УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛЕНКИ

СОКОЛОВ Б. Н.

Рассматривается задача оптимизации формы поверхности растянутой анизотропной пленки. Управлением является величина прогиба пленки на границе заданной области. Предполагается, что на краю пленки заданы растягивающие усилия, а на ее поверхность действуют распределенные силы. В качестве критерия оптимальности выбирается величина среднеквадратичного отклонения поверхности пленки от заданной (например, параболоида вращения). Величины прогиба считаются малыми по сравнению с характерным размером области. При сделанных предположениях прогиб пленки описывается самосопряженным эллиптическим уравнением с переменными коэффициентами. Оптимальная поверхность построена градиентным методом. Приведены результаты расчетов. Вопросы выбора оптимальных распределенных сил с целью придания слабоискривленной пластинке требуемой формы рассматривались ранее в [1]. Там же даны некоторые дополнительные ссылки.

1. В области Ω рассмотрим анизотропную пленку (кусок материи), находящуюся в равновесии под действием сил, растягивающих ее край и распределенных по ее поверхности.

Обозначим через N_x, N_y, T силы натяжения пленки и сдвиговые силы, отнесенные к единице длины. Величины N_x, N_y и T связаны уравнениями равновесия [2]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

В результате прогибов $v(x, y)$, заданных на границе Γ области Ω, и действия распределенных сил $q(x, y)$, заданных в Ω, пленка отклонится от нейтрального положения. Если отклонение пленки мало по сравнению с характерным размером области Ω, то величина отклонения описывается самосопряженным эллиптическим уравнением [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(N_xu_x+Tu_y)+\frac{\partial}{\partial y}(N_yu_y+Tu_x)=-q \tag{1.2}$$

Величины N_x, N_y и T предполагаются известными. Они могут быть найдены из решения соответствующей плоской задачи теории упругости. Требуется выбором граничного смещения $u(x, y)|_\Gamma=v(x, y)$ обеспечить минимум квадратичного функционала ($\varphi(x, y)$ – заданная функция)

$$\Phi(v(\ldots))=\iint\limits_\Omega (u(x,y)-\varphi(x,y))^2\,dx\,dy \tag{1.3}$$

2. Методом множителей Лагранжа получим необходимые условия оптимальности в задаче (1.2), (1.3). Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x,y)=\iint\limits_\Omega\left\{(\varphi-u)^2+p\left[\frac{\partial}{\partial x}(N_xu_x+Tu_y)+\frac{\partial}{\partial y}(N_yu_y+Tu_x)\right]\right\}dx\,dy \tag{2.1}$$

Здесь $p(x, y)$ – множитель Лагранжа. Потребуем, чтобы $p(x, y)|_\Gamma=0$. Вариация по u функции Лагранжа (2.1) дает

$$\delta L=\iint\limits_\Omega\left\{2(u-\varphi)\delta u+p\left[\frac{\partial}{\partial x}(N_x\delta u_x+T\delta u_y)+\frac{\partial}{\partial y}(N_y\delta u_y+T\delta u_x)\right]\right\}dx\,dy$$

Проинтегрируем выражение, стоящее справа, по частям и воспользуемся граничными условиями для p:

$$\iint\limits_\Omega\left\{2(u-\varphi)+\frac{\partial}{\partial x}(N_xp_x+Tp_y)+\frac{\partial}{\partial y}(N_yp_y+Tp_x)\right\}\delta u\,dx\,dy-$$

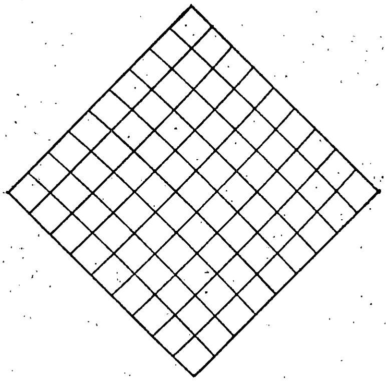
$$-\int\limits_\Gamma[(N_xp_x+Tp_y)\cos n_x+(N_yp_y+Tp_x)\sin n_x]\delta u\,ds$$

Потребуем, чтобы p удовлетворяло уравнению

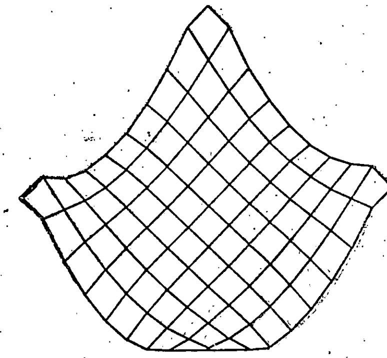
$$2(u-\varphi)+\frac{\partial}{\partial x}(N_xp_x+Tp_y)+\frac{\partial}{\partial y}(N_yp_y+Tp_x)=0 \tag{2.2}$$

Тогда вариация функционала $\delta\Phi(v)$, равная δL при условии, что u тождественно обращает в нуль выражение в квадратных скобках в (2.1), определяется формулой

$$\delta\Phi(v)=-\int\limits_\Gamma[(N_xp_x+Tp_y)\cos n_x+(N_yp_y+Tp_x)\sin n_x]\delta u\,ds$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Отсюда получаем, что вариация $\delta v = \delta u|_\Gamma$, ведущая к уменьшению функционала (1.3), определяется соотношением (k=const>0)

$$\delta u|_\Gamma = k[(N_x p_x + T p_y)\cos n_x + (N_y p_y + T p_x)\sin n_x] \qquad (2.3)$$

3. Для оптимизации функционала (1.3) использовалась простейшая градиентная схема, базирующаяся на формулах (1.2), (2.2) и (2.3). Для решения уравнений (1.2) и (2.2) использовалась консервативная семиточечная разностная схема, приведенная в [3]. Симметрическая положительно-определенная матрица соответствующего разностного оператора обращалась стандартной программой, реализующей метод Холесского [4]. Уравнение (1.2) самосопряженное, а разностная схема консервативна, поэтому для численного нахождения решений уравнений (1.2) и (2.2) с различными граничными условиями и правыми частями эту матрицу достаточно обратить один раз. Эти обстоятельства сильно упрощают численную реализацию следующего алгоритма поиска оптимальной формы пленки: а) решаем уравнение (1.2) с некоторым начальным значением $u=v_0$ на границе Г; б) решаем сопряженную систему (2.2) при $p=0$ на границе; в) вычисляем δu на границе по формуле (2.3); г) рассматриваем $u_1|_\Gamma = u_0|_\Gamma + k\delta u|_\Gamma = v_0 + k\delta v$, вычисляем соответствующее u_1 во всей области Ω и определяем значение функционала (1.3); д) если значение функционала не уменьшается, то дробим шаг k (2.3) до тех пор, пока не будет выполнено $\Phi(v_1) < \Phi(v_0)$, затем переходим к шагу б) алгоритма и т. д. Процесс считается оконченным, если уменьшение функционала на некотором шаге, либо величина шага k становятся меньше заданного числа.

В качестве примера рассмотрим пленку, заданную на квадрате 10×10. На пленку действуют распределенные силы $q(x, y)$ единичной интенсивности, выгибающие пленку вниз. Интенсивность растягивающих усилий по краям пленки постоянна и равна единице, так что $N_x = N_y = 1$, $T=0$ в (1.1). Начальный прогиб v_0 пленки на границе квадрата был выбран постоянным и равным единице. Прогиб пленки в области рассчитывался численно, форма соответствующей поверхности в изометрической проекции изображена на фиг. 1.

Пусть теперь задан параболоид $\varphi(x, y) = [(x-5)^2 + (y-5)^2]/50$ и требуется выбором граничного прогиба пленки минимизировать среднеквадратичное отклонение пленки от поверхности параболоида.

На фиг. 2 изображена оптимальная форма поверхности пленки, рассчитанная с помощью приведенного в начале пункта градиентного метода. В процессе оптимизации величина среднеквадратичной невязки (1.3) уменьшилась с 0,448 до 0,020. Этот результат был достигнут за шесть шагов. Величина начального шага k в (2.3) выбиралась равной единице. К концу итераций в результате дроблений шаг уменьшался до $0{,}24 \cdot 10^{-3}$. Время работы процессора машины ЕС-1055 при расчете оптимальной формы на сетке 10×10 составляло около 5 с.

Автор благодарит Н. В. Баничука, обратившего внимание автора на задачи, связанные с оптимизацией формы поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Banichuk N. V., Larichev A. D.* Optimal design problems for curvilinear shallow elements of structures.– Optimal contr., Appl. and methods, 1984, v. 5, No. 3, p. 197–205.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
3. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
4. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. М.: Мир, 1984. 333 с.

Москва

Поступила в редакцию 7.II.1986