МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1986

УДК 531.383

ВОЗМУЩЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, БЛИЗКИЕ К РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ

АКУЛЕНКО Л. Д., ЛЕЩЕНКО Д. Д., ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л.

Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. Предполагается, что угловая скорость тела достаточно велика, ее направление близко к оси динамической симметрии тела и две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка. Специальным образом вводится малый параметр, применяется метод усреднения. Получена усредненная система уравнений движения в первом приближении. Рассмотрены примеры.

1. Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием восстанавливающего и возмущающего моментов. Уравнения движения (динамические и кинематические уравнения Эйлера) имеют вид

$$
\begin{gathered}
Ap^{\cdot}+(C-A)qr=k\sin\theta\cos\varphi+M_1 \\
Aq^{\cdot}+(A-C)pr=-k\sin\theta\sin\varphi+M_2 \qquad (1.1) \\
Cr^{\cdot}=M_3,\quad M_i=M_i(p,\,q,\,r,\,\psi,\,\theta,\,\varphi,\,t);\quad (i=1,\,2,\,3) \\
\psi^{\cdot}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\quad \theta^{\cdot}=p\cos\varphi-q\sin\varphi \\
\varphi^{\cdot}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta
\end{gathered}
$$

Динамические уравнения (1.1) записаны в проекциях на главные оси инерции тела, проходящие через точку O. Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости тела на эти оси, M_i ($i=1, 2, 3$) — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ, θ, φ с периодами 2π, ψ — угол прецессии, θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения, A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции тела относительно точки O, $A\neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, максимальная величина которого равна k и который создается постоянной по величине и направлению силой, приложенной в некоторой фиксированной точке оси динамической симметрии. В случае тяжелого волчка имеем

$$k=mgl \qquad (1.2)$$

Здесь m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, l — расстояние от неподвижной точки O до центра тяжести тела.

Возмущающие моменты M_i в (1.1) предполагаются известными функциями своих аргументов. При $M_i=0$ ($i=1, 2, 3$) уравнения (1.1) отвечают случаю Лагранжа и могут описывать движения волчка Лагранжа при воздействии возмущений различной физической природы, а также движения свободного твердого тела относительно центра масс, когда на него действует восстанавливающий момент, обусловленный аэродинамическими силами, и некоторые возмущающие моменты.

В публикуемой работе делаются следующие исходные предположения:

$$p^2+q^2\ll r^2,\quad Cr^2\gg k,\quad |M_i|\ll k\ (i=1,\,2),\quad M_3\sim k \qquad (1.3)$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика, так что кинетическая энергия тела много больше потенциальной энергии, обусловленной восстанавливающим моментом; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья — одного с ним порядка. Неравенства (1.3) позволяют ввести малый параметр ε и положить

$$p=\varepsilon P, \quad q=\varepsilon Q, \quad k=\varepsilon K, \quad \varepsilon\ll 1 \tag{1.4}$$

$$M_i=\varepsilon^2 M_i^*(P,\ Q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi,\ t) \quad (i=1,\ 2), \quad M_3=\varepsilon M_3^*(P,\ Q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi,\ t)$$

Новые переменные P, Q, а также переменные и постоянные r, ψ, θ, φ, K, A, C, M_i^* $(i=1, 2, 3)$ предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon\to 0$.

Ставится задача исследования асимптотического поведения решений системы (1.1) при малом ε, если выполнены условия (1.3), (1.4), которое будет проводиться широко используемым в задачах динамики твердого тела методом усреднения [1—3] на интервале времени порядка ε^{-1}.

В [3—5] этим методом исследован ряд задач динамики, главным образом для тел, обладающих динамической симметрией. В [6] впервые проведено усреднение по движению Эйлера — Пуансо для несимметричного тела. В ряде работ, например [3, 5, 7—14], исследованы возмущенные движения, близкие к движению Лагранжа. Совокупность упрощающих предположений (1.3) или (1.4), сделанных в публикуемой статье, позволяет получить в общем случае сравнительно простую схему усреднения и до конца исследовать ряд примеров.

2. Сделаем в системе (1.1) замену переменных (1.4); сократив обе части первых двух уравнений (1.1) на ε, получим

$$AP^{\cdot}+(C-A)Qr=K\sin\theta\cos\varphi+\varepsilon M_1^* \tag{2.1}$$

$$AQ^{\cdot}+(A-C)Pr=-K\sin\theta\sin\varphi+\varepsilon M_2^*, \quad Cr^{\cdot}=\varepsilon M_3^*$$

$$\psi^{\cdot}=\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta, \quad \theta^{\cdot}=\varepsilon(P\cos\varphi-Q\sin\varphi)$$

$$\varphi^{\cdot}=r-\varepsilon(P\sin\varphi+Q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta$$

Рассмотрим систему нулевого приближения и положим в (2.1) $\varepsilon=0$. Тогда из последних четырех уравнений (2.1) получим

$$r=r_0, \quad \psi=\psi_0, \quad \theta=\theta_0, \quad \varphi=r_0t+\varphi_0 \tag{2.2}$$

Здесь r_0, ψ_0, θ_0, φ_0 — постоянные, равные начальным значениям соответствующих переменных при $t=0$. Подставим равенства (2.2) в первые два уравнения системы (2.1) при $\varepsilon=0$ и проинтегрируем полученную систему двух линейных уравнений для P, Q. Решение представим в виде

$$P=a\cos\gamma_0+b\sin\gamma_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(r_0t+\varphi_0) \tag{2.3}$$

$$Q=a\sin\gamma_0-b\cos\gamma_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(r_0t+\varphi_0)$$

$$a=P_0-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \quad b=-Q_0+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0$$

$$\gamma_0=n_0t, \quad n_0=(C-A)A^{-1}r_0\neq 0, \quad |n_0/r_0|\leqslant 1$$

Здесь P_0, Q_0 — начальные значения новых переменных P, Q, введенных согласно (1.4), а переменная $\gamma=\gamma_0$ имеет смысл фазы колебаний. Система (2.1) существенно нелинейна (частота собственных колебаний переменных P, Q зависит от медленной переменной r), поэтому далее вводится дополнительная переменная γ, определяемая уравнением

$$\gamma^{\cdot}=n, \quad \gamma(0)=0 \tag{2.4}$$

При $\varepsilon=0$ имеем $\gamma=\gamma_0=n_0t$ в соответствии с (2.3). Равенства (2.2), (2.3) определяют общее решение системы (2.1), (2.4) при $\varepsilon=0$. Первые два соотношения (2.3) можно, исключая постоянные, с учетом (2.2) переписать в эквивалентном виде

$$P=a\cos\gamma+b\sin\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi \qquad (2.5)$$

$$Q=a\sin\gamma-b\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi$$

и разрешить относительно a, b:

$$a=P\cos\gamma+Q\sin\gamma-KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin(\gamma+\varphi) \qquad (2.6)$$

$$b=P\sin\gamma-Q\cos\gamma+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos(\gamma+\varphi)$$

Рассмотрим систему (2.1) при $\varepsilon\neq0$ и соотношения (2.5), (2.6) как формулы замены переменных (содержащие переменную γ), определяющие переход от переменных P, Q к переменным типа Ван дер Поля [1] a, b и обратно. Пользуясь этими формулами, перейдем в системе (2.1), (2.4) от переменных P, Q, r, ψ, θ, φ, γ к новым переменным a, b, r, ψ, θ, α, γ, причем

$$\alpha=\gamma+\varphi \qquad (2.7)$$

После преобразований получим более удобную для дальнейшего исследования систему семи уравнений (вместо шести (2.1)):

$$a^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma+M_2^0\sin\gamma)-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta(b- \qquad (2.8)$$

$$-KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha)+\varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha$$

$$b^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma-M_2^0\cos\gamma)+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta(a+$$

$$+KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha)-\varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha, \quad r^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}M_3^0$$

$$\psi^{\cdot}=\varepsilon\operatorname{cosec}\theta(a\sin\alpha-b\cos\alpha)+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}$$

$$\theta^{\cdot}=\varepsilon(a\cos\alpha+b\sin\alpha)$$

$$\alpha^{\cdot}=CA^{-1}r-\varepsilon\operatorname{ctg}\theta(a\sin\alpha-b\cos\alpha)-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta, \quad \gamma^{\cdot}=(C-A)A^{-1}r$$

Здесь через M_i^0 обозначены функции, полученные из M_i^* (см. (1.4)) в результате сделанной подстановки (2.5)÷(2.7), т. е.

$$M_i^0(a, b, r, \psi, \theta, \alpha, \gamma, t)=M_i^*(P, Q, r, \psi, \theta, \varphi, t) \quad (i=1, 2, 3) \qquad (2.9)$$

Отметим, что переход от двух переменных P, Q к трем a, b, γ вызван соображениями удобства: при $\varepsilon=0$ система для P, Q имеет вид линейной, а замена (2.5) неособая для всех a, b.

Введем вектор x, компонентами которого служат медленные переменные a, b, r, ψ, θ системы (2.8). Тогда эту систему можно записать в виде

$$x^{\cdot}=\varepsilon X(x, \alpha, \gamma, t), \quad \alpha^{\cdot}=CA^{-1}r+\varepsilon Y(x, \alpha) \qquad (2.10)$$

$$\gamma^{\cdot}=(C-A)A^{-1}r, \quad x(0)=x_0, \quad \alpha(0)=\alpha_0, \quad \gamma(0)=0$$

Здесь вектор-функция X и скалярная функция Y определяются правыми частями уравнений (2.8), начальные значения получаются согласно (2.2)–(2.4), (2.7).

Рассмотрим систему (2.8) или (2.10) с точки зрения применения метода усреднения [1–3]. Система (2.8) содержит медленные переменные a, b, r, ψ, θ и быстрые переменные – фазы α, γ и время t, причем γ входит лишь в первые три уравнения (2.8). Система существенно нелинейна, и непосредственное применение метода усреднения весьма затруднено [15]. Предположим, для простоты, что возмущающие моменты M_i^* не зависят от t. Так как M_i^* $(i=1, 2, 3)$ периодичны по φ с периодом 2π, то согласно замене (2.5)–(2.7) функции M_i^0 из (2.9) будут периодическими функциями α и γ с периодами 2π. Тогда система (2.10) содержит две вращающиеся фазы α и γ и соответствующие им частоты $CA^{-1}r$ и $(C-A)A^{-1}r$ переменны. При усреднении системы (2.8) или (2.10) следует различать два случая: нерезонансный, когда частоты $CA^{-1}r$ и $(C-A)A^{-1}r$ несоизмеримы, и резонансный, когда эти частоты соизмеримы [15]. Весьма существенной особенностью системы (2.10) является то, что отношение частот постоянно $[(C-A)A^{-1}r]/[CA^{-1}r]=1-AC^{-1}$ и резонансный случай имеет место при

$$C/A=i/j, \quad i/j\leqslant 2 \tag{2.11}$$

где i, j — натуральные взаимно простые числа, а в нерезонансном случае C/A — иррациональное число. Вследствие (2.11) усреднение нелинейной системы (2.10), в которой X не зависит от t, эквивалентно усреднению квазилинейной системы с постоянными частотами. Это достигается введением независимой переменной γ.

В нерезонансном случае $(C/A\neq i/j)$ усредненную систему первого приближения получим путем независимого усреднения правых частей системы (2.8) по обеим быстрым переменным α, γ. В результате для медленных переменных получаются уравнения

$$a^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}\mu_1-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}b\cos\theta+\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3{}^s \tag{2.12}$$

$$b^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}\mu_2+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}a\cos\theta-\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3{}^c$$

$$r^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}\mu_3, \quad \psi^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1}, \quad \theta^{\cdot}=0$$

$$\mu_1(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1{}^0\cos\gamma+M_2{}^0\sin\gamma)\,d\alpha\,d\gamma$$

$$\mu_2(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(M_1{}^0\sin\gamma-M_2{}^0\cos\gamma)\,d\alpha\,d\gamma,$$

$$\mu_3(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3{}^0\,d\alpha\,d\gamma$$

$$\mu_3{}^s(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3{}^0\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma,$$

$$\mu_3{}^c(a,b,r,\psi,\theta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}M_3{}^0\cos\alpha\,d\alpha\,d\gamma$$

Решая усредненную систему (2.12) для возмущающих моментов конкретного вида, определим движение тела в нерезонансном случае с погрешностью порядка ε на интервале изменения времени порядка ε^{-1}. Отметим, что последнее уравнение системы (2.12) интегрируется и дает $\theta=\theta_0$.

Данная система эквивалентна двухчастотной системе с постоянными частотами, поскольку обе частоты пропорциональны осевой составляющей r вектора угловой скорости. Поэтому обоснование применимости метода усреднения можно провести, как и для квазилинейной системы. Основное утверждение заключается в следующем. Пусть функция X — достаточно гладкая по α, γ, а по x удовлетворяет условию Липшица с не зависящей от α, γ постоянной. Тогда на плоскости допустимых значений параметров C, A существует множество L меры нуль, такое, что если $(C, A)\notin L$, то для решений систем (2.10) и (2.12) имеет место оценка $|x(t,\varepsilon)-\xi(\varepsilon t)|\leqslant D\varepsilon$, $t\in[0, \Theta\varepsilon^{-1}]$, в которой $\xi(\varepsilon t)$ — решение усредненной по фазам α, γ системы (2.12), $\xi=(a, b, r, \psi, \theta)$, $D=\mathrm{const}$. Доказательство проводится при помощи леммы Гронуолла на основе стандартной процедуры замены переменных метода усреднения [2], а также арифметической леммы, используемой для оценки «малых знаменателей» [15], возникающих при построении указанной замены.

В резонансном случае (2.11) система (2.10) одночастотна. Действительно, введем вместо α новую медленную переменную — линейную комбинацию фаз с целочисленными коэффициентами

$$\lambda=\alpha-i(i-j)^{-1}\gamma, \quad (i/j)\neq 1, \quad (i/j)\leqslant 2; \quad i, j>0 \tag{2.13}$$

Система (2.10) примет вид стандартной системы с вращающейся фазой

$$x^{\cdot}=\varepsilon X(x, i(i-j)^{-1}\gamma+\lambda, \gamma) \tag{2.14}$$

$$\lambda^{\cdot}=\varepsilon Y(x, i(i-j)^{-1}\gamma+\lambda), \quad \gamma^{\cdot}=(C-A)A^{-1}r$$

причем ее правые части периодичны по γ с периодом $2|i-j|\pi$. Систему первого приближения построим усредняя правые части системы (2.14) по указанному периоду изменения аргумента γ. В результате получим систему уравнений для медленных переменных

$$a^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}\mu_1{}^*-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}b\cos\theta+\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3{}^{*s} \tag{2.15}$$

$$b^{\cdot}=\varepsilon A^{-1}\mu_2{}^*+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}a\cos\theta-\varepsilon KC^{-2}r^{-2}\sin\theta\mu_3{}^{*c}$$

$$r^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}\mu_3{}^*, \quad \psi^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1}, \quad \theta^{\cdot}=0, \quad \lambda^{\cdot}=-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta$$

$$\mu_1{}^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}(M_1{}^0\cos\gamma+M_2{}^0\sin\gamma)\,d\gamma$$

$$\mu_2{}^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}(M_1{}^0\sin\gamma-M_2{}^0\cos\gamma)\,d\gamma,$$

$$\mu_3{}^*(a, b, r, \psi, \theta, \lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}M_3{}^0\,d\gamma$$

$$\mu_3{}^{*s}(a, b, r, \psi, \theta, \lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}M_3{}^0\sin\alpha\,d\gamma$$

$$\mu_3{}^{*c}(a, b, r, \psi, \theta, \lambda)=\frac{1}{2\pi|i-j|}\int\limits_0^{2\pi|i-j|}M_3{}^0\cos\alpha\,d\gamma$$

Предполагается, что в подынтегральных выражениях переменная α заменена на λ согласно (2.13). Отметим, что предпоследнее уравнение (2.15) имеет решение $\theta=\theta_0$.

Решая усредненную систему (2.15) для возмущающих моментов определенного вида, определим движение тела в резонансном случае с погрешностью порядка ε на интервале изменения времени порядка ε^{-1}. Обоснование проводится стандартным образом [1, 2].

Далее при помощи изложенной методики рассмотрены некоторые конкретные примеры возмущенного движения твердого тела.

3. В качестве примера развитой методики исследуем возмущенное движение Лагранжа с учетом моментов, действующих на твердое тело со стороны внешней среды. Будем считать, что возмущающие моменты M_i ($i=1, 2, 3$) являются линейно-диссипативными [16]:

$$M_1=-\varepsilon I_1 p, \quad M_2=-\varepsilon I_1 q, \quad M_3=-\varepsilon I_3 r, \quad I_1, I_3>0 \tag{3.1}$$

Здесь I_1, I_3 — некоторые постоянные коэффициенты пропорциональности, зависящие от свойств среды и формы тела.

Запишем возмущающие моменты с учетом соотношений (1.4) для p и q:

$$M_1=-\varepsilon^2 I_1 P, \quad M_2=-\varepsilon^2 I_1 Q, \quad M_3=-\varepsilon I_3 r \tag{3.2}$$

Согласно п. 2, для нерезонансного случая переходим к новым медленным переменным a, b, r, ψ, θ и получим усредненную систему (2.12) вида

$$a^{\cdot}=-\varepsilon I_1A^{-1}a-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}b\cos\theta,\quad b^{\cdot}=-\varepsilon I_1A^{-1}b+\varepsilon KC^{-1}r^{-1}a\cos\theta$$

$$r^{\cdot}=-\varepsilon I_3C^{-1}r,\quad \psi^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1},\quad \theta^{\cdot}=0 \tag{3.3}$$

Проинтегрировав третье уравнение (3.3), получим (r_0 — произвольное начальное значение осевой скорости вращения):

$$r=r_0\exp(-\varepsilon I_3C^{-1}t),\quad r_0\neq 0 \tag{3.4}$$

С учетом (3.4) уравнение (3.3) для $\psi^{\cdot}$ интегрируется и дает (ψ_0 — постоянная, равная начальному значению угла прецессии при $t=0$):

$$\psi=\psi_0+KI_3^{-1}r_0^{-1}[\exp(\varepsilon I_3C^{-1}t)-1] \tag{3.5}$$

Кроме того, как видно из (3.3), угол нутации сохраняет постоянное значение $\theta=\theta_0$. Подставляя в первые два уравнения (3.3) вместо r выражение (3.4), получим систему вида

$$a^{\cdot}=-\varepsilon I_1A^{-1}a-\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\exp(\varepsilon I_3C^{-1}t)\,b\cos\theta$$

$$b^{\cdot}=-\varepsilon I_1A^{-1}b+\varepsilon KC^{-1}r_0^{-1}\exp(\varepsilon I_3C^{-1}t)\,a\cos\theta$$

решение которой, согласно [17, с. 534], записывается следующим образом:

$$a=\exp(-\varepsilon I_1A^{-1}t)(P_0\cos\eta+Q_0\sin\eta-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\eta+\varphi_0))$$

$$b=\exp(-\varepsilon I_1A^{-1}t)[P_0\sin\eta-Q_0\cos\eta+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\eta+\varphi_0)]$$

$$\eta=KI_3^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0[\exp(\varepsilon I_3C^{-1}t)-1] \tag{3.6}$$

В результате подстановки в соотношения (2.5), (1.4) для P, Q, p, q выражений a, b из (3.6) и r из (3.4) определим

$$p=\exp(-\varepsilon I_1A^{-1}t)[p_0\cos(\gamma-\eta)-q_0\sin(\gamma-\eta)+ \tag{3.7}$$

$$+kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\gamma-\eta-\varphi_0)]+kC^{-1}r_0^{-1}\exp(\varepsilon I_3C^{-1}t)\sin\theta_0\sin\varphi$$

$$q=\exp(-\varepsilon I_1A^{-1}t)[p_0\sin(\gamma-\eta)+q_0\cos(\gamma-\eta)-$$

$$-kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\gamma-\eta-\varphi_0)]+kC^{-1}r_0^{-1}\exp(\varepsilon I_3C^{-1}t)\sin\theta_0\cos\varphi$$

$$\gamma=\frac{C}{I_3}\frac{C-A}{A}\frac{r_0}{\varepsilon}[1-\exp(-\varepsilon I_3C^{-1}t)],\quad p_0=\varepsilon P_0,\quad q_0=\varepsilon Q_0$$

Тем самым решение системы первого приближения для медленных переменных в случае диссипативного момента (3.1) построено. Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Модуль осевой скорости вращения r монотонно уменьшается по экспоненте согласно (3.4). Приращение угла прецессии $\psi-\psi_0$ медленно экспоненциально возрастает в соответствии с (3.5). Из (3.6) следует, что медленные переменные a, b монотонно стремятся к нулю по экспоненте.

Согласно (3.7), слагаемые проекций p, q, обусловленные начальными значениями p_0, q_0, затухают по экспоненте. В то же время проекции p, q содержат экспоненциально возрастающие члены, пропорциональные восстанавливающему моменту k, что приводит к экспоненциальному росту величины $(p^2+q^2)^{1/2}$.

Если выполнено резонансное соотношение (2.11), то усреднение следует проводить по схеме (2.15). В данном случае все интегралы μ_i^* из (2.15) совпадают с соответствующими интегралами μ_i из (2.12). Поэтому резонанс фактически места не имеет и полученное решение пригодно для описания движения при любом отношении $C/A\neq 1$.

Отметим, что аналогично может быть исследован более общий, чем (3.1), случай линейной зависимости диссипативных моментов от угловой скорости вращения, а именно $\mathbf{M}=-\varepsilon I\cdot\boldsymbol{\omega}$. Здесь I — тензор, определяемый матрицей

$$\begin{Vmatrix} I_1 & \varepsilon I_{12} & \varepsilon I_{13} \\ \varepsilon I_{21} & I_2 & \varepsilon I_{23} \\ \varepsilon I_{31} & \varepsilon I_{32} & I_3 \end{Vmatrix}$$

в которой перекрестные члены малы по сравнению с диагональными.

4. Рассмотрим движение твердого тела в случае Лагранжа под действием малого момента, постоянного в связанных осях и приложенного вдоль оси симметрии. Возмущающие моменты M_i ($i=1, 2, 3$) в этом случае имеют вид

$$M_1=M_2=0, \quad M_3=\varepsilon M_3^*=\text{const} \tag{4.1}$$

Переходя к новым медленным переменным a, b, r, ψ, θ, получим в нерезонансном случае усредненную систему типа (2.12):

$$a^{\cdot}=-\varepsilon KC^{-1}r^{-1}b\cos\theta,\ b^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1}a\cos\theta \tag{4.2}$$
$$r^{\cdot}=\varepsilon C^{-1}M_3^*, \quad \psi^{\cdot}=\varepsilon KC^{-1}r^{-1}, \quad \theta^{\cdot}=0$$

Проинтегрировав третье уравнение (4.2), получим

$$r=r_0+\varepsilon C^{-1}M_3^*t \tag{4.3}$$

Подставим (4.3) в (4.2) и проинтегрируем уравнение для ψ:

$$\psi=\psi_0+K(M_3^*)^{-1}\ln|1+\varepsilon C^{-1}M_3^*r_0^{-1}t| \tag{4.4}$$

Здесь ψ_0 и r_0 — произвольные начальные значения угла прецессии и осевой скорости вращения.

Как следует из (4.2), угол нутации θ не изменяется во время движения тела $\theta=\theta_0$.

Решение системы первых двух уравнений (4.2) после подстановки вместо r выражения (4.3) записывается следующим образом:

$$a=P_0\cos\beta+Q_0\sin\beta-KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin(\beta+\varphi_0)$$
$$b=P_0\sin\beta-Q_0\cos\beta+KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos(\beta+\varphi_0)$$
$$\beta=K(M_3^*)^{-1}\cos\theta_0\ln|1+\varepsilon C^{-1}r_0^{-1}M_3^*t| \tag{4.5}$$

Подставляя в формулы (2.5), (1.4) полученные выражения a, b из (4.5) и r из (4.3), определим

$$p=p_0\cos(\gamma-\beta)-q_0\sin(\gamma-\beta)+kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\times \tag{4.6}$$
$$\times\sin(\gamma-\beta-\varphi_0)+kC^{-1}(r_0+\varepsilon C^{-1}M_3^*t)^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi$$
$$q=p_0\sin(\gamma-\beta)+q_0\cos(\gamma-\beta)-kC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\times$$
$$\times\cos(\gamma-\beta-\varphi_0)+kC^{-1}(r_0+\varepsilon C^{-1}M_3^*t)^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi$$
$$\gamma=(C-A)A^{-1}(1/2\,\varepsilon C^{-1}M_3^*t^2+r_0t), \quad p_0=\varepsilon P_0, \quad q_0=\varepsilon Q_0$$

Согласно (4.3), величина $|r(\tau)|$, $\tau=\varepsilon t$ возрастает, если параметры r_0, M_3^* имеют одинаковый знак, и убывает, если знаки различны. Угол прецессии ψ (4.4) содержит переменную составляющую, модуль которой в обоих случаях монотонно возрастает: в первом случае он ограничен для конечного $\tau\sim1$, во втором стремится к бесконечности при $\tau\to-(Cr_0/M_3^*)$; при этом $r\to0$.

Переменная β в (4.5), (4.6) изменяется аналогично ψ, если $\theta_0\neq\pm1/2\pi$, и имеет смысл фазы колебаний. Частота колебаний $(d\beta/dt)\sim r_0^{-1}$. Медленные переменные a, b являются ограниченными 2π-периодическими функциями β.

Составляющие p, q вектора угловой скорости согласно (4.6) содержат ограниченные осциллирующие слагаемые, обусловленные ненулевыми начальными данными p_0, q_0, а также аналогичное слагаемое, обусловленное восстанавливающим моментом (1.2). Частота колебаний определяется производной переменной $(\gamma-\beta)$, имеющей смысл фазы.

5. Остановимся кратко на случае тяжелого твердого тела, у которого эллипсоид энергии относительно точки O близок к эллипсоиду вращения, так что его главные моменты инерций имеют вид $A=A^0(1+\varepsilon\delta_1)$, $B=A^0(1+\varepsilon\delta_2)$, $C\neq A^0$. Здесь δ_1, δ_2 — безразмерные константы порядка единицы, A^0 — характерная величина моментов инерции. Кроме того, центр тяжести тела может быть смещен относительно точки

O^*, лежащей на главной оси инерции, относительно которой момент равен C, на величину порядка ε. В этом случае задача может быть сведена к рассмотренной в п. 1 введением дополнительных возмущающих моментов, удовлетворяющих условию (1.4). Оказывается, что при этом $M_3 \sim \varepsilon^2$, так что $M_3^* = M_3^0 = 0$. Следуя (2.12), (2.15), получим $\mu_3 = \mu_3^s = \mu_3^c = 0$, $\mu_3^* = \mu_3^{*s} = \mu_3^{*c} = 0$.

Таким образом, последние три уравнения (2.12) принимают вид $r^{\cdot} = 0$, $\psi^{\cdot} = \varepsilon K C^{-1} r^{-1}$, $\theta^{\cdot} = 0$.

В рассматриваемом приближении кинематические уравнения Эйлера не возмущаются и движение тела представляет собой регулярную прецессию.

Отметим, что, как следует из уравнений первого приближения (2.12), (2.15), при наличии нескольких возмущающих моментов вида (1.4) результаты их действия складываются, соответствующие этим возмущениям интегралы (2.12), (2.15) представляются в виде суммы интегралов для отдельных возмущений.

Авторы благодарят А. С. Шамаева за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
3. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
4. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
5. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
6. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов.– ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474–483.
7. *Кузмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М.: Наука, 1970. 347 с.
8. *Гробов В. А., Коцюба А. В.* Нестационарное пространственное движение летательного аппарата, входящего в атмосферу с гиперзвуковой скоростью.– Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 12, с. 71–79.
9. *Иващенко Б. П.* О движении симметричного волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью.– Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 9, с. 794–797.
10. *Гольдштейн Ю. М., Пеня В. Н.* К исследованию движения асимметричного твердого тела при произвольных углах нутации с использованием метода усреднения.– В кн.: Динамика и управление движением. Киев: Наук. думка, 1978, с. 43–48.
11. *Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Черноусько Ф. Л.* Возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 5, с. 771–778.
12. *Мархашов Л. М.* Об эволюции регулярных прецессий твердого тела, близкого к волчку Лагранжа.– Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 8–12.
13. *Аксененкова И. М.* Канонические переменные угол – действие в задаче о волчке Лагранжа.– Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1981, № 1, с. 86–90.
14. *Сергеев В. С.* Периодические движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, близкого к динамически симметричному.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 1, с. 163–166.
15. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
16. *Кошляков В. Н.* О некоторых частных случаях интегрирования динамических уравнений Эйлера, связанных с движением гироскопа в сопротивляющейся среде.– ПММ, 1953, т. 17, вып. 2, с. 137–148.
17. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

Москва, Одесса

Поступила в редакцию
8.IV.1985