МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1986

УДК 531.38

ОБЪЕДИНЕНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ОРЕШКИНА Л. Н.

Обнаружив, что уравнения рассматриваемой задачи по форме совпадают с уравнениями другой задачи, уже изучавшейся, получают возможность без дополнительных исследований непосредственно распространить результаты последней на первую. Но и в тех случаях, когда аналогия установлена после того, как обе задачи изучались независимо (такова, например, аналогия Стеклова [1]), она небесполезна, так как в подобных случаях в каждой из задач были созданы свои методы и перенос их в другую задачу обогащает ее.

Упомянутой аналогией Стеклов объединил математические модели одного частного случая движения тела в жидкости (случая Клебша) и некоторой частной задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку (задачи Бруна). Не было полным и обобщение этой аналогии, предложенное в [2]. Обсуждаемая в работе [3] аналогия, как отмечает ее автор, относится к случаю, когда кинетическая энергия системы тело — жидкость не удовлетворяет необходимому условию определенной положительности представляющей ее квадратичной формы.

В данной работе уравнения движения тела в жидкости преобразованы, и в результате преобразования устанавливается полная аналогия этой задачи с поставленной в работе обобщенной задачей о движении тела, имеющего неподвижную точку, охватывающей ряд классических задач, которые обычно рассматривались порознь.

В качестве примера использования аналогии получены на ее основе случаи интегрируемости последней задачи с произвольной постоянной в четвертом интеграле — аналоги обобщенных случаев Стеклова и Кирхгофа.

1. Преобразование уравнений движения тела в жидкости. В постановке Кирхгофа — Клебша возможные циркуляции жидкости в полостях тела и через имеющиеся в нем отверстия не учитывались. В такой постановке получены и основные результаты Чаплыгина [4, 5]. Учет циркуляций [2, 6] привел к обобщениям ранее найденных решений и к открытию новых [7—11]. Обычно при этом использовали уравнения в форме [2]:

$$R_1^{\bullet}=\omega_3R_2-\omega_2R_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.1}$$

$$P_1^{\bullet}=\omega_3(P_2+\lambda_2)-\omega_2(P_3+\lambda_3)+(u_3-\mu_3)R_2-(u_2-\mu_2)R_3 \tag{1.2}$$

Записаны два из шести уравнений, остальные получают циклической перестановкой индексов. Они определяют зависимость от времени переменных Клебша — компонент[1] R_i импульсивной силы и компонент P_i импульсивной пары (обозначения Чаплыгина [4]) в осях координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$, неизменно связанных с телом. Параметры λ_i, μ_i — компоненты неизменных по отношению к телу векторов, характеризующих циркуляции жидкости, соответственно в полостях тела и через отверстия. Компоненты ω_i угловой скорости тела и компоненты u_i скорости точки O — линейные формы

$$\omega_1=a_1P_1+c_{1i}R_i \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.3}$$

$$u_1=b_{1i}R_i+c_{i1}P_i \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.4}$$

Параметры a_i, b_{ij}, c_{ij} определяются в гидродинамике при решении краевых задач независимо от уравнений (1.1), (1.2). В динамике твердого тела эти параметры полагают заданными.

[1] Буквенный индекс принимает значения 1, 2, 3, и по этим значениям выполняется суммирование, если в одночленное выражение этот индекс входит дважды или трижды.

Квадратичная форма

$$T = {}^1/_2 (a_i P_i^2 + b_{ij} R_i R_j) + c_{ij} P_i R_j \quad (1.5)$$

входит в представление кинетической энергии системы тело — жидкость [2] и, очевидно, $\omega_i = \partial T/\partial P_i$, $u_i = \partial T/\partial R_i$.

Оси координат совмещены с главными осями одной из управляющих поверхностей, с осями эллипсоида импульсивных пар [4]. Начало координат поместим в центральной точке тела, обеспечивая симметрию $c_{ji} = c_{ij}$.

Известны интегралы уравнений (1.1), (1.2):

$$R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = R^2 \quad (1.6)$$

$$T - \mu_1 R_1 - \mu_2 R_2 - \mu_3 R_3 = h$$

$$(P_1 + \lambda_1) R_1 + (P_2 + \lambda_2) R_2 + (P_3 + \lambda_3) R_3 = k \quad (1.7)$$

Уравнения (1.1) означают, что импульсивная сила неизменна в пространстве, и наряду с R_i используем компоненты ν_i единичного вектора, указывающего направление импульсивной силы

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \quad (1.8)$$

$$R_i = R\nu_i \quad (1.9)$$

$$\nu_1^{\bullet} = \omega_3 \nu_2 - \omega_2 \nu_3 \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.10)$$

Введем тензор

$$J_1 = 1/a_1 \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.11)$$

и полученные из (1.3), (1.9) значения

$$P_1 = J_1 \omega_1 - c_{1i} J_1 R \nu_i \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.12)$$

внесем вместе с (1.9) в (1.4):

$$u_1 = c_{1i} J_i \omega_i + N_{1i} \nu_i / R \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.13)$$

$$N_{1i} = (b_{1i} - c_{1i} c_{ij} J_j) R^2 \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.14)$$

Вследствие (1.9), (1.11)—(1.14) уравнения (1.2) принимают вид

$$J_1 \omega_1^{\bullet} + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 + \lambda_3 \omega_2 - \lambda_2 \omega_3 = (e_2 \nu_3 - e_3 \nu_2) \Gamma +$$
$$+ (N_{3i} \nu_2 - N_{2i} \nu_3 + E_{3i} \omega_2 - E_{2i} \omega_3) \nu_i \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.15)$$

Здесь введены параметры

$$e_1 \Gamma = \mu_1 R \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.16)$$

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (1.17)$$

$$E_{11} = (c_{11} J_1 - c_{22} J_2 - c_{33} J_3) R, \quad E_{23} = (J_2 + J_3) c_{23} R \quad (1\ 2\ 3) \quad (1.18)$$

При заменах (1.9), (1.11)—(1.14), (1.16), (1.18) интеграл (1.6) сводится к соотношению (1.8), а интегралы (1.7) записываются в виде

$$ {}^1/_2 (J_i \omega_i^2 + N_{ij} \nu_i \nu_j) - e_i \nu_i \Gamma = h$$

$$(J_i \omega_i + \lambda_i) \nu_i - {}^1/_2 E_{ij} \nu_i \nu_j = k \quad (1.19)$$

Преобразованные к виду (1.10), (1.15) уравнения движения тела в жидкости и их интегралы (1.8), (1.19) сопоставим с уравнениями и интегралами задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку.

2. Обобщающая задача о движении тела, имеющего неподвижную точку. Полная аналогия. Классической задаче о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, посвящено много работ[2], в большей части

---

[2] Достаточно полный перечень дан в [12]. Значительная часть библиографических указателей монографий [13, 14] также относится к этой задаче. Ей посвящены монографии [15—17] и разделы монографий [18, 19].

которых исследуют систему уравнений Эйлера — Пуассона

$$J_1\omega_1^{\cdot}+(J_3-J_2)\,\omega_2\omega_3=(e_2\nu_3-e_3\nu_2)\,\Gamma \tag{2.1}$$

$$\nu_1^{\cdot}=\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.2}$$

Уже в основополагающих для динамики твердого тела работах Даламбера и Эйлера был указан момент

$$\varepsilon\,(J_3-J_2)\,\nu_2\nu_3 \tag{2.3}$$

характеризующий действие на тело центрального ньютоновского поля тяготения (см. [13, с. 231]). Дополненная моментом (2.3) система уравнений (2.1), (2.2) изучалась во многих работах (отметим лишь монографии [16, 20]).

Жуковский [21] и позже Вольтерра [22] охарактеризовали действие носимых масс на тело гиростатическим моментом λ_i, что привело к появлению в левой части уравнений (2.1) членов

$$\lambda_3\omega_2-\lambda_2\omega_3 \tag{2.4}$$

Обзор важнейших результатов в задаче о тяжелом гиростате дан в монографии [13] (см. также [23]). В этой задаче учитывали и момент (2.3), (2.4), однако при некоторых способах формирования гиростатического момента действие ньютоновского поля на гиростат приходится характеризовать не посредством тензора, подобного тензору инерции (как в случае (2.3)), а посредством другого тензора N_{ij}. Тогда вместо (2.3) в уравнениях (2.1) появляется момент

$$(N_{3i}\nu_2-N_{2i}\nu_3)\,\nu_i \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.5}$$

В такой постановке задача рассмотрена в цикле работ [24—29].

Предлагают рассматривать и действие магнитного поля [30], характеризуя его посредством некоторого тензора [31, 32], причем в общем случае этот тензор может и не быть подобен тензору инерции. В такой постановке в уравнениях (2.1) появляется момент

$$(E_{3i}\omega_2-E_{2i}\omega_3)\,\nu_i \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.6}$$

К задаче о движении тела, имеющего неподвижную точку, охватывающей все перечисленные здесь частные задачи, придем дополнив уравнения (2.1) членами (2.4), (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned} J_1\omega_1^{\cdot}+(J_3-J_2)\,\omega_2\omega_3+\lambda_3\omega_2-\lambda_2\omega_3&=(e_2\nu_3-e_3\nu_2)\,\Gamma+\\ +(N_{3i}\nu_2-N_{2i}\nu_3+E_{3i}\omega_2-E_{2i}\omega_3)\,\nu_i& \quad (1\ 2\ 3) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (1.15).

Тем самым установлена *полная* аналогия (математический изоморфизм [33]) задачи о движении тела в жидкости, сведенной к уравнениям (1.10), (1.15), и обобщенной задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, сведенной к уравнениям (2.2), (2.7). Последняя задача в такой общей постановке еще не изучалась (относящиеся к ней результаты получены при условии, что по крайней мере один из моментов (2.4), (2.5), (2.6) отсутствует), тогда как исследования [2, 7—11] относились к общему случаю (1.1), (1.2), сведенному здесь к системе (2.2), (2.7). Найдены четыре так называемых общих случая интегрируемости уравнений (1.1), (1.2) (т. е. решения, в которых в дополнение к имеющимся трем интегралам (1.6), (1.7) найден четвертый, содержащий произвольную постоянную) и несколько достаточно широких классов решений с инвариантными соотношениями [3]. Естественно поэтому, пользуясь установленной здесь аналогией, все результаты, полученные в задаче о движении тела в жидкости, перенести в задачу о движении тела, имеющего неподвижную точку.

Первые два из приводимых здесь примеров такого переноса относятся

[3] Об этом понятии см. [34, с. 45; 35].

к случаю, когда главные направления тензоров N_{ij} и E_{ij} совпадают с главными осями тензора инерции. Уравнения (2.7) и интегралы (1.19) в этом случае имеют вид

$$J_1\omega_1^{\boldsymbol{\cdot}}+(J_3-J_2)\omega_2\omega_3+\lambda_3\omega_2-\lambda_2\omega_3=(e_2\nu_3-e_3\nu_2)\Gamma+$$
$$+(N_3-N_2)\nu_2\nu_3+E_3\omega_2\nu_3-E_2\omega_3\nu_2 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.8}$$

$$^1/_2(J_i\omega_i^2+N_i\nu_i^2)-e_i\nu_i\Gamma=h, \quad (J_i\omega_i+\lambda_i)\nu_i-{}^1/_2E_i\nu_i^2=k \tag{2.9}$$

Здесь и в дальнейшем у диагональных компонент тензоров оставлен лишь один из двух одинаковых индексов. Проще выглядят и соотношения (1.12), (1.14), (1.18):

$$P_1=J_1(\omega_1-c_1R\nu_1) \tag{2.10}$$

$$N_1=(b_1-c_1^2J_1)R^2 \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.11}$$

$$E_1=(c_1J_1-c_2J_2-c_3J_3)R \tag{2.12}$$

3. Обобщенное решение Стеклова. Перенесем в задачу о движении тела, имеющего неподвижную точку, случай интегрируемости Стеклова, обобщенный в работах [2, 9]. Он найден при условиях

$$c_1=c+\sigma a_2a_3 \tag{3.1}$$

$$b_1=b+\sigma^2a_1(a_2^2+a_3^2) \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.2}$$

$$\mu_1=-[c+\sigma(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)]\lambda_1 \tag{3.3}$$

и четвертый интеграл таков:

$$\sum_{(123)}[P_1^2+\sigma^2(a_2-a_3)^2R_1^2-2\sigma a_1P_1R_1+2\lambda_1P_1+2\sigma a_1\lambda_1R_1]=\mathrm{const} \tag{3.4}$$

Поставленный под знаком суммы символ (123) означает, что к выписанным слагаемым надо добавить получающиеся из них циклической перестановкой индексы.

Условие (3.3) с учетом (1.16), (1.11) представим в виде

$$e_1\Gamma=s\lambda_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.5}$$

$$s=-cR+\varkappa(J_1+J_2+J_3), \quad \varkappa=-\sigma a_1a_2a_3R \tag{3.6}$$

Используем эти обозначения и в (3.1), (3.2):

$$c_1R=\varkappa(J_2+J_3)-s, \quad b_1R^2=bR^2+\varkappa^2J_1(J_2^2+J_3^2) \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.7}$$

Из (2.11), (2.12) при этом получаем

$$E_1=s(J_2+J_3-J_1)-2\varkappa J_2J_3 \quad (1\ 2\ 3) \tag{3.8}$$
$$N_1=N-s^2J_1+2\varkappa sJ_1(J_2+J_3)$$

Постоянная $N=bR^2-2\varkappa^2J_1J_2J_3$ введена вместо b.

Представим интеграл (3.4) в виде

$$\sum_{(123)}\{(P_1-\sigma a_1R_1+\lambda_1)^2+[2a_1\lambda_1+\langle(a_2-a_3)^2-a_1^2\rangle\sigma R_1]^2[(a_2-a_3)^2-a_1^2]^{-1}\}=\mathrm{const}$$

и вместе с (1.9), (1.11), (3.7) внесем в него значения $P_1=J_1\{\omega_1+$ $+[s-\varkappa(J_2+J_3)]\nu_1\}$ (1 2 3), найденные из (1.12), (3.7):

$$\sum_{(123)}\{[J_1\omega_1+\lambda_1+\langle sJ_1+\varkappa(J_2J_3-J_3J_1-J_1J_2)\rangle\nu_1]^2+$$
$$+[\langle(J_2-J_3)^2J_1^2-J_2^2J_3^2\rangle\varkappa\nu_1-2J_2J_3\lambda_1]^2[(J_2-J_3)^2J_1^2-J_2^2J_3^2]^{-1}\}=\mathrm{const} \tag{3.9}$$

Таким образом, получен общий случай интегрируемости задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку: при условиях (3.5), (3.8) уравнения (2.2), (2.8) в дополнение к трем общим интегралам (1.8), (2.9) имеют четвертый интеграл (3.9), не зависящий явно от времени и содержащий произвольную постоянную, что обеспечивает сводимость задачи к квадратурам.

4. Обобщенное решение Кирхгофа. Другой пример построения на основе аналогии общего случая интегрируемости уравнений (2.2), (2.8) приведем, перенеся решение Кирхгофа, обобщенное в работе [2]. Оно получено при условиях $\mu_2=\mu_3=0$:

$$\lambda_2=\lambda_3=0 \tag{4.1}$$

в случае, когда квадратичная форма (1.5) имеет вид $T={}^1/_2[a_1P_1^2+ +a(P_2^2+P_3^2)+b_1R_1^2+b(R_2^2+R_3^2)]+c_1P_1R_1+c(P_2R_2+P_3R_3)$. Из (1.16), (1.17), (1.11), (2.11), (2.12) следует

$$e_2=e_3=0,\quad e_1=1,\quad \Gamma=\mu_1R \tag{4.2}$$

$$J_2=J_3,\quad N_2=N_3,\quad E_2=E_3 \tag{4.3}$$

и уравнения (2.8) с интегралами (2.9) записываются так:

$$J_1\omega_1^{\boldsymbol\cdot}=E(\omega_2\nu_3-\omega_3\nu_2) \tag{4.4}$$

$$J\omega_2^{\boldsymbol\cdot}=-[(J_1-J)\omega_1-E_1\nu_1+\lambda]\omega_3-[(N-N_1)\nu_1+E\omega_1+\Gamma]\nu_3 \tag{4.5}$$

$$J\omega_3^{\boldsymbol\cdot}=[(J_1-J)\omega_1-E_1\nu_1+\lambda]\omega_2+[(N-N_1)\nu_1+E\omega_1+\Gamma]\nu_2$$

$$J_1\omega_1^2+J(\omega_2^2+\omega_3^2)+N_1\nu_1^2+N(\nu_2^2+\nu_3^2)=2(h+\nu_1\Gamma) \tag{4.6}$$

$$(J_1\omega_1+\lambda)\nu_1+J(\omega_2\nu_2+\omega_3\nu_3)-{}^1/_2[E_1\nu_1^2+E(\nu_2^2+\nu_3^2)]=k$$

У компоненты λ_1 и компонент (4.3) индексы опущены.

Интеграл Кирхгофа $P_1=\mathrm{const}$ сопоставлен с интегралом

$$\omega_1=c-E/J_1\nu_1 \tag{4.7}$$

(с постоянной интегрирования c), который может быть получен и из (2.10), и непосредственно из уравнений (4.4), (2.2).

Поскольку в перечисленных в начале п. 2 частных случаях всегда отмечают это решение (см., например, [16, 20, 24, 30]), целесообразно здесь довести его до квадратур.

Из интегралов (4.6), (1.8) находим

$$\omega_2^2+\omega_3^2=\varkappa^2(\nu_1) \tag{4.8}$$

$$\omega_2\nu_2+\omega_3\nu_3=\chi(\nu_1) \tag{4.9}$$

$$\nu_2^2+\nu_3^2=1-\nu_1^2 \tag{4.10}$$

$$\varkappa^2(\nu_1)=h_0+2h_1\nu_1-h_2\nu_1^2,\quad \chi(\nu_1)=k_0-k_1\nu_1+k_2\nu_1^2 \tag{4.11}$$

$$h_0=(2h-N-J_1c^2)/J,\quad h_1=(\Gamma+Ec)/J$$

$$h_2=(N_1-N+E^2/J_1)/J$$

$$k_0=(k+E/2)/J,\quad k_1=(\lambda+J_1c)/J,\quad k_2=(E+E_1)/J$$

Используем (4.8)—(4.10) в тождестве $(\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3)^2=(\omega_2^2+\omega_3^2)\times \times(\nu_2^2+\nu_3^2)-(\omega_2\nu_2+\omega_3\nu_3)^2$:

$$\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3=\sqrt{f(\nu_1)} \tag{4.12}$$

$$f(\nu_1)=(1-\nu_1^2)(h_0+2h_1\nu_1-h_2\nu_1^2)-(k_0-k_1\nu_1+k_2\nu_1^2)^2 \tag{4.13}$$

Внеся (4.12) в первое уравнение (2.2):

$$\nu_1^{\boldsymbol\cdot}=\sqrt{f(\nu_1)} \tag{4.14}$$

установим зависимость $\nu_1(t)$ эллиптической функцией.

Удовлетворяя (4.8), введем угол σ:

$$\omega_2=\varkappa\cos\sigma,\quad \omega_3=\varkappa\sin\sigma \tag{4.15}$$

и, используя в равенстве $\omega_2\dot\omega_3-\omega_3\dot\omega_2=\varkappa^2\dot\sigma$ уравнения (4.5) с привлечением (4.8)—(4.10), получим

$$\dot\sigma=F(\nu_1) \tag{4.16}$$

$$F(\nu_1)=n_0-n_1\nu_1+[\Gamma+cE+(N-N_1-E^2/J_1)\nu_1]\chi(\nu_1)/J\varkappa^2(\nu_1)$$

$$n_0=[\lambda+(J_1-J)c]/J,\quad n_1=[E_1+(1-J/J_1)E]/J$$

Из (4.16), (4.14) устанавливается зависимость $\sigma(\nu_1)$ эллиптическим интегралом

$$\sigma(\nu_1)=\int_{\nu_1^0}^{\nu_1}\frac{F(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}}d\nu \tag{4.17}$$

Вместе с (4.11), (4.17) определены в зависимости от ν_1 и компоненты (4.15):

$$\omega_2(\nu_1)=\varkappa(\nu_1)\cos\sigma(\nu_1),\quad \omega_2(\nu_1)=\varkappa(\nu_1)\sin\sigma(\nu_1) \tag{4.18}$$

а из (4.9), (4.12) получаем с учетом (4.11), (4.13):

$$\nu_2(\nu_1)=[\chi(\nu_1)\cos\sigma(\nu_1)+\sqrt{f(\nu_1)}\sin\sigma(\nu_1)]/\varkappa(\nu_1)$$

$$\nu_3(\nu_1)=[\chi(\nu_1)\sin\sigma(\nu_1)-\sqrt{f(\nu_1)}\cos\sigma(\nu_1)]/\varkappa(\nu_1)$$

Этим построение математического решения задачи завершено — уравнения (2.2), (2.8) при условиях Кирхгофа (4.1), (4.3) проинтегрированы.

Полное решение [36] задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, получают методом годографов, представив движение тела качением без скольжения неизменно связанной с ним кривой (4.7), (4.18) (подвижного годографа угловой скорости) по неподвижной кривой $\Omega_1=\Omega_1(\nu_1)$, $\Omega_2=\Omega_2(\nu_1)$, $\Omega_3=\Omega_3(\nu_1)$ (неподвижному годографу угловой скорости). Уравнения неподвижного годографа [37]:

$$\Omega_1=\omega_i\nu_i,\quad \Omega_2=\Omega_\rho\cos\alpha,\quad \Omega_3=\Omega_\rho\sin\alpha$$

$$\Omega_\rho^2=\omega_i\omega_i-\Omega_1^2,\qquad \Omega_\rho^2\,d\alpha=\sum_{(123)}(\omega_3\nu_2-\omega_2\nu_3)\,d\omega_1$$

с привлечением значений (4.7)—(4.10), (4.17) получаем в виде

$$\Omega_1(\nu_1)=[c-(E/J_1)\nu_1]\nu_1+\chi(\nu_1)$$

$$\Omega_\rho^2(\nu_1)=[c-(E/J_1)\nu_1]^2+\varkappa^2(\nu_1)-\Omega_1^2(\nu_1),\qquad \alpha(\nu_1)=\int_{\nu_1^0}^{\nu_1}\frac{\Phi(\nu)}{\Omega_\rho^2(\nu)\sqrt{f(\nu)}}d\nu$$

$$\Phi(\nu)=\nu\varkappa^2(\nu)F(\nu)-(E/J_1)f(\nu)-J^{-1}[c-(E/J_1)\nu]\{(1-\nu^2)[(N-N_1\nu)+\Gamma]+$$
$$+(n_0-n_1\nu)\chi(\nu)\}$$

Классификация возможных движений рассматриваемого тела выполнена в частном случае — для волчка Лагранжа [38—41].

5. Равномерные вращения. Пусть ω_i постоянны и $\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}\neq\neq 0$. Уравнения (2.2) удовлетворены постоянными $\nu_i=\omega_i/\omega$, а уравнения (2.7) принимают вид

$$Q_1(\omega,\nu_1,\nu_2,\nu_3)=0\quad (1\ 2\ 3)$$

$$Q_1=(J_3-J_2)\nu_2\nu_3\omega^2+[(E_{2i}\nu_i-\lambda_2)\nu_3-(E_{3i}\nu_i-\lambda_3)\nu_2]\omega+$$
$$+(N_{2i}\nu_i-e_2\Gamma)\nu_3-(N_{3i}\nu_i-e_3\Gamma)\nu_2$$

Так как $\nu_iQ_i(\omega,\nu_1,\nu_2,\nu_3)\equiv 0$, то из этих трех уравнений независимыми могут быть лишь два. Составим их комбинации

$$\sum_{(123)}J_1\nu_1Q_1(\omega,\nu_1,\nu_2,\nu_3)=0\quad \text{и}\quad \sum_{(123)}(N_{1i}\nu_i-e_1\Gamma)Q_1(\omega,\nu_1,\nu_2,\nu_3)=0$$

или

$$\omega S(\nu)=\Pi(\nu), \qquad \omega\Lambda(\nu)=S(\nu)$$

$$S(\nu)=\sum_{(123)}(N_{1i}\nu_i-e_1\Gamma)(J_3-J_2)\nu_2\nu_3, \qquad \Lambda(\nu)=\sum_{(123)}(E_{1i}\nu_i-\lambda_1)(J_2-J_3)\nu_2\nu_3$$

$$\Pi(\nu)=\sum_{(123)}(N_{1i}\nu_i-e_1\Gamma)\left[(E_{3i}\nu_i-\lambda_3)\nu_2-(E_{2i}\nu_i-\lambda_2)\nu_3\right]$$

Не обсуждая здесь возможных вырождений, отметим, что в общем случае в теле множество осей возможных равномерных вращений состоит из образующих конуса, направляющая линия которого — принадлежащая сфере (1.8) кривая $S^2(\nu)-\Pi(\nu)\Lambda(\nu)=0$. Идущей в направлении ($\nu_1$, ν_2, ν_3) образующей сопоставлено определенное значение угловой скорости $\omega=\Pi(\nu)/S(\nu)=S(\nu)/\Lambda(\nu)$.

Ранее конус осей равномерных вращений находили при ограничивающих условиях. При $E_{ij}=0$ он получен в работе [26], а в случае, когда тензор N_{ij} подобен тензору инерции — в [24]. Для тяжелого гиростата он получен в работах [42, 23]. В классической задаче это конус Ампера [43].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stekloff W.* Remarque sur un probleme de Clebsch sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indefini et sur le problème de M. de Brun.— Comtes rendus, 1902, t. 135, p. 526–528.
2. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью.— ПМТФ, 1963, № 4, с. 17–29.
3. *Лунёв В. В.* Гидродинамическая аналогия задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле сил Лоренца.— Докл. АН СССР, 1984, т. 276, № 2, с. 351–355.
4. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая.— В кн.: Собр. соч. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 136–193.
5. *Чаплыгин С. А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая.— В кн.: Собр. соч. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1948, с. 194–311.
6. *Суслов Г. К.* Теория потенциала и гидродинамика. Т. 2. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1910. 195 с.
7. *Харламов П. В.* О винтовых движениях тела в жидкости.— Матем. физика. Сб. статей: Киев: Наук. думка, 1968, вып. 5. с. 188–193.
8. *Харламов П. В.* О решениях уравнений динамики твердого тела.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 567–572.
9. *Рубановский В. Н.* Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела в жидкости.— Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 3, с. 556–559.
10. *Рубановский В. Н.* О некоторых возможных движениях тяжелого твердого тела в жидкости.— ПММ, 1968, т. 32, № 4, с. 763–768.
11. *Рубановский В. Н.* Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела в жидкости.— Вестн. МГУ. Сер. I, Математика, механика, 1968, № 2, с. 99–106.
12. *Степанова Л. А.* Динамика твердого тела с одной неподвижной точкой: Библиогр. указ. лит. (1749–1979). Донецк: Изд-е Донецк. политехн. ин-та, 1980. 132 с.
13. *Горр Г. В., Кудряшова Л. В., Степанова Л. А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
14. *Григорьян А. Т., Фрадлин Б. Н.* История механики твердого тела. М.: Наука, 1982. 293 с.
15. *Голубев В. В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 288 с.
16. *Архангельский Ю. А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
17. *Козлов В. В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
18. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. N. Y.: Johnson; Stuttgart: Teubner, 1965. 966 S.
19. *Leimanis E.* The general problem of the motion of Coupled rigid bodies about a fixed point. B.: Springer, 1965. 337 S.
20. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
21. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью.— Ж. Рус. физ.-хим. Об-ва, ч. физич., 1885, т. 17, отд. I, вып. 6, с. 81–113; вып. 7, с. 145–149; вып. 8, с. 231–280.
22. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes.— Acta Mathem., 1899, V. 22, p. 201–358.
23. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. 1. Новосибирск: Изд-е Новосиб. ун-та, 1965. 221 с.

24. *Харламова Е. И.* Некоторые решения задачи о движении тела, имеющего закрепленную точку.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 733—737.
25. *Харламова Е. И., Ковалева Л. М.* Уравнения движения гиростата в ньютоновском поле сил.— Механика твердого тела. Сб. статей Киев: Наук. думка, 1972, вып. 4, с. 92—98.
26. *Ковалева Л. М.* Новые решения задачи о движении гиростата в центральном ньютоновском поле сил.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1972, вып. 4, с. 99—105.
27. *Ковалева Л. М.* Три линейных инвариантных соотношения в задаче о движении гиростата в ньютоновском поле сил.— Механика твердого тела. Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1974, вып. 6, с. 86—93.
28. *Ковалева Л. М.* Специальные случаи существования линейных инвариантных соотношений уравнений движения тела в ньютоновском поле сил.— Механика твердого тела. Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1974, вып. 6, с. 93—102.
29. *Горр Г. В.* Регулярная прецессия гиростата в центральном ньютоновском поле сил.— Механика твердого тела. Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1972, вып. 4, с. 105—108.
30. *Самсонов В. А.* О вращении тела в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 32—34.
31. *Grioli G.* Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla.— Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, parte I, 1957, v. 27, p. 90—102.
32. *Лунев В. В.* Интегрируемые случаи в задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в поле сил Лоренца.— Докл. АН СССР, 1984, т. 275, № 4, с. 824—826.
33. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.— Успехи мат. наук, 1982, т. 37, вып. 5, с. 3—49.
34. *Пуанкаре А.* Избранные труды, Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
35. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1974, вып. 6, с. 15—24.
36. *Kharlamov M. P., Kharlamov P. V.* To solve a problem of rigid body dynamics. What das it mean?— Proc. IUTAM — ISIMM symp. on modern Develop. in analyt. Mechan. Atti della Accademia delle scienze di Torino, 1983, v. 117, p. 535—561.
37. *Харламов М. П.* О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1981, вып. 13, с. 10—14.
38. *Харламов П. В.* О годографах угловой скорости гироскопа Лагранжа.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1978, вып. 10, с. 10—15.
39. *Елфимов В. С.* Исследование подвижного годографа гироскопа Лагранжа.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1978, вып. 10, с. 16—24.
40. *Харламов П. В.* Разделяющие движения гироскопа Лагранжа.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1979, вып. 11, с. 17—22.
41. *Елфимов В. С.* О геометрическом исследовании движения гироскопа Лагранжа.— Механика твердого тела: Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1979, вып. 11, с. 22—32.
42. *Харламов П. В.* О равномерных вращениях тела, имеющего неподвижную точку.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 2, с. 373—375.
43. *Харламова Е. И.* О конусе Ампера.— Механика твердого тела. Сб. статей. Киев: Наук. думка, 1976, вып. 8, с. 72—76.

Донецк

Поступила в редакцию
12.VII.1985