МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1986

УДК 531.38

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

БОГАТЫРЕВ С. В., СТРЫГИН В. В.

Задача о вращении около центра масс твердого проводящего тела, помещенного в однородное квазистационарное магнитное поле, является весьма актуальной в связи с некоторыми приложениями [1–5].

В публикуемой работе рассматривается случай, когда тело является однородным изотропным магнетиком, материал которого имеет проводимость λ и магнитную проницаемость μ. Изучается структура момента сил, действующего на это тело в магнитном поле. Исследуется устойчивость некоторых стационарных движений.

1. Введем две правые ортогональные системы координат с общим началом в центре масс тела: инерциальную (ξ_k) и систему (r_k) $(k=1,2,3)$, жестко связанную с телом. Через V обозначим область, занимаемую телом в связанной системе координат и имеющую границу S, а через V_0 — дополнение этой области до всего пространства R_3. Пусть $\mathbf{n}|_S$ — единичный вектор нормали к S. Через $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^{(0)}$ обозначим напряженность магнитного поля в связанной системе (r_k) соответственно в областях V и V_0. Эти векторы удовлетворяют уравнениям квазистационарного приближения [6]:

$$4\pi\mathbf{H}^{\boldsymbol{\cdot}}/c^2=-(\lambda\mu)^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H},\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H}^{(0)}=0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{H}_\tau=\mathbf{H}_\tau^{(0)}\,|_S,\qquad \mu\mathbf{H}_n=\mathbf{H}_n^{(0)}\,|_S,\qquad \mathbf{H}^{(0)}\,|_{|r|=\infty}=\Gamma\mathbf{H}^\infty$$

Здесь c — скорость света в вакууме; точка означает производную по времени t в системе (r_k); $\mathbf{H}_n|_S=(\mathbf{H},\mathbf{n})|_S$ и $\mathbf{H}_\tau|_S=\mathbf{H}-(\mathbf{H},\mathbf{n})\mathbf{n}|_S$ — соответственно нормальная и касательная компоненты вектора $\mathbf{H}$ на поверхности S, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в R_3; Γ — матрица перехода от системы (ξ_k) к (r_k); $\mathbf{H}^\infty(t)$ — напряженность магнитного поля, созданного внешними источниками вдали от поверхности тела.

Движение тела около центра масс в связанной системе координат описывается уравнениями

$$J\mathbf{\Omega}^{\boldsymbol{\cdot}}+\mathbf{\Omega}\times J\mathbf{\Omega}=\mathbf{N},\quad \Gamma^{\boldsymbol{\cdot}}=-\Omega^+\Gamma \tag{1.2}$$

Здесь J — тензор инерции тела, Ω^+ — матрица размерности 3×3, поставленная в соответствие вектору угловой скорости тела $\mathbf{\Omega}$ так, чтобы для всех $\mathbf{r}\in R_3$ выполнялось $\Omega^+\mathbf{r}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}$. Момент сил $\mathbf{N}$, обусловленный магнитным полем, можно выразить через тензор натяжений магнитного поля T [4] $(\{\delta_{jk}\}_1^3$ — символ Кронекера):

$$\mathbf{N}=\int\limits_S[\mathbf{r}\times T\mathbf{n}]\,dS,\qquad T=\left\{T_{jk}=\frac{1}{4\pi}\left(H_j^{(0)}H_k^{(0)}-\frac{1}{2}\mathbf{H}^{(0)2}\delta_{jk}\right)\right\}_1^3 \tag{1.3}$$

Системы (1.1), (1.2) являются замкнутыми системами уравнений относительно переменных $\mathbf{H}$, $\mathbf{\Omega}$, Γ.

Рассмотрим случай, когда «время затухания» магнитного поля внутри тела существенно меньше характерного времени изменения внешнего магнитного поля в связанной системе координат. Тогда в нормализованных уравнениях (1.1) параметр $\varepsilon=4\pi/c^2$ будет малым [4, 5].

2. Преобразуем задачу (1.1), (1.2) к виду, удобному для применения асимптотических методов. Сделаем замену переменных

$$\mathbf{H}=\mathbf{h}+(E+\Psi)\Gamma\mathbf{H}^\infty,\quad \mathbf{H}^{(0)}=\mathbf{h}^{(0)}+(E+\Psi^{(0)})\Gamma\mathbf{H}^\infty \tag{2.1}$$

приводящую к нулевому условию на бесконечности. Здесь E — единичная матрица, а матрицы Ψ и $\Psi^{(0)}$ допускают представление $\Psi=\|\nabla\psi_1,\ \nabla\psi_2,\ \nabla\psi_3\|$, $\Psi^{(0)}=\|\nabla\psi_1^{(0)},\ \nabla\psi_2^{(0)},\ \nabla\psi_3^{(0)}\|$, в котором функции ψ_k, $\psi_k^{(0)}$ ($k=1, 2, 3$) являются решением задачи

$$\Delta\psi_k=0\ (\mathbf{r}\in V),\quad \Delta\psi_k^{(0)}=0\ (\mathbf{r}\in V_0),\quad \psi_k=\psi_k^{(0)}|_S$$

$$\mu d\psi_k/dn-d\psi_k^{(0)}/dn|_S=(1-\mu)(\mathbf{e}_k,\mathbf{n})|_S,\quad \psi_k^{(0)}|_{|\mathbf{r}|=\infty}=0$$

где $\mathbf{e}_k$ — орты осей r_k ($k=1, 2, 3$), $d\psi/dn|_S$ — нормальная производная функции ψ на поверхности S.

В новых переменных вместо уравнений (1.1) будем иметь

$$\varepsilon\mathbf{h}^{\boldsymbol\cdot}=-(\lambda\mu)^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{h}-\varepsilon(E+\Psi)(\Gamma\mathbf{H}^{\boldsymbol\cdot\infty}+\Gamma\mathbf{H}^\infty\times\Omega)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{h}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{h}^{(0)}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{h}^{(0)}=0$$

$$\mathbf{h}_\tau=\mathbf{h}_\tau^{(0)}|_S,\quad \mu\mathbf{h}_n=\mathbf{h}_n^{(0)}|_S,\quad \mathbf{h}^{(0)}|_{|\mathbf{r}|=\infty}=\infty \tag{2.2}$$

Сделаем также замену переменных (2.1) в интеграле (1.3). Переходя к интегрированию по области V, можно получить для момента сил $\mathbf{N}$ следующее представление:

$$\mathbf{N}=\left[M\Gamma\mathbf{H}^\infty+\frac{\mu-1}{4\pi}\int\limits_V\mathbf{h}\,d\mathbf{r}+\frac{1}{8\pi}\int\limits_V(\mathbf{r}\times\operatorname{rot}\mathbf{h})\,d\mathbf{r}\right]\times\Gamma\mathbf{H}^\infty$$

$$M=\frac{\mu-1}{4\pi}\int\limits_V\Psi\,d\mathbf{r} \tag{2.3}$$

3. Задача (1.2), (2.2) может быть записана в виде

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol\cdot}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon),\quad \varepsilon\mathbf{y}^{\boldsymbol\cdot}=A\mathbf{y}+\mathbf{g}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon) \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{x}=(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')\in X'\times X''\equiv X$; $X'\equiv R_3$, $X''\equiv R_9$; $\mathbf{y}\in Y$, где Y — гильбертово пространство соленоидальных векторных функций, определенных в области V и квадратично-суммируемых по этой области. Оператор A, действующий в пространстве Y, определим равенством $A\mathbf{y}=-(\lambda\mu)^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{y}$. Его область определения $D(A)$ состоит из соленоидальных векторных функций $\mathbf{y}$, принадлежащих пространству Соболева $H^2(V)$, у которых существует продолжение $\Pi\mathbf{y}\in H^2(V_0)$, удовлетворяющее условиям $\operatorname{div}\Pi\mathbf{y}=0$, $\operatorname{rot}\Pi\mathbf{y}=0$, $\mathbf{y}_\tau=(\Pi\mathbf{y})_\tau|_S$, $\mu\mathbf{y}_n=(\Pi\mathbf{y})_n|_S$. Подобное продолжение существует и единственно [7].

Можно доказать [7, 8], что оператор A биективно отображает пространство $D(A)$ на пространство Y, имеет дискретный вещественный спектр, лежащий внутри левой полуплоскости C, и при некоторых $\varphi(0<\varphi<\pi/2)$ и $\sigma_0<0$ резольвента $(\sigma E-A)^{-1}$ оператора A существует для всех σ из сектора $\{\sigma\in C\,|\,|\arg(\sigma-\sigma_0)|\leqslant\varphi+\pi/2\}$ и удовлетворяет в этом секторе неравенству $\|(\sigma E-A)^{-1}\|_{Y\to Y}\leqslant C_1/|\sigma-\sigma_0|$, в котором C_1 — некоторая постоянная.

Пусть A^α, $\alpha\geqslant0$ — дробная степень оператора A и Y^α — область определения A^α [9].

Функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ определим на множестве $R\times X\times U\times(0,\varepsilon_0]$, где $U\subset Y^{1/2}$ — некоторый шар с центром в нуле, следующими равенствами:

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x},y,\varepsilon)=\{J^{-1}(J\mathbf{x}'\times\mathbf{x}')+J^{-1}\mathbf{N},\ -x'^{+}\mathbf{x}''\}$$

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon)=-\varepsilon(E+\Psi)(\mathbf{x}''\mathbf{H}^{\boldsymbol\cdot\infty}+\mathbf{x}''\mathbf{H}^\infty\times\mathbf{x}')$$

$$\mathbf{N}=\left[MX''\mathbf{H}^\infty+\frac{\mu-1}{4\pi}\int\limits_V\mathbf{y}\,d\mathbf{r}+\frac{\lambda}{8\pi}\int\limits_V\left(\mathbf{r}\times\frac{1}{\lambda}\operatorname{rot}\mathbf{y}\right)d\mathbf{r}\right]\times\mathbf{x}''\mathbf{H}^\infty$$

Таким образом система (1.2), (2.2) приведена к виду (3.1).

4. Рассмотрим вопрос об обращении оператора A. Для этого удобно ввести вспомогательное пространство Z соленоидальных векторных функций, принадлежащих пространству Соболева $H^1(V)$ и имеющих на границе S нулевую нормальную компоненту.

Удобно также использовать представление $A=-A_2A_1$, где $A_1\mathbf{u}=\lambda^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{u}$, $A_2\mathbf{u}=\mu^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{u}$. Отметим [7], что оператор A_1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $D(A)$ и Z, а оператор A_2 — между пространствами Z и Y.

Сведем задачу обращения A_1 и A_2 к решению некоторых стационарных краевых задач. Для $\mathbf{v}\in Y$ имеем $A_2^{-1}\mathbf{v}=\mathbf{u}_0+\nabla\psi$, где $\mathbf{u}_0\in H^1(V)$ — какой-нибудь вектор, удовлетворяющий условиям $\operatorname{div}\mathbf{u}_0=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{u}_0=\mu\mathbf{v}$, а функция $\psi\in H^2(V)$ является решением задачи $\Delta\psi=0$, $d\psi/dn=-(\mathbf{u}_0,\mathbf{n})|_S$.

Далее для $\mathbf{v}\in Z$ имеем $A_1^{-1}\mathbf{v}=\mathbf{u}_0+\nabla\psi$, где теперь

$$\mathbf{u}_0=\frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V\frac{\lambda\mathbf{v}(r')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{r}'$$

а функция $\psi\in H^2(V)$ является решением задачи $\Delta\psi=0$ $(\mathbf{r}\in V)$, $\Delta\psi^{(0)}=0$ $(\mathbf{r}\in V_0)$, $\psi=\psi^{(0)}|_S$, $\mu d\psi/dn-d\psi^{(0)}/dn=(1-\mu)(\mathbf{u}_0,\mathbf{n})|_S$ для некоторой функции $\psi^{(0)}\in H^2(V_0)$.

5. Для исследования системы уравнений (3.1) применим метод интегральных многообразий [10].

Пусть функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ достаточное число раз дифференцируемы, каждая из производных этих функций ограничена равномерно по $(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon)\in\in R\times X\times U\times(0,\varepsilon_0]$ и, кроме того, для всех $(t,\mathbf{x})\in R\times X$ выполняется $\mathbf{g}(t,\mathbf{x},0,0)=0$, $\partial(\mathbf{g}(t,\mathbf{x},0,0))/\partial y=0$. Пусть также оператор A удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 3.

Тогда [11] система уравнений (3.1) имеет устойчивое интегральное многообразие Σ вида

$$\Sigma=\{(t,\mathbf{x},\mathbf{y},\varepsilon)\in R\times X\times Y^{1/2}\times(0,\varepsilon_0]\,|\,\mathbf{y}=\mathbf{H}(t,\mathbf{x},\varepsilon)\}$$

удовлетворяющее принципу сведения [12]. Движение по Σ будет описываться уравнением $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{H}(t,\mathbf{x},\varepsilon),\varepsilon)$.

Множество Σ ищется в виде [13]:

$$\mathbf{H}(t,\mathbf{x},\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\mathbf{h}_k(t,\mathbf{x})\tag{5.1}$$

Пусть

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{H}(t,\mathbf{x},\varepsilon),\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathbf{f}_k(t,\mathbf{x}),\qquad \mathbf{g}(t,\mathbf{x},\mathbf{H}(t,\mathbf{x},\varepsilon),\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\mathbf{g}_k(t,\mathbf{x})$$

Тогда коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют уравнениям

$$A\mathbf{h}_1+\mathbf{g}_1(t,\mathbf{x})=0$$

$$A\mathbf{h}_k+\mathbf{g}_k(t,\mathbf{x})=\frac{\partial\mathbf{h}_{k-1}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\partial\mathbf{h}_j}{\partial x}\mathbf{f}_{k-j-1}(t,\mathbf{x})\qquad(k=2,3,\ldots)$$

Из этих уравнений можно последовательно определить все коэффициенты $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2,\ldots$ ряда (5.1). Известно [11], что построенное таким образом разложение (5.1) будет асимптотическим разложением функции $\mathbf{H}(t,\mathbf{x},\varepsilon)$.

6. Перейдем к решению системы (1.2), (2.2). Пользуясь алгоритмом, изложенным в п. 5, найдем несколько первых членов асимптотического разложения интегрального многообразия для этой системы. Переходя к старым обозначениям, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение по интегральному многообразию Σ:

$$J\dot{\Omega}+\Omega\times J\Omega=(M\Gamma\mathbf{H}^{\infty}\times\Gamma\mathbf{H}^{\infty})+\tag{6.1}$$

$$+\varepsilon P^{(1)}[\Gamma\mathbf{H}^{\cdot\infty}+\Gamma\mathbf{H}^{\infty}\times\mathbf{\Omega})\times\Gamma\mathbf{H}^{\infty}+\varepsilon^2 P^{(2)}[\Gamma\mathbf{H}^{\cdot\cdot\infty}+$$

$$+2\Gamma\mathbf{H}^{\cdot\infty}\times\mathbf{\Omega}+(\Gamma\mathbf{H}^{\infty}\times\mathbf{\Omega})\times\mathbf{\Omega}+\Gamma\mathbf{H}^{\infty}\times J^{-1}(J\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}+$$

$$+M\Gamma\mathbf{H}^{\infty}\times\Gamma\mathbf{H}^{\infty})]\times\Gamma\mathbf{H}^{\infty}+\ldots,\quad \Gamma^{\cdot}=-\Omega^{+}\Gamma$$

в которых матрица M определяется формулой (2.3), а матрицы $P^{(1)}$, $P^{(2)}, \ldots$ — следующими формулами:

$$P^{(1)}=\frac{\mu-1}{4\pi}\int\limits_V A^{-1}(E+\Psi)\,d\mathbf{r}-\frac{\lambda}{8\pi}\int\limits_V [\mathbf{r}\times A_2^{-1}(E+\Psi)]\,d\mathbf{r}$$

$$P^{(2)}=\frac{\mu-1}{4\pi}\int\limits_V A^{-2}(E+\Psi)\,d\mathbf{r}+\frac{\lambda}{8\pi}\int\limits_V [\mathbf{r}\times A_2^{-1}A_1^{-1}A_2^{-1}(E+\Psi)]\,d\mathbf{r}$$

Выражение в правой части первого уравнения (6.1) является асимптотическим разложением момента сил на интегральном многообразии Σ. Фактически система уравнений (6.1) описывает движение тела около центра масс под действием момента сил от вихревых токов и намагничивания тела во внешнем магнитном поле вне некоторого начального временного интервала. Точнее, имеет место следующий результат.

Теорема 1. Для каждого решения $\mathbf{H}$, $\mathbf{\Omega}$, Γ задачи (1.2), (2.2) найдется такое решение $\mathbf{\Omega}^*$, Γ^* системы (6.1), что для некоторых постоянных $C>0$ и $\gamma>0$ имеет место оценка

$$\|\mathbf{\Omega}(t)-\mathbf{\Omega}^*(t)\|_{R_3}+\|\Gamma(t)-\Gamma^*(t)\|_{R_9}\leqslant C\exp[-\gamma\varepsilon^{-1}(t-t_0)]\quad (t\geqslant t_0)$$

и оба решения $\mathbf{H}$, $\mathbf{\Omega}$, Γ и $\mathbf{\Omega}^*$, Γ^* одновременно устойчивы (асимптотически устойчивы, неустойчивы) как решения соответствующих задач.

Если $\mathbf{H}^{\infty}=\mathrm{const}$, то для $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{L}=\Gamma\mathbf{H}^{\infty}$ имеем систему

$$J\mathbf{\Omega}^{\cdot}=(J\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}+M\mathbf{L}\times\mathbf{L})+\varepsilon P^{(1)}(\mathbf{L}\times\mathbf{\Omega})\times\mathbf{L}+\varepsilon^2 P^{(2)}[(\mathbf{L}\times\mathbf{\Omega})\times\mathbf{\Omega}+ \qquad (6.2)$$

$$+\mathbf{L}\times J^{-1}(J\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}+M\mathbf{L}\times\mathbf{L})]\times\mathbf{L}+\ldots,\quad \mathbf{L}^{\cdot}=\mathbf{L}\times\mathbf{\Omega}$$

7. Исследуем стационарные положения системы (6.2). Будем предполагать, что матрицы J, M и $P^{(1)}$ в некоторой ортогональной системе координат диагональны $J=\mathrm{diag}\,(J_1,\ J_2,\ J_3)$, $M=\mathrm{diag}\,(m_1,\ m_2,\ m_3)$, $P^{(1)}=\mathrm{diag}\,(p_1,\ p_2,\ p_3)$ и в этой системе $\mathbf{\Omega}=(\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3)$, $\mathbf{L}=(L_1,\ L_2,\ L_3)$.

Тогда система уравнений (6.2) имеет три двумерных многообразия стационарных положений $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_k$, $\mathbf{L}=I\mathbf{e}_k$ $(k=1,\ 2,\ 3)$, $(\omega,\ I)\in R_2$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости многообразия стационарных положений, например, для случая $k=3$. Достаточно положить $\Omega_3=\omega$, $L_3=I$ в уравнениях для Ω_1, Ω_2, L_1, L_2 и линеаризовать эти уравнения в нулевой точке. Тогда многообразие $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_3$, $\mathbf{L}=I\mathbf{e}_3$ будет устойчивым, если все собственные значения матрицы коэффициентов этой линеаризованной системы уравнений имеют отрицательные вещественные части, и неустойчивым, если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть [14].

Проводя подобные вычисления, можно показать, например, что при условии $p_1<0$, $p_2<0$ многообразие стационарных положений $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_3$, $\mathbf{L}=I\mathbf{e}_3$ будет устойчивым тогда и только тогда, когда выполняется $\omega^2 J_3+I^2 m_3\geqslant\max\{\omega^2 J_1+I^2 m_1,\ \omega^2 J_2+I^2 m_2\}$.

Таким образом имеем следующий результат.

Теорема 2. Если матрицы J, M, $P^{(1)}$ диагональны в некоторой системе координат и элементы матрицы $P^{(1)}$ отрицательны, то для случая постоянного внешнего магнитного поля стационарное вращение тела вокруг собственного вектора, соответствующего наибольшему собственному значению матрицы $\omega^2 J+I^2 M$, будет устойчивым по первому приближению. Других устойчивых вращений нет.

Отметим, что в рассматриваемом случае стационарными вращениями будут вращения вокруг главных осей инерции тела и устойчивость рассматриваемого стационарного вращения зависит не только от соотношений между элементами матриц J и M, но и от абсолютных величин ω и I угловой скорости тела $\mathbf{\Omega}$ и напряженности внешнего магнитного поля $\mathbf{H}^{\infty}$.

8. Рассмотрим подробнее случай, когда тело имеет форму, близкую к шаровой, и сделано из материала с магнитной проницаемостью $\mu=1$. Тогда матрица M будет нулевой, так что момент сил, действующий на тело в магнитном поле, будет определяться только вихревыми токами.

Поскольку для шара радиуса a имеем $J={}^8/_{15}\pi a^5 E$, $P^{(1)}=-{}^1/_{30}a^5\lambda E$, $P^{(2)}={}^1/_{315}a^7\lambda^2 E$, то в рассматриваемом случае можно положить

$$J={}^8/_{15}\pi a^5\{E+\varepsilon\,\mathrm{diag}\,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+\ldots\}$$

$$P^{(1)}=-{}^1/_{30}a^5\lambda\{E+\varepsilon\,\mathrm{diag}\,(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)+\ldots\},\quad P^{(2)}={}^1/_{315}a^7\lambda^2\{E+\ldots\}$$

Исследуем, как и ранее, устойчивость многообразия стационарных положений $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_3$, $L=I\mathbf{e}_3$. Для собственных значений матрицы B коэффициентов линеаризованной системы дифференциальных уравнений (6.2) при $\Omega_3=\omega$, $L_3=I$ имеем

$$\lambda_{1,2}=\pm i\omega-{}^1/_{16}\varepsilon\lambda I^2\pi^{-1}+\ldots$$

$$\lambda_{3,4}=\pm i\omega\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}\,[\varepsilon-{}^1/_2\varepsilon^2(\alpha_1+\alpha_2)]+$$
$$+{}^1/_{32}\varepsilon^2\lambda I^2\pi^{-1}(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)+\ldots$$

где i — мнимая единица. Собственные векторы $\mathbf{H}=(\Omega_1,\Omega_2,L_1,L_2)$ матрицы B с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ имеют вид

$$\mathbf{H}_{1,2}=(0,\,0,\,1,\,\pm i)$$

$$\mathbf{H}_{3,4}=\left(1,\ \frac{\pm i\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}}{\alpha_2-\alpha_3},\ \frac{I}{\omega},\ \frac{\pm iI\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}}{\omega(\alpha_2-\alpha_3)}\right)$$

Отсюда найдем общее решение для системы уравнений, полученной из системы (6.2) с помощью линеаризации в точке $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_3$, $\mathbf{L}=I\mathbf{e}_3$. Для случаев $\alpha_3<\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$ и $\alpha_3>\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$ имеем с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$:

$$\Omega_1=\exp[{}^1/_{32}\varepsilon^2\lambda I^2\pi^{-1}(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)t]\,(c_1\cos[\varepsilon\omega\Lambda_1 t]+c_2\sin[\varepsilon\omega\Lambda_1 t])\qquad(8.1)$$

$$\Omega_2=\frac{\Lambda_1}{\alpha_3-\alpha_2}\exp[{}^1/_{32}\varepsilon^2\lambda I^2\pi^{-1}(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)t]\,(c_1\sin[\varepsilon\omega\Lambda_1 t]-c_2\cos[\varepsilon\omega\Lambda_1 t])$$

$$\Lambda_1=\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)}$$

Аналогично для случаев $\alpha_1<\alpha_3<\alpha_2$ и $\alpha_2<\alpha_3<\alpha_1$ имеем

$$\Omega_1=c_1\exp\,[\varepsilon\omega\Lambda_2 t]+c_2\exp\,[-\varepsilon\omega\Lambda_2 t]\qquad(8.2)$$

$$\Omega_2=\frac{\Lambda_2}{\alpha_2-\alpha_3}\,(c_1\exp[\varepsilon\omega\Lambda_2 t]-c_2\exp[-\varepsilon\omega\Lambda_2 t])$$

$$\Lambda_2=\sqrt{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}$$

Во всех случаях также имеем

$$L_1-\frac{I}{\omega}\Omega_1=\exp[-{}^1/_{16}\varepsilon\lambda I^2 t\pi^{-1}]\,(c_3\cos\omega t+c_4\sin\omega t)\qquad(8.3)$$

$$L_2-\frac{I}{\omega}\Omega_2=\exp[-{}^1/_{16}\,\varepsilon\lambda I^2 t\pi^{-1}]\,(-c_3\sin\omega t+c_4\cos\omega t)$$

в (8.1)—(8.3) c_k ($k=1-4$) — произвольные постоянные.

Отсюда получаем, что многообразие стационарных положений $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_3$, $\mathbf{L}=I\mathbf{e}_3$, $(\omega,I)\in R_2$ устойчиво тогда и только тогда, когда $\alpha_3>\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Во всех остальных случаях оно будет неустойчивым по первому приближению, но устойчивым, как это видно из (8.1)—(8.3), на асимптотически большом промежутке времени.

Найдем оценку длины временного интервала, на котором решение $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_3$, $\mathbf{L}=I\mathbf{e}_3$ системы (6.2) будет устойчивым.

Зададим начальные условия для системы (6.2):

$$\Omega_k|_{t=0}=\Omega_{k0},\quad L_k|_{t=0}=L_{k0}\quad (k=1,\,2)$$

$$\Omega_3|_{t=0}=\omega+\Omega_{30},\quad L_3|_{t=0}=I+L_{30} \tag{8.4}$$

где Ω_{k0}, L_{k0} $(k=1,\,2,\,3)$ достаточно малы.

Для случая $\alpha_3<\max\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$ из (8.1) легко получаем, что проекция интегральной кривой задачи (6.2), (8.4) на плоскость $(\Omega_1,\ \Omega_2)$ не выйдет за пределы эллипса $\Omega_1^2+(\alpha_2-\alpha_3)/(\alpha_1-\alpha_3)\Omega_2^2\leqslant R^2$ на интервале времени длины

$$\Delta T\approx\frac{32\pi}{\varepsilon^2\lambda I^2(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3)}\ln\left(\frac{R}{R_1}\right),\quad R_1^2=\Omega_{10}^2+\left(\frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}\right)\Omega_{20}^2 \tag{8.5}$$

Теперь для случаев $\alpha_1<\alpha_3<\alpha_2$ и $\alpha_2<\alpha_3<\alpha_1$ из (8.2) получим нижнюю оценку длины временного интервала, на котором проекция интегральной кривой задачи (6.2), (8.4) на плоскость $(\Omega_1,\ \Omega_2)$ не выйдет за границу эллипса $\Omega_1^2+(\alpha_2-\alpha_3)/(\alpha_3-\alpha_1)\Omega_2^2\leqslant R^2$. Она имеет вид

$$\Delta T\geqslant(2\varepsilon\omega\sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)})^{-1}\ln(2R^2/R_2^2) \tag{8.6}$$

$$R_2^2=\Omega_{10}^2+(\alpha_2-\alpha_3)/(\alpha_3-\alpha_1)\Omega_{20}^2$$

Из (8.3) видно, что оценки (8.5) и (8.6) соответственно в случаях $\alpha_3<\max\{\alpha_1,\ \alpha_2\}$ и $\alpha_1<\alpha_3<\alpha_2$, $\alpha_2<\alpha_3<\alpha_1$ могут служить оценками длины ΔT временного интервала, на котором решение $\mathbf{\Omega}=\omega\mathbf{e}_3$, $\mathbf{L}=I\mathbf{e}_3$ системы (6.2) будет устойчивым.

Авторы признательны А. И. Кобрину и Ю. Г. Мартыненко за полезные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Сермонс Г. Я.* Динамика твердых тел в электромагнитном поле. Рига: Зинатне, 1974. 247 с.
3. *Мартыненко Ю. Г.* Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора.– Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5, с. 35–40.
4. *Голубков В. В.* Момент сил в магнитном поле.– Космич. исследования, 1972, т. 10, вып. 1, с. 20–39.
5. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г.* Движение проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле.– Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 5, с. 1070–1073.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики.– Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1973, т. 38, с. 46–93.
8. *Богатырев С. В.* Об одном эллиптическом операторе.– В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: Изд-е Куйбышев. ун-та, 1983, с. 20–27.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
10. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 542 с.
11. *Богатырев С. В.* Об интегральных многообразиях сингулярно-возмущенных систем с неограниченным оператором.– В кн.: Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Куйбышев: Изд-е Куйбышев. ун-та, 1984, с. 18–40.
12. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения.– Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, т. 28, № 6, с. 1297–1324.
13. *Стрыгин В. В.* Интегральные многообразия в задаче о сингулярном и параметрическом возмущении автоколебательной системы.– В кн.: Дифференциальные уравнения и их применения. Куйбышев: Изд-е Куйбышев. политехн. ин-та, 1975, вып. 2, с. 108–126.
14. *Aiserman M. A., Gantmacher F. R.* Stabilität der Gleichgewichtslage in einem nicht-holonomen system.– Z. angew. Math. und Mech., 1957, B. 37, H. 1/2, S. 74–75.

Куйбышев

Поступила в редакцию 29.I.1985