

УДК 531.383

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННОСТИ ПОДВЕСА НА УХОДЫ НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА

КОМАРОВ В. Н., УРМАН Ю. М.

Устойчивое неконтактное вывешивание ротора гироскопа обеспечивается системой автоматического регулирования. Она преобразует сигнал, возникающий при смещении ротора от равновесного положения, в сигнал управления и изменяет в нужную сторону ток в поддерживающих электромагнитах или потенциалы электродов. При идеальной сферической форме сбалансированного ротора система автоматического регулирования откликается на поступательные смещения и нечувствительна к его угловым движениям. Однако при отклонении формы поверхности ротора от сферической выходной сигнал оказывается промодулированным так, что поддерживающие силы изменяются не только за счет поступательных, но и угловых движений ротора. Из-за инерционности системы автоматического регулирования выходной сигнал сдвинут по фазе относительно входного и силовое воздействие на ротор имеет наряду с консервативной и неконсервативную составляющие моментов. Автоподдержка поддерживающего поля, обусловленная вращением «несферического» ротора, приводит к появлению моментов, существенным образом влияющих на динамику гироскопа. Как и в частном случае вращения сферического несбалансированного ротора [4], возникают уводящие, а также тормозящие или раскручивающие моменты.

1. Рассмотрим два типа подвеса ротора. Подвес [2], содержащий несколько идентичных электромагнитных катушек, расположенных вокруг подвешиваемого тела. Каждая катушка питается от схемы, обеспечивающей возрастание тока в катушке (а следовательно, и развиваемое катушкой усилие) при удалении тела от катушки. В дальнейшем будем идеализировать электромагнитные катушки точечными магнитными источниками.

Как показано в [2], обобщенные силы, действующие на ротор гироскопа, определяются по формуле

$$Q_s = - \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \delta_i}{\partial q_s} \quad (1.1)$$

в которой f_i — усилие, развиваемое i -й катушкой, q_s — обобщенная координата, δ_i — зазор между поверхностью тела и i -й катушкой, который измеряется вдоль оси катушки по направлению к поверхности статора подвеса. Усилие f_i связано с зазором δ_i уравнением, описывающим переходные процессы в электрических цепях подвеса. При учете инерционности электрических цепей подвеса зависимость усилия f_i от зазора δ_i можно представить в виде

$$f_i(\delta_i) = f_0 + W(D_i)(\delta_i - \delta_0) \quad (1.2)$$

Здесь f_0 , δ_0 — растягивающее усилие катушки и зазор, когда ротор находится в центре подвеса и его форма поверхности представляет собой сферу, $W(D_i)$ — операторная жесткость — передаточная функция, связывающая изменение тягового усилия катушки с изменением зазора. Передаточная функция считается произвольной дробно-рациональной функцией от $D_i = d/dt$ и одинаковой для любой из катушек.

Подвес электростатического гироскопа, модель которого берется такой же, как и в [3]. Ротор гироскопа заключен в сферический вакуумированный кожух, на внутренней поверхности S которого имеется система электродов. Рассмотрим подвес, имеющий несколько электродов, представляющих собой сферические сегменты или пояса S_i поверхности сферы.

В подвесе электростатического гироскопа расстояние между ротором и электродами мало по сравнению с их линейными размерами, поэтому поле в зазоре между i -м электродом и ротором можно считать однородным

$$E_i = (u_i^e - u_p) / (R_i^e - r) \quad (1.3)$$

Здесь u_i^e — потенциал i -го электрода, u_p — потенциал ротора, R_i^e — радиус электрода, r — радиус ротора.

Учитывая, что $R_i^e - r = \delta_i = \delta_0 + (\delta_i - \delta_0)$, где δ_0 — зазор между электродом и невозмущенным по форме ротором, δ_i — зазор между i -м электродом и ротором, разложим (1.3) в ряд с точностью до линейного члена по δ_i :

$$E_i = (u_i^e - u_p) [1 - (\delta_i - \delta_0) / \delta_0] / \delta_0 \quad (1.4)$$

Будем считать каналы регулирования независимыми и идентичными и представим потенциалы электродов в виде

$$u_i^e = u_0 + \Phi(D_i) (\delta_i - \delta_0) / \delta_0 \quad (1.5)$$

где u_0 — опорный потенциал на электродах, $\Phi(D_i)$ — передаточная функция следящей системы.

Подставляя (1.5) в выражение для электрического поля (1.4), получим

$$E_i = \frac{u_0 - u_p}{\delta_0} \left(1 - \frac{\delta_i - \delta_0}{\delta_0} \right) + \Phi(D_i) \frac{\delta_i - \delta_0}{\delta_0} \quad (1.6)$$

С точностью до первого порядка по δ_i плотность поверхностной силы будет определяться выражением

$$f = \frac{1}{4\pi} E^2 = \frac{(u_0 - u_p)^2}{4\pi\delta_0^2} \left[1 - 2 \frac{\delta_i - \delta_0}{\delta_0} \right] + \frac{u_0 - u_p}{2\pi\delta_0^2} \Phi(D_i) \frac{\delta_i - \delta_0}{\delta_0} \quad (1.7)$$

Пренебрегая в квадратных скобках вторым членом по сравнению с единицей и обозначая $(u_0 - u_p)^2 / (4\pi\delta_0^2) = f_0$, $W(D_i) = (u_0 - u_p) \Phi(D_i) / (2\pi\delta_0^2)$, видим, что плотность поверхностных сил может быть представлена такой же формулой (1.2), как и в подвесе первого типа, что позволяет рассматривать их единым образом.

2. Зная плотность поверхностных сил, можно построить силовую функцию взаимодействия k -й гармоники формы ротора с полем подвеса.

Пусть поверхность близка к сферической, тогда ее аналитически можно представить в форме разложения в ряд по сферическим гармоникам.

$$r = R \left[1 + \sum_{k,m} \varepsilon_{km} * Y_{km}(\Omega) \right] \quad (2.1)$$

где R — радиус невозмущенной сферы, $Y_{km}(\Omega)$ — сферические функции, зависящие от сферических углов $\Omega = (\vartheta, \varphi)$, ε_{km} — компоненты неприводимого тензора ε_k формы тела, вычисленного в системе координат, связанной с телом. Если поверхность ротора обладает осевой симметрией, то тензор ε_k имеет одну компоненту ε_{k0} . Каждому индексу k отвечает определенная форма поверхности ротора; $k=2$ — эллипсоидальности, $k=3$ — грушевидности и т. д.

Силовая функция V_k взаимодействия k -й гармоники формы ротора с полем подвеса найдена в [4] и представляет собой скалярное произведение тензора формы ε_k с силовым тензором N_k :

$$V_k = R (\varepsilon_k N_k) = R \sum_{m=-k}^k N_{km} * \varepsilon_{km} \quad (2.2)$$

в котором компоненты силового тензора N_k имеют вид

$$N_{km} = \int_{S_i} f Y_{km}(\Omega) ds \quad (2.3)$$

а интегрирование идет по части поверхности S_i сферического ротора, находящейся под электродом.

Если источники поля точечные, то $f = \sum f_i \delta(\Omega - \Omega_i)$ ($i = \overline{1, n}$) и тогда

$$N_{km} = \sum_{i=1}^n f_i Y_{km}(\Omega_i) \quad (2.4)$$

Для описания движения ротора используем фазовые переменные $L, \rho, \sigma, \alpha, \beta, \gamma$ [5], определяющие величину кинетического момента L , его положение (ρ, σ) относительно трехгранника OX_i , связанного с подвесом, и углы Эйлера α, β, γ , задающие положение координатного трехгранника OZ_k , связанного с телом, относительно трехгранника OY_j , связанного с кинетическим моментом ($i, j, k = 1, 2, 3$).

При произвольных моментах инерции ротора A, B, C уравнения движения имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} L \cdot &= \partial V_k / \partial \alpha, \quad (L \cos \rho) \cdot = \partial V_k / \partial \sigma, \quad L \sigma \cdot \sin \rho = \partial V_k / \partial \rho \\ (L \cos \beta) \cdot &= L^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin^2 \beta \sin \gamma \cos \gamma + \left(\frac{\partial V_k}{\partial \gamma} - \cos \beta \frac{\partial V_k}{\partial \alpha} \right) \\ \gamma \cdot &= L \left(\frac{1}{C} - \frac{\cos^2 \gamma}{A} - \frac{\sin^2 \gamma}{B} \right) \cos \beta + \frac{1}{L \sin \beta} \frac{\partial V_k}{\partial \beta} \\ \alpha \cdot &= L \left(\frac{\cos^2 \gamma}{A} + \frac{\sin^2 \gamma}{B} \right) - \frac{1}{L} \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial V_k}{\partial \rho} - \frac{1}{L} \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial V_k}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где силовая функция V_k , выраженная через фазовые переменные, представляется формулой [4] (D_{ij}^{hk} — матрица конечных вращений [6]):

$$V_k = R \sum_m \sum_l \sum_n N_{km} * D_{ml}^{hk}(\sigma, \rho, 0) D_{ln}^{hk}(\alpha, \beta, \gamma) \epsilon_{kn} \quad (2.6)$$

Производные от силовой функции в (2.5) берутся при постоянном значении силового тензора N_k , затем в них подставляется выражение

$$N_{km} = f_0 \int_{S_i} Y_{km}(\Omega) ds + \sum_{q,p,r} D_{qp}^{hk}(\sigma, \rho, 0) W(D_i) D_{pr}^{hk}(\alpha, \beta, \gamma) \epsilon_{kr} \int_{S_i} Y_{km} * Y_{kp} ds \quad (2.7)$$

которое получается подстановкой (1.2) в (2.3) с учетом того, что $\delta_i - \delta_0 = = R \sum \epsilon_{km} * Y_{km}(\Omega)$, $m = \overline{-k, k}$, и преобразованием тензора ϵ_k в систему координат OX_i , связанную с подвесом.

3. Уравнения (2.5)–(2.7) представляют собой сложные нелинейные уравнения. Так как на практике в первую очередь обычно представляет интерес эволюция кинетического момента гироскопа, то естественно для анализа уравнений воспользоваться методом осреднения.

Далее будем считать ротор динамически симметричным ($A=B$), хотя форма его может быть произвольной. Полагая в (2.5) $V_k=0$, видим, что L, ρ, σ, β — медленные переменные, а $\gamma = \gamma_0 + \omega_1 t$, $\alpha = \alpha_0 + \omega_2 t$ — быстрые. Считая, что частоты собственного вращения ω_1 и нутации ω_2 не находятся в резонансном соотношении, проведем осреднение правых частей уравнений по быстрым переменным и получим уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных

$$L \cdot = iR \sum_{m,l,q} l D_{ml}^{hk}(\sigma, \rho, 0) D_{ql}^{hk}(\sigma, \rho, 0) Q_{hl} \int_{S_i} Y_{hq} Y_{km} * ds \quad (3.1)$$

$$(L \cos \rho) \cdot = iR f_0 P_k(\cos \beta) \epsilon_{k0} \sum_m m D_{m0}^{hk}(\sigma, \rho, 0) \int_{S_i} Y_{km} * ds +$$

$$\begin{aligned}
& +iR \sum_{m,l,q} m D_{ml}^{h*}(\sigma, \rho, 0) D_{ql}^h(\sigma, \rho, 0) Q_{hl} \int_{S_t} Y_{hq} Y_{km}^* ds \\
L \sin \rho \dot{\sigma} & = R f_0 P_k(\cos \beta) \varepsilon_{k0} \sum_m \frac{\partial}{\partial \rho} D_{m0}^{h*}(\sigma, \rho, 0) \int_{S_t} Y_{km}^* ds + \\
& + R \sum_{m,l,q} \frac{\partial}{\partial \rho} D_{ml}^{h*}(\sigma, \rho, 0) D_{ql}^h(\sigma, \rho, 0) Q_{hl} \int_{S_t} Y_{hq} Y_{km}^* ds \\
(L \cos \beta)^* & = iR \sum_{m,l,n,q} n D_{ml}^{h*}(\sigma, \rho, 0) D_{ql}^h(\sigma, \rho, 0) \times \\
& \times |\varepsilon_{kn} d_{ln}^h(\cos \beta)|^2 W[-i(l\omega_2 + n\omega_1)] \int_{S_t} Y_{hq} Y_{km}^* ds \\
Q_{hl} & = \sum_n |\varepsilon_{kn} d_{ln}^h(\cos \beta)|^2 W[-i(l\omega_2 + n\omega_1)], \quad Q_{hl}^* = Q_{h-l} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Если поверхность ротора обладает осью симметрии, совпадающей с динамической осью, то в (3.2) надо положить $n=0$, тогда

$$Q_{hl} = |\varepsilon_{k0} d_{l0}^h(\cos \beta)|^2 W(-il\omega_2) \quad (3.3)$$

Функции d_{mn}^h связаны с полиномами Якоби и определены в [6].

Анализ полученных уравнений показывает, что влияние инерционности подвеса выражается в торможении или в разгоне ротора при одновременном изменении амплитуды нутации и дополнительных уходах кинетического момента.

4. В приведенных выше уравнениях подвес не конкретизировался. Рассмотрим вначале подвес первого типа, считая его образованным N парами одинаковых катушек, расположенных эквидистантно ($\varphi_v = 2\pi v/N$, $v = 1 \dots N$) на двух кругах с широтами $\pm(1/2\pi - \theta)$, оси которых совпадают с осью OX_3 подвеса. Первые три уравнения (3.1) в этом случае принимают вид

$$L = 2iR^3 N \sum_{l,q} l |d_{ql}^h(\cos \rho) Y_{hq}(\theta)|^2 Q_{hl}, \quad (4.1)$$

$$(L \cos \rho)^* = 2iR^3 N \sum_{l,q} q |d_{ql}^h(\cos \rho) Y_{hq}(\theta)|^2 Q_{hl}$$

$$\begin{aligned}
L \sin \rho \dot{\sigma} & = R^3 f_0 \varepsilon_{k0} P_k(\cos \beta) [1 + (-1)^h] N P_k(\cos \theta) \frac{d}{d\rho} P_k(\cos \rho) + \\
& + \frac{1}{2} N R^3 \sum_{l,q} Q_{hl} |Y_{kl}(\theta)|^2 \frac{d}{d\rho} |d_{ql}^h(\cos \rho)|^2
\end{aligned}$$

Если ось динамической симметрии ротора совпадает с осью фигуры ($n=0$), то из последнего уравнения (3.1) следует интеграл сохранения проекции кинетического момента на ось симметрии ротора

$$L \cos \beta = H = \text{const} \quad (4.2)$$

Для анализа нутационных колебаний вместо первого уравнения (4.1) удобнее использовать уравнение для изменения угла нутации β . Дифференцируя (4.2) по времени и используя первое уравнение (4.1), имеем

$$\dot{\beta} = -|\varepsilon_{k0}|^2 \frac{2R^3 N \cos \beta}{L \sin \beta} \sum_{q=-h}^h \sum_{l=0}^h l \operatorname{Im} W(il\omega_2) |d_{ql}^h(\cos \rho) d_{l0}^h(\cos \beta) Y_{hq}(\theta)|^2 \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что скорость изменения угла нутации зависит от угла между кинетическим моментом и осью подвеса, углового положения кругов, на которых расположены катушки угла нутации, и мнимой части коэффициента операторной жесткости, зависящей от частоты свободной нутации.

Исследуем устойчивость нутационных колебаний в окрестности $\beta=0$. Для этого разложим правую часть (4.3) с точностью до линейных членов по β . Учитывая, что для малых β имеет место $d_{10}^k(\cos \beta) \approx -1/2\beta\sqrt{k(k+1)}\delta_{11}$, где δ_{11} — символ Кронекера, получаем

$$\beta^* = -\frac{R^3 N}{2L} k(k+1)\beta |\varepsilon_{k0}|^2 \operatorname{Im} W(i\omega_2) \sum_{q=-k}^k |d_{q1}^k(\cos \rho) Y_{kq}(\theta)|^2 \quad (4.4)$$

откуда условие асимптотической устойчивости нутационных колебаний получается в виде

$$\operatorname{Im} W(i\omega_2) > 0 \quad (4.5)$$

если $\sum |d_{q1}^k(\cos \rho) Y_{kq}(\theta)|^2 \neq 0, \quad q = -\overline{k, k}$.

Это условие не имеет места при $\rho=0$ и $Y_{k1}=0$. В этом случае условие асимптотической устойчивости имеет вид

$$\operatorname{Im} W(2i\omega_2) > 0 \quad (4.6)$$

Например, полагая в формуле (4.3) $\rho=0, k=2$, получим

$$\beta^* = -1/2 R^3 N L^{-1} \cos \beta \sin \beta |\varepsilon_{20}|^2 [\cos^2 \beta \cos^2 \theta \sin^2 \theta \operatorname{Im} W(i\omega_2) + 1/3 \sin^4 \beta \sin^4 \theta \operatorname{Im} W(2i\omega_2)] \quad (4.7)$$

При $\theta = 1/2\pi$ из (4.7) следует, что условие устойчивости нутационных колебаний имеет вид (4.6), что совпадает с условием, полученным в [7]. Аналогичные ситуации могут возникнуть для гармоник формы индексов $k > 2$, если катушки расположены на широте, определяемой уравнением $Y_{k1}(\theta) = 0$.

Для дальнейшего исследования представим уравнения (4.1) в векторном виде. Для этого примем во внимание два очевидных выражения

$$L\dot{e} = L\dot{L} - L\dot{e} \quad (4.8)$$

$$L\dot{L} = \frac{L - \cos \rho (L \cos \rho)}{\sin \rho} (e_1 \cos \sigma + e_2 \sin \sigma) + L \sin \rho (e_2 \cos \sigma - e_1 \sin \sigma) \dot{\sigma} + (L \cos \rho) \dot{e}_3 \quad (4.9)$$

Подставляя в (4.8) формулы (4.1) и учитывая (4.9), получим

$$L\dot{e} = 2R^3 N \sum_{q=-k}^k \sum_{l=0}^k \frac{q-l\gamma_3}{1-\gamma_3^2} (\gamma_3 e - e_3) \operatorname{Im} Q_{kl} \times \\ \times |d_{q1}^k(\gamma_3) Y_{kq}(\theta)|^2 + R^3 f_0 N [1 + (-1)^k] P_k(\cos \beta) P_k(\cos \theta) \times \\ \times [e \times e_3] \cdot \frac{dP_k(\gamma_3)}{d\gamma_3} + R^3 N \sum_{q=-k}^k \sum_{l=0}^k \operatorname{Re} Q_{kl} |Y_{kq}(\theta)|^2 [e \times e_3] \cdot \frac{d}{d\gamma_3} |d_{q1}^k(\gamma_3)|^2 \quad (4.10)$$

Здесь e_i ($i=1, 2, 3$) — орты координатного трехгранника OX_i , e — единичный вектор кинетического момента, $\gamma_i = (e \cdot e_i)$.

Воспользовавшись формулами, которые получаются при использовании рекуррентных соотношений, связывающих функции $d_{q\pm 1}^k$ и d_{q1}^k :

$$\frac{q-l\gamma_3}{1-\gamma_3^2} |d_{q1}^k(\gamma_3)|^2 = (-1)^{l-q+1} \prod_{j=0}^{2k} \frac{1}{Vj(j+1)} C_{k-q, kq}^{j0} \frac{dP_j(\gamma_3)}{d\gamma_3} \times \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \times (\sqrt{(k-l)(k+l+1)} C_{k-l,kl+1}^{j1} - \sqrt{(k+l)(k-l+1)} C_{k-l,kl-1}^{j-1}) \\ & \frac{d}{d\gamma_3} |d_{ql}^k(\gamma_3)|^2 = (-1)^{l-q+1} \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} C_{k-q,hq}^{j0} \frac{dP_j(\gamma_3)}{d\gamma_3} \times \quad (4.12) \\ & \times (\sqrt{(k-l)(k+l+1)} C_{k-l,kl+1}^{j0} + \sqrt{(k+l)(k-l+1)} C_{k-l,kl-1}^{j-1}). \end{aligned}$$

где $C_{km, kn}^{jp}$ — коэффициенты Клебша — Гордана [6], приведем уравнение (4.10) к виду

$$L\dot{e} = [e \times e_3] d\dot{u}_k / d\gamma_3 + [e \times e_3] \times e d\nu_k / d\gamma_3 \quad (4.13)$$

$$u_k = 2R^3 N \left[\varepsilon_{h0} P_h(\cos \beta) P_h(\gamma_3) P_h(\cos \vartheta) f_0 [1 + (-1)^k] + \sum_{j=1}^k A_{hj} P_{2j}(\gamma_3) \right] \quad (4.14)$$

$$v_k = 2R^3 N \sum_{j=1}^k B_{hj} P_{2j}(\gamma_3) \quad (4.15)$$

$$A_{hj} = \frac{1}{\sqrt{2j(2j+1)}} C_{h0,h0}^{2j0} P_{2j}(\cos \vartheta) \left[\sum_{l=0}^k (-1)^l \operatorname{Re} Q_{hl} \times \quad (4.16) \right.$$

$$\left. \times (\sqrt{(k-l)(k+l+1)} C_{k-l,kl+1}^{2j1} + \sqrt{(k+l)(k-l+1)} C_{k-l,kl-1}^{2j-1}) \right]$$

$$B_{hj} = \frac{1}{\sqrt{2j(2j+1)}} C_{h0,h0}^{2j0} P_{2j}(\cos \vartheta) \left[\sum_{l=0}^k (-1)^l \operatorname{Im} Q_{hl} \times \quad (4.17) \right.$$

$$\left. \times (\sqrt{(k-l)(k+l+1)} C_{k-l,kl+1}^{2j1} - \sqrt{(k+l)(k-l+1)} C_{k-l,kl-1}^{2j-1}) \right]$$

Добавляя к этим уравнениям первое и последнее уравнения системы (3.1), получим полную систему, описывающую эволюцию величины и положения вектора кинетического момента, а также угла нутации. Форма записи (4.13) удобна при переходе от осесимметричного подвеса к многоосевому.

Первый член в правой части уравнения (4.13) определяет угловую скорость прецессии кинетического момента вокруг оси OX_3 подвеса как при постоянных значениях источников тока, так и с учетом системы регулирования. Второй член учитывает влияние системы регулирования на радиальное движение кинетического момента.

Таким образом, в общем случае система автоматического регулирования нарушает консервативность взаимодействия ротора с полем подвеса, трансформируя замкнутые траектории кинетического момента в скручивающиеся или раскручивающиеся спирали.

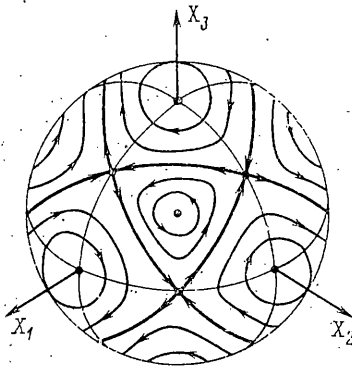
Для того, чтобы определить условие, когда при малых отклонениях происходит сближение вектора кинетического момента с осью подвеса, а когда, наоборот, уход от оси, умножим (4.13) на e_3 . Имеем

$$L\dot{\gamma}_3 = (1 - \gamma_3^2) d\nu_k / d\gamma_3 \quad (4.18)$$

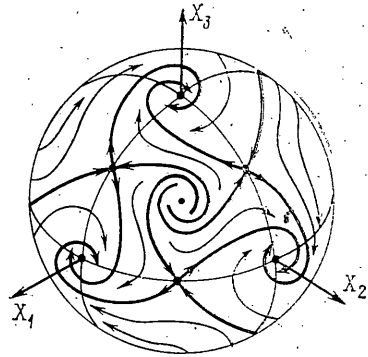
Расписывая (4.18) в вариациях, найдем, что если

$$d\nu_k / d\gamma_3 |_{\gamma_3=1} > 0 \quad (4.19)$$

то ось кинетического момента будет стремиться совпадать с осью подвеса, в противном случае она будет уходить от нее. Если создать условия, при которых $L\dot{\gamma}_3 = 0$, то уравнения (4.13) по форме совпадают с уравнениями [8], поэтому движение кинетического момента в этом случае имеет тот



Фиг. 1



Фиг. 2

же характер, что и в [8]. Возможны устойчивые и неустойчивые циклы (см. фигуры [8]).

5. Рассмотрим электростатический подвес, образованный тремя парами одинаковых электродов, оси которых совпадают с осями трехгранника OX_i . Считая все каналы независимыми, уравнения движения ротора в таком подвесе можно получить из уравнений (4.14). Имеем

$$\begin{aligned}
 L\dot{e} &= \sum_{i=1}^3 \{ [e \times e_i] du_h(\gamma_i)/d\gamma_i + [e \times e_i] \times e dv_h/d\gamma_i \} \\
 L &= -2R^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{q=-h}^h \sum_{l=0}^h l |d_{qi}^h(\gamma_i)|^2 \text{Im } Q_{hl} \int_{S_i} |Y_{hq}|^2 d\Omega \\
 (L \cos \beta) &= 2R^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{q=-h}^h \sum_{n=0}^h n |\varepsilon_{hn}|^2 \int_{S_i} |Y_{hq}|^2 d\Omega \times \\
 &\times |d_{qi}^h(\gamma_i)|^2 \{ |d_{ln}^h(\cos \beta)|^2 \text{Im } W[i(l\omega_1 + n\omega_2)] + \\
 &+ |d_{l-n}^h(\cos \beta)|^2 \text{Im } W[i(l\omega_1 - n\omega_2)] \}
 \end{aligned} \quad (5.1)$$

В этих формулах $u_h(\gamma_i)$ и $v_h(\gamma_i)$ имеют вид (4.14) и (4.15), но в выражениях (4.16) и (4.17) полином Лежандра $P_{2j}(\cos \theta)$ заменяется на

$$\frac{1}{N} \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_{2j}(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

где θ_1 и θ_2 — углы, характеризующие границы электродов.

Сразу отметим, что если в формулах (5.1) положить $k=1$, они переходят в уравнения движения несбалансированного ротора в изотропном регулируемом подвесе [1].

Рассмотрим случай несферичного осесимметричного ротора, у которого ось симметрии совпадает с осью фигур. Уравнения движения такого ротора в электростатическом подвесе приводятся к виду

$$\gamma_1 \dot{=} \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) A_{22} - \gamma_1 (\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4 - \gamma_1^2) B_{22}, \quad (1, 2, 3) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
 L &= -\frac{9}{20} R^3 \varepsilon_{20}^2 (1 - \Lambda) \left\{ 2(1 + \Lambda) (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{4} [3(1 + 7\Lambda) - \right. \\
 &\left. - 5(9\Lambda - 1) (\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4) \right] \int_{\theta_1}^{\theta_2} P_4(\cos \theta) \sin \theta d\theta \} \text{Im } W(L/\Lambda) \quad (\Lambda = H^2/L^2)
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$A_{22} = \frac{9}{16} L^{-1} \varepsilon_{20}^2 R^3 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_4(\cos \theta) \sin \theta d\theta \{4(3\Lambda - 1) \operatorname{Re} W(0) + (1 - \Lambda)(15\Lambda - 1) \operatorname{Re} W(L/A)\}$$

$$B_{22} = \frac{9}{16} L^{-1} \varepsilon_{20}^2 R^3 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_4(\cos \theta) \sin \theta d\theta (1 - \Lambda)(9\Lambda - 1) \operatorname{Im} W(L/A)$$

Уравнения (5.2) описывают движение по единичной сфере орта e кинетического момента, а уравнение (5.3) — изменение его величины. При этом коэффициент A_{22} характеризует консервативное воздействие на систему, а B_{22} — неконсервативное. Ограничим исследование рассмотрением лишь прецессионного движения кинетического момента, считая, что его величина поддерживается постоянной, например за счет некоторого момента системы подкрутки.

Видно, что с учетом геометрического интеграла движения $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ вне зависимости от величин A_{22} и B_{22} , не обращающихся одновременно в нуль, уравнения (5.2) имеют три группы состояний равновесия: $\gamma_k^2 = 1, \gamma_l = \gamma_m = 0$; $\gamma_k^2 = \gamma_l^2 = 1/2, \gamma_m^2 = 0$; $\gamma_k^2 = \gamma_l^2 = \gamma_m^2 = 1/3$, где индексы k, l, m принимают значения 1, 2, 3 и допускают циклическую перестановку.

При $B_{22} = 0$ состояния равновесия первой и третьей групп типа «центр», а второй — типа «седло». Их взаимное расположение и некоторые из траекторий приведены на фиг. 1.

Если при неконсервативном взаимодействии $B_{22} > 0$, то равновесные состояния первой группы обращаются в устойчивые фокусы, а третьей группы — в неустойчивые при $A_{22} \neq 0$ или становятся узлами при $A_{22} = 0$. Расположение траекторий на сфере для случая $A_{22} \neq 0, B_{22} > 0$ приведено на фиг. 2. Смена знака B_{22} меняет устойчивость фокусов, направление вращения вокруг которых определяется знаком A_{22} .

В реальных системах автоматического регулирования условие $B_{22} \neq 0$ выполняется в силу того, что для обеспечения асимптотической устойчивости ротора относительно подвеса передаточная функция $W(D_i)$ конструируется такой, что $\operatorname{Im} W(D_i) \neq 0$. Это приводит к тому, что автомодуляция поля подвеса при вращении несферического ротора вызывает появление неконсервативных моментов, влияющих как на величину кинетического момента гироскопа (торможение или раскрутка), так и на его прецессионную и нутационную устойчивость, что необходимо учитывать как при создании систем автоматического регулирования подвесов, так и при анализе долговременных траекторий высокоточных гироскопов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маргынченко Ю. Г. Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 4, с. 13–19.
2. Сорин В. М. Моменты, действующие на несферичное тело в электромагнитном подвесе. — Инж. ж. МТТ, 1968, № 2, с. 3–9.
3. Маргынченко Ю. Г. Уходы электростатического гироскопа, вызываемые несферичностью ротора. — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1, с. 10–18.
4. Денисов Г. Г., Урман Ю. М. Прецессионные движения твердого тела под действием моментов, имеющих силовую функцию. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 6, с. 5–14.
5. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
6. Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
7. Сорин В. М. Устойчивость ротора в электромагнитном подвесе с учетом инерционности электрических цепей. — Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1969, № 307, с. 46–53.
8. Денисов Г. Г., Комаров В. Н. Неконсервативные моменты и их влияние на прецессию неконтактного гироскопа. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3, с. 15–23.

Горький

Поступила в редакцию
18.VI.1985.