МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1986

УДК 539.3

ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

МИЛЬШТЕЙН Е. М. [1]

Рассматривается задача об изгибе круглых осесимметрически нагруженных пластинок, которая приводится к решению дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, аналогичного уравнению Стодолы для вращающегося диска [1]. Уравнение имеет решение в конечном виде для дисков гиперболических профилей. Для расчета дисков других профилей разработаны всевозможные приближенные методы [2]. Для некоторых профилей имеются точные решения в рядах; например, задача о вращающемся коническом диске разобрана в [3]. Для профилей вида $h=h_0 \exp(-\beta r^n)$ (h – толщина пластинки, r – радиус) уравнение приводится к вырожденному гипергеометрическому. Задача об изгибе таких пластинок рассмотрена в [4].

В публикуемой работе получено общее выражение для семейства профилей, для которых уравнение приводится к гипергеометрическому. В качестве примера решена задача об изгибе пластинки с линейной жесткостью.

1. Рассмотрим равновесие элементарного объёма, вырезанного двумя близкими радиальными и тангенциальными сечениями, условия равновесия которого запишутся так:

$$\frac{d}{dr}(rQ)+pr=0, \qquad \frac{d}{dr}M_r+\frac{M_r-M_t}{r}-Q=0 \tag{1}$$

Здесь $p=p(r)$ — интенсивность внешней нагрузки на единице площади срединной плоскости, Q, M_r, M_t — перерезывающая сила и изгибающие моменты, отнесённые к единице длины контура сечения (фиг. 1);

$$M_r=-D\left(\varphi'+\frac{\nu}{r}\varphi\right), \quad M_t=-D\left(\nu\varphi'+\frac{1}{r}\varphi\right), \quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2}$$

$\varphi=w'$, w — прогиб срединной плоскости, ν — коэффициент Пуассона.

Подставляя (2) в уравнение (1), получим

$$Dr^2\varphi''+(D+rD')r\varphi'+(\nu rD'-D)\varphi=-r^2Q \tag{3}$$

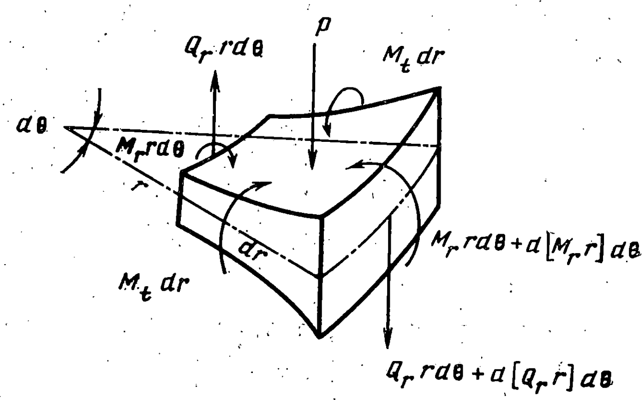
$$Q=-\frac{1}{r}\int_0^r pr\,dr-\frac{c_0}{r} \tag{4}$$

Для сплошной пластинки $c_0={}^1/_2R/\pi$, R — сосредоточенная сила в начале координат, для кольцеобразной пластинки c_0 — произвольная постоянная.

Найдём общее выражение для жёсткости семейства профилей, чтобы однородное уравнение в (3) можно было свести к гипергеометрическому

$$(1-t)t^2\frac{d^2u}{dt^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta-1)t\}t\frac{du}{dt}-\alpha\beta u=0 \tag{5}$$

[1] Ефим Моисеевич Мильштейн родился в 1916 году. В 1940 году окончил механико-математический факультет МГУ, после чего был принят в аспирантуру по специальности «теория упругости». Настоящая рукопись была представлена им в качестве дипломной работы и готовилась к печати. В начале июля 1941 года Е. М. Мильштейн вступил в ряды Народного ополчения и погиб в начале октября 1941 года в районе г. Вязьмы. Его рукопись была недавно обнаружена и, поскольку она не утратила научного значения, была направлена в редакцию для опубликования. Эта публикация рукописи – дань памяти погибшему молодому ученому.



Фиг. 1

Для решения поставленной задачи в уравнении (5) сделаем преобразования $u=t^p\varphi$, $t=\lambda r^k$ (λ, p, k — постоянные). Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k\left(2p-2+\frac{1}{k}+\alpha+\beta+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{1-t}\right)r\frac{d\varphi}{dt}+ \qquad (6)$$

$$+k^2\left[p(p-2+\alpha+\beta)+\frac{p(\gamma-\alpha-\beta+1)-\alpha\beta)}{1-t}\right]\varphi=0 .$$

Потребуем теперь тождественного совпадения уравнения (6) с однородным уравнением (3). В результате получим соотношения

$$\nu k(2p-2+\alpha+\beta)=1+k^2p(p-2+\alpha+\beta) \qquad (7)$$

$$\nu(\gamma-\alpha-\beta+1)=k[p(\gamma-\alpha-\beta+1)-\alpha\beta] \quad (k\neq 0)$$

$$dD/Ddt=m/t+n/(1-t) \qquad (8)$$

Из (7) получим

$$m=2p-1+\gamma, \quad u=\alpha+\beta-1-\gamma$$

$$\alpha+\beta=m+n-2(p-1), \quad \alpha\beta=(\nu/k-p)n, \quad \gamma=m+1-2p \qquad (9)$$

$$k(\nu-kp)(m+n)=1-k^2p^2 \qquad (10)$$

Интегрируя уравнение (8) и подставляя $t=\lambda r^k$ будем иметь

$$D=D_0r^{km}(1+\lambda r^k)^n \qquad (11)$$

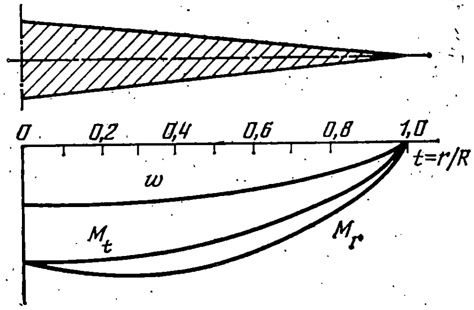
Таков общий вид трёхпараметрического (k, m, n — параметры) семейства жёсткостей, для которых уравнение (3) сводится к гипергеометрическому. Полагая в (11) $m=0$, $b=-\lambda n$, при $n\to\infty$ получим $D=D_0\exp(br^k)$. Задача об изгибе пластинки с такой жесткостью разобрана в [4].

Для сплошной пластинки надо положить $m=0$, т. е. имеется только двухпараметрическое семейство профилей, регулярных и необращающихся в нуль в начале координат, уравнение (3) для которых сводится к гипергеометрическому.

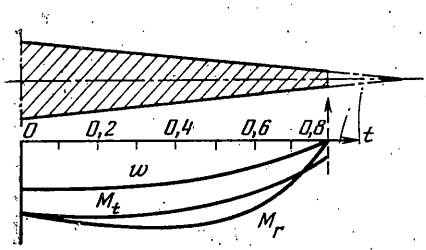
Для жёсткости, изменяющейся по линейному закону (фиг. 2), надо положить $n=k=1$. Такой жёсткостью хорошо аппроксимируется (в среднем) жёсткость конической пластинки, изгиб которой под действием равномерной нагрузки рассмотрен ниже.

В уравнении равновесия (3) необходимо положить $D=D_0(1-\lambda r/a)$, $p=p_0$, $c_0=0$, где a — внешний радиус пластинки, $a/\lambda=R$ — расстояние от оси вращения до заострённого конца. Тогда уравнение (3) примет вид

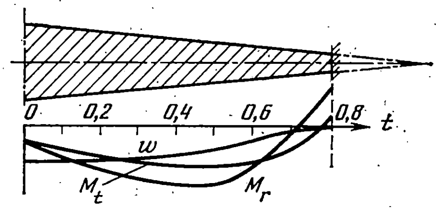
$$\left(1-\lambda\frac{r}{a}\right)r^2\varphi''+\left(1-2\lambda\frac{r}{a}\right)r\varphi'-\left[1+(1+\nu)\lambda\frac{r}{a}\right]\varphi=\frac{p_0r^3}{2D_0}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Решение однородного уравнения, регулярное в начале координат, выразится через гипергеометрическую функцию $\varphi_1=rF(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ \lambda r/a)$, где постоянные α, β и γ определяются из (9) при $m=0$, $n=k=1$. Частным решением неоднородного уравнения будет

$$\varphi_0=-\frac{p_0R^3}{2D_0(\nu+7)}\left(\frac{3}{\nu+3}\frac{r}{R}+\frac{r^2}{R^2}\right)$$

В общем решении $\varphi=\varphi_0+c_1\varphi_1$ для простирающейся до заострённого конца пластинки постоянную c_1 надо положить равной нулю, так как φ_1 при $r=R$ обращается в бесконечность. Для такой пластинки решение φ_0 и будет общим решением; оно удовлетворяет граничным условиям $w(R)=0$, $M_r(R)=0$, т. е. условиям свободного опирания. Если внешний радиус пластинки не равен R, то постоянная c_1 будет отличной от нуля и определяться из граничных условий.

2. Умножим левую и правую части уравнения (3) на некоторую функцию $\psi(r)$ и потребуем, чтобы левая часть нового уравнения была полной производной. В результате получим уравнение для ψ:

$$Dr^2\psi''+(3D+rD')r\psi'+(1+\nu)D'r\psi=0 \tag{12}$$

Рассмотрим два примера нахождения функции ψ для профилей, применённых в (5) при расчёте вращающихся дисков [5]. Первому профилю в (5) соответствует жесткость $D=D_0\exp(-\beta r^{1+\nu})$. Как можно проверить непосредственной подстановкой, функция $\psi=r^{-2}\exp(\beta r^{1+\nu})$ удовлетворяет тогда уравнению (12). Второй профиль в (5) имеет жёсткость $D=D_0\exp(-\beta r^{1-\nu})$. Тогда уравнению (12) удовлетворяет функция $\psi=(1+(1-\nu)pr^{1-\nu}/(1+\nu))/r^2$.

В общем случае задача нахождения функции ψ из уравнения (12) эквивалентна задаче решения уравнения (3), но если идти обратным путём, т. е. задавать какую-нибудь функцию ψ, а уравнение (12) считать уравнением, определяющим профиль пластинки, то для таких профилей решение уравнения (3) будет выражено в квадратурах.

Из уравнения (12) находим

$$D=D_0\exp\left(-\int\frac{3\psi'+r\psi''}{(1+\nu)\psi+r\psi'}\,dr\right)$$

и в этом случае уравнение (3) записывается в виде

$$\frac{d}{dr}[Dr^2\psi\varphi' - (Dr^2\psi' + rD\psi)\varphi] = -r^2Q\psi .$$

Интегрируя это уравнение один раз, получим линейное уравнение первого порядка, общее решение которого можно записать в квадратурах

$$\varphi = r\psi\left[c_2 + \int\left(c_1 - \int r^2Q\psi\,dr\right)\frac{dr}{Dr^3\psi}\right]$$

Интегрируя ещё раз, получим выражение для прогиба w ($w'=\varphi$). Задаваясь различными функциями $\psi(r)$, можно получить разные профили и сразу же решения для этих профилей (фиг. 3, 4).

Поставим обратную задачу: подобрать профиль пластинки так, чтобы величины, характеризующие напряжённое состояние в пластинке, удовлетворяли наперёд заданному соотношению. В качестве примера найдём профиль пластинки, удовлетворяющий условию $M_r=\mathrm{const}$. Соответствующее соотношение примет вид $-D(\varphi'+\nu\varphi/r)=k^2$. Из этого уравнения определим φ, и после подстановки φ в уравнение (3) последнее запишется в виде

$$D(1-\nu^2)\left[c-k^2\int\frac{r^\nu}{D}dr\right]=[r^2Q-k^2(1-\nu)r]r^\nu$$

Разделим левую и правую части этого уравнения на $D(1-\nu^2)$ и продифференцируем один раз. Производя необходимые сокращения, получим уравнение, решение которого имеет вид

$$D=D_0\exp\int\frac{rQ'+(2+\nu)Q}{rQ-k^2(1-\nu)}dr$$

Пусть $p=p_0=\mathrm{const}$. Тогда $Q=-p_0r/2$ и $D=D_0[1+p_0r^2/2k^2(1-\nu)]^{1/2(3+\nu)}$. Это и есть жёсткость равномоментного профиля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Föppl L.* Über eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte.— Z. angew. Math. und Mech., 1922, B. 2, H. 2, S. 92–96.
2. *Тумаркин С. А.* Методы расчета напряжений во вращающихся дисках.— Тр. ЦАГИ, 1936, вып. 262. 42 с.
3. *Honegger E.* Festigkeitberechnung von rotierenden konischen Scheiben.— Z. angew. Math. und Mech., 1927, B. 7, H. 2, S. 120–128.
4. *Olsson R. G.* Biegung kreisförmiger Platten von radial veränderlicher Dicke.— Ing.-Arch., 1937, B. 8, H. 2, S. 81–98.
5. *Malkin I.* Design and calculation of steam-turbine disk wheels.— Techn. Paper ASME, 1934. 585 p.

Москва

Поступила в редакцию
29.IV.1985