-1)^i \zeta_i (\mu^2 - h^2)^{-1/2} \int_0^\tau W_i^2(\tau') \exp[-h(\tau - \tau')] \times \\ \times \sin[(\mu^2 - h^2)^{1/2}(\tau - \tau')] d\tau' \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\tau = 1/2(\omega_1 + \omega_2)t, \quad \Delta \approx \omega_2 - \omega_1$$

Здесь ε — малый параметр, λ_i , β_{i1} , β_{i2} , α_i , γ_i , h , ζ_i — безразмерные положительные коэффициенты, Δ — малая расстройка частот, ω_i — собственная частота i -й линейной консервативной системы; точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ . Отметим, что к уравнениям вида (1.1), (1.2), (1.3) приводит ряд задач о взаимодействии автоколебаний в дифференциальных виброчастотных акселерометрах.

Преобразуем (1.1) заменой переменных $W_i(\tau) = A_i(\tau) \cos[\tau + \theta_i(\tau)]$, $W_i^*(\tau) = -A_i(\tau) \sin[\tau + \theta_i(\tau)]$ к системе стандартных уравнений

$$\begin{aligned} A_i' &= \varepsilon \Phi_i[A_i, \theta_i, U(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2, \tau), \tau], \\ \theta_i' &= \varepsilon \Psi_i[A_i, \theta_i, U(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2, \tau), \tau] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\Phi_i(A_i, \theta_i, U, \tau) = F_i(A_i, \theta_i, U, \tau) \sin(\tau + \theta_i),$$

$$\Psi_i(A_i, \theta_i, U, \tau) = A_i^{-1} F_i(A_i, \theta_i, U, \tau) \cos(\tau + \theta_2)$$

При $\varepsilon = 0$ уравнения (1.5) описывают гармонические колебания в независимых колебательных контурах с амплитудами и фазами, определяе-

мыми начальными условиями $W_i(0)$, $\dot{W}_i(0)$. Приняв это решение за порождающее, из (1.4) находим выражение для функции связи

$$\begin{aligned} U_0(\tau) &= \frac{1}{2}\mu^{-2}(\xi_2 A_2^2 - \xi_1 A_1^2) + U_m \sin(2\tau + \psi + \eta) \\ U_m &= \frac{1}{2}r(\xi_1^2 A_1^4 + \xi_2^2 A_2^4 - 2\xi_1 \xi_2 A_1^2 A_2^2 \cos 2\xi)^{1/2} \\ r &= [(\mu^2 - 4)^2 + 16h^2]^{-1/2}, \quad \psi = \arctg[h/(1 - \frac{1}{4}\mu^2)] \\ \eta &= \arctg \frac{\xi_2 A_2^2 \cos 2\theta_2 - \xi_1 A_1^2 \cos 2\theta_1}{\xi_2 A_2^2 \sin 2\theta_2 - \xi_1 A_1^2 \sin 2\theta_1}, \quad \xi = \theta_2 - \theta_1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Очевидно, что в случае малой расстройки частот Δ воздействие связи на автоколебательные контуры будет происходить в частотном диапазоне, отвечающем главному параметрическому резонансу, т. е. с частотой, близкой к удвоенным собственным частотам контуров. Непосредственной подстановкой (1.6) в (1.3) можно показать, что в случае медленно меняющихся амплитуд и фаз ($|A_i| \sim \varepsilon$, $|\theta_i| \sim \varepsilon$) $U(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2, \tau) = U_0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2, \tau) + O(\varepsilon)$. Тогда система (1.5) с точностью до членов порядка ε примет вид

$$\dot{A}_i = \varepsilon \Phi_i(A_i, \theta_i, U_0, \tau), \quad \dot{\theta}_i = \varepsilon \Psi_i(A_i, \theta_i, U_0, \tau) \quad (1.7)$$

Согласно [1], решение уравнений (1.7) с точностью до величин порядка ε может быть получено из автономной системы уравнений

$$A_i = \varepsilon \Phi_i^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2), \quad \theta_i = \varepsilon \Psi_i^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2) \quad (1.8)$$

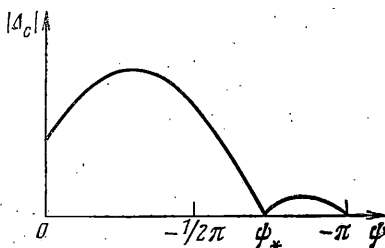
полученной из (1.7) усреднением соответствующих правых частей по явно входящему времени. Учитывая выражения (1.2), (1.5), (1.6), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon \Phi_1^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \{ \lambda_1 - (a_{11} + a_{12} \sin \psi) A_1^2 - a_{13} \sin[2(\theta_2 - \theta_1) - \psi] A_2^2 \} A_1 \\ \varepsilon \Phi_2^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \{ \lambda_2 - (a_{21} + a_{22} \sin \psi) A_2^2 + a_{23} \sin[2(\theta_2 - \theta_1) + \psi] A_1^2 \} A_2 \\ \varepsilon \Psi_1^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2) &= \\ &= -\frac{1}{2} \Delta + (r\mu^2)^{-1} (a_{13} A_2^2 - a_{12} A_1^2) + \frac{1}{2} \{ a_{13} \cos[2(\theta_2 - \theta_1) - \psi] A_2^2 - \\ &\quad - a_{12} \cos \psi A_1^2 \} + \frac{3}{8} \gamma_1 A_1^2 \\ \varepsilon \Psi_2^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2) &= \\ &= \frac{1}{2} \Delta + (r\mu^2)^{-1} (a_{22} A_2^2 - a_{23} A_1^2) + \frac{1}{2} \{ a_{23} \cos[2(\theta_2 - \theta_1) + \psi] A_1^2 - \\ &\quad - a_{22} \cos \psi A_2^2 \} + \frac{3}{8} \gamma_2 A_2^2 \\ a_{11} &= \frac{1}{4} (\beta_{11} + 3\beta_{12}), \quad a_{12} = \frac{1}{4} r \alpha_1 \xi_1, \quad a_{13} = \frac{1}{4} r \alpha_1 \xi_1 \xi_2 \xi_1^{-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

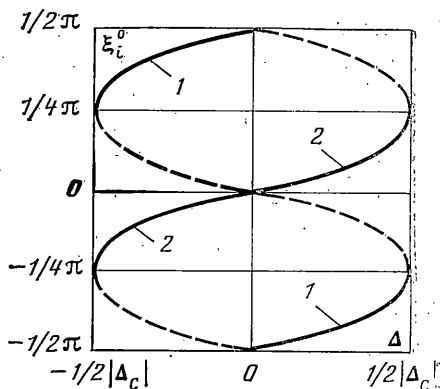
Коэффициенты a_{11} характеризуют суммарное нелинейное трение в колебательных контурах, a_{12} — параметрическое воздействие системы связи на i -й контур, обусловленное колебаниями в этом же контуре; a_{13} определяют аналогичное воздействие, но вызванное колебаниями в другом контуре. Из (1.9) следует, что система уравнений (1.8) может быть сведена к системе трех уравнений

$$\begin{aligned} A_i &= \varepsilon \Phi_i^0(A_1, A_2, \xi), \quad \xi = \varepsilon \Psi^0(A_1, A_2, \xi) \\ \varepsilon \Psi^0(A_1, A_2, \xi) &= \varepsilon \Psi_2^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2) - \varepsilon \Psi_1^0(A_1, A_2, \theta_1, \theta_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнения первого приближения (1.10) при достаточно малом ε описывают почти-периодические колебания в системе связанных автоколебательных контуров. Решения стационарных уравнений $\varepsilon \Phi_i^0(A_1, A_2, \xi) = \varepsilon \Psi^0(A_1, A_2, \xi) = 0$ определяют периодические синхронные колебания с амплитудами A_i^0 и частотой $\nu = 1 + \theta_i(A_1^0, A_2^0, \xi^0)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Уравнения (1.10) имеют стационарные решения

$$A_1^0 = A_2^0 = 0 \quad (2.1)$$

$$A_1^0 = [\lambda_1 / (a_{11} + a_{12} \sin \psi)]^{1/2}, \quad A_2^0 = 0$$

$$A_1^0 = 0, \quad A_2^0 = [\lambda_2 / (a_{21} + a_{22} \sin \psi)]^{1/2} \quad (2.2)$$

$$A_1^0 = \{\lambda_1 [a_{11} + a_{12} \sin \psi - a_{13} \sin(2\xi^0 - \psi)] / a^0\}^{1/2}$$

$$A_2^0 = \{\lambda_2 [a_{21} + a_{22} \sin \psi + a_{23} \sin(2\xi^0 + \psi)] / a^0\}^{1/2}$$

$$a^0 = (a_{11} + a_{12} \sin \psi)(a_{21} + a_{22} \sin \psi) + a_{13}a_{23} \sin(2\xi^0 + \psi) \sin(2\xi^0 - \psi) \quad (2.3)$$

Численное исследование уравнений в вариациях [2], соответствующих приведенным стационарным решениям, показало, что тривиальное (2.1) и полутривиальное (2.2) решения являются неустойчивыми, а решения (2.3) являются асимптотически устойчивыми при определенных значениях ξ^0 . Уравнение для определения ξ^0 может быть получено после исключения при помощи (2.3) стационарных амплитуд из уравнения $\epsilon \Psi^0(A_1^0, A_2^0, \xi^0) = 0$ и имеет вид

$$\Delta = F(\xi^0), \quad F(\xi) = F(\xi + \pi) \quad (2.4)$$

Ввиду сложности функции $F(\xi)$ уравнение (2.4) в общем случае можно решить только численно. Значения расстройки Δ , при которых уравнение (2.4) имеет корни ξ^0 , которым соответствуют асимптотически устойчивые стационарные решения уравнения (1.10), составляют область синхронизации.

Исследуем представляющий практический интерес случай синхронизации идентичных автоколебательных контуров; для этого положим $\lambda_i = \lambda$, $\alpha_i = \alpha$, $\xi_i = \xi$, $a_{i1} = a_1$, $a_{i2} = a_{i3} = a_2$, $\gamma_i = \gamma$. Ограничивая рассмотрение случаем малого коэффициента параметрической связи a_2 , с точностью до величин порядка a_2 получим

$$F(\xi) = \lambda a_2 a_1^{-1} [1 + 3/4 (\gamma/a_1)]^{1/2} \sin(\psi - \delta) \sin 2\xi$$

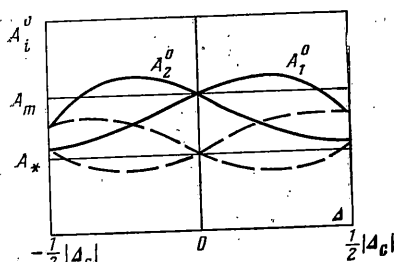
$$\delta = \arctg 3/4 (\gamma/a_1) \quad (2.5)$$

Решения уравнения (2.4) существуют, если $-1/2 |\Delta_c| \leq \Delta \leq 1/2 |\Delta_c|$, где $|\Delta_c| = |2\lambda a_2 a_1^{-1} [1 + 3/4 (\gamma/a_1)]^{1/2} \sin(\psi - \delta)|$ — ширина области синхронизации, и в интервале $[-1/2\pi, 1/2\pi]$ имеют вид

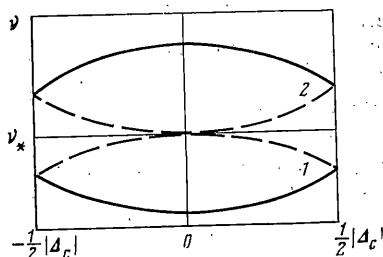
$$\xi_1^0 = 1/2 \arcsin(2\Delta \Delta_c^{-1}) \quad (2.6)$$

$$\xi_2^0 = 1/2\pi - \xi_1^0, \quad \xi_1^0 \geq 0;$$

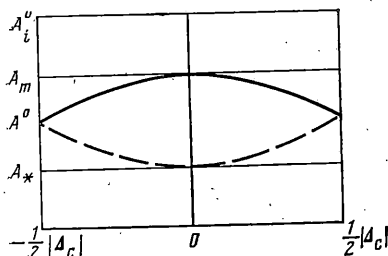
$$\xi_2^0 = -1/2\pi - \xi_1^0, \quad \xi_1^0 < 0$$



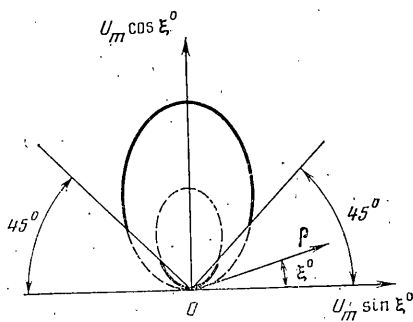
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Зависимость ширины области синхронизации от сдвига фазы $\psi = \psi(\mu, h)$ показана на фиг. 1 (величину $\psi_* = \delta - \pi$, при которой ширина области синхронизации обращается в нуль, условимся называть критической). На фиг. 2 изображены зависимости стационарных значений разности фаз от расстройки частот в докритической ($\psi_* < \psi < 0$, кривая 1) и закритической ($-\pi < \psi < \psi_*$, кривая 2) областях значений ψ (здесь и дальше, если не оговорено обратное, пунктиром обозначены решения, соответствующие неустойчивым режимам движения).

Рассмотрим поведение амплитуд и частот установившихся автоколебаний в интервале синхронизации при различных частотных соотношениях в системе, характеризуемых величиной ψ . В дорезонансной области ($\mu > 2$, $-1/2\pi < \psi < 0$) большая амплитуда синхронных колебаний соответствует контуру с меньшей собственной частотой (фиг. 3). В середине области синхронизации (при равенстве собственных частот контуров) амплитуды одинаковы и равны $A_m = [\lambda / (a_1 + 2a_2 \sin \psi)]^{1/2}$, что превышает величину амплитуды установившихся автоколебаний в независимых идентичных контурах, равную $A_* = (\lambda / a_1)^{1/2}$. На фиг. 4 представлены зависимости $\nu = \nu(\Delta)$ в случае отсутствия демпфирования в системе связи ($\psi = 0$, $\mu > 2$, кривые 1) и при резонансном частотном соотношении в ней, но при наличии демпфирования ($\psi = -1/2\pi$, $\mu = 2$, кривые 2; $\nu_* = 1 + 3/8 \gamma A_*^2$ — частота автоколебаний в независимых контурах). При резонансном соотношении частот $\mu = 2$ амплитуды синхронных колебаний в контурах одинаковы во всей области синхронизации и достигают максимума в ее середине (фиг. 5, $A_m = [\lambda / (a_1 - 2a_2)]^{1/2}$, $A^0 = [\lambda / (a_1 - a_2)]^{1/2}$). В зарезонансной области ($\mu < 2$, $\psi_* < \psi < -1/2\pi$) поведение амплитуд аналогично представленному на фиг. 3, но в этом случае большей оказывается амплитуда автоколебаний в контуре с большей собственной частотой. В закритической области устойчивым решениям отвечает распределение амплитуд, показанное на фиг. 3 штриховыми линиями. В этом случае большая амплитуда колебаний наблюдается в контуре с меньшей собственной частотой. Штриховая кривая 1 на фиг. 4 качественно представляет поведение синхронной частоты устойчивых автоколебаний в закритической области. Отметим, что в середине области синхронизации устойчивыми являются синфазные и противофазные режимы колебаний, при которых взаимное влияние идентичных автоколебательных контуров отсутствует (амплитуды и частоты равны соответственно A_* и ν_*).

Движение в системе связи, соответствующее синхронным режимам автоколебаний в контурах, определяется соотношением (1.6) с учетом (2.3) и (2.6). Из амплитудно-фазовой диаграммы (фиг. 6) видно, что в докритической области (кривая 1) устойчивым режимам колебаний отвечает большая амплитуда колебаний в системе связи, достигающая максимума при $\xi^0|_{\Delta=0} = 1/2\pi$. В закритической области (кривая 2) устойчивым решениям отвечает меньшая амплитуда колебаний U_m и при $\xi^0|_{\Delta=0} = 0, \pi$ движение в системе связи отсутствует. Наличие в закритической области устойчивых синфазных и противофазных решений, при которых автоколебательные контуры ведут себя как независимые и колебания в системе связи отсутствуют, обнаруживает аналогию с парадоксом «неработающих связей» в задаче о синхронизации часов [3].

Приведенный анализ синхронных режимов колебаний параметрически связанных автоколебательных контуров выявил их существенную зависимость от динамических характеристик связи. Полученные в работе аналитические соотношения дают возможность осуществлять целенаправленный выбор параметров системы для управления шириной области синхронизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
3. Блехман И. И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.

Киев

Поступила в редакцию
10.I.1985