МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1986

УДК 539.3

О ПРИМЕНИМОСТИ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ К ТЕОРИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

РОГАЧЕВА Н. Н.

Сформулированы в принятом в механике виде общие теоремы электроупругости: теоремы Клапейрона, взаимности работ и единственности решения. Асимптотическим методом проведено сведение трехмерного уравнения энергии к двумерному. Показано, что в случаях, когда электроупругое состояние пьезокерамической оболочки описывается неклассической теорией с неклассическими граничными условиями, уравнение энергии в исходном приближении содержит только погранслой, для которого выполняются общие теоремы электроупругости. Для электроупругих состояний, описываемых классическими теориями, в уравнении энергии можно с некоторой погрешностью пренебречь погранслоем, при этом для внутреннего электроупругого состояния, построенного с той же погрешностью, выполняются общие теоремы. Выяснено, что для оболочек, имеющих хотя бы один свободный край, уточненная теория оболочек (учитывающая влияние погранслоя на внутреннее электроупругое состояние через граничные условия теории оболочек), вообще говоря, не удовлетворяет теореме единственности. Однако единственность решения можно обеспечить, если наложить на решение некоторые разумные ограничения.

1. Рассмотрим пьезокерамическое тело объема V, ограниченное поверхностью S, отнесенное к координатам x^ρ (здесь и дальше греческие индексы принимают значения 1, 2, 3, а латинские — 1, 2). Для простоты ограничимся статикой.

Выпишем уравнение энергии [1]:

$$B=\int\limits_V A\,dV,\quad B=\int\limits_V q_\rho u^\rho\,dV+\int\limits_S(\sigma^{\rho\mu}n_\rho u_\mu-\varphi n_\rho D^\rho)\,dS \tag{1.1}$$

$$A=\sigma^{\rho\mu}e_{\rho\mu}+E_\rho D^\rho,\quad e_{\rho\mu}={}^1/_2(\nabla_\rho u_\mu+\nabla_\mu u_\rho)$$

В (1.1) q_ρ — компоненты вектора объемных сил, u^ρ — компоненты вектора перемещений, $\sigma^{\rho\mu}$ — тензор напряжений, φ — электрический потенциал, D^ρ — компоненты вектора электрической индукции, dV — элемент объема тела, dS — элемент площади поверхности, ограничивающей тело. Элементы тензора n_k определяются из векторного соотношения $\mathbf{n}=n_\rho\mathbf{e}^\rho$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, $\mathbf{e}^\rho$ — базисные векторы.

Введем электроупругий потенциал $W=(\sigma^{\rho\mu}e_{\rho\mu}+E_\rho D^\rho)/2$. Из последней формулы (1.1) следует, что имеет место обобщенная теорема Клапейрона

$$B/2=\int\limits_V W\,dV$$

Выпишем уравнения состояния в ортогональных координатах для пьезокерамики, предварительно поляризованной вдоль x_3-линий [2]

$$e_{ii}=s_{11}{}^E\sigma_{ii}+s_{12}{}^E\sigma_{jj}+s_{13}{}^E\sigma_{33}+d_{31}E_3 \tag{1.2}$$

$$e_{33}=s_{13}{}^E(\sigma_{11}+\sigma_{22})+s_{33}{}^E\sigma_{33}+d_{33}E_3$$

$$2e_{ij}=s_{66}{}^E\sigma_{ij},\quad 2e_{i3}=s_{44}{}^E\sigma_{i3}+d_{15}E_i$$

$$D_i=\varepsilon_{11}{}^TE_i+d_{15}\sigma_{i3},\quad D_3=\varepsilon_{33}{}^TE_3+d_{31}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+d_{33}E_3$$

Из соотношений (1.2) вытекает равенство, представляющее собой обобщение теоремы взаимности работ

$$\sigma_{\rho\mu}^{(1)} e^{\rho\mu(2)} + E_\rho^{(1)} D^{\rho(2)} = \sigma_{\rho\mu}^{(2)} e^{\rho\mu(1)} + E_\rho^{(2)} D^{\rho(1)}$$

Здесь считается, что тело может находиться в двух различных электроупругих состояниях, порожденных двумя системами внешних сил; верхние индексы в скобках означают принадлежность искомых величин к первому или второму электроупругому состоянию соответственно.

Теорема единственности в электроупругости при соответствующим образом выбранных граничных условиях будет выполняться, если подынтегральное выражение A в (1.1) положительно. Чтобы показать это, преобразуем подынтегральное выражение с учетом (1.2). В результате получим следующую положительно-определенную форму:

$$\begin{gathered} A=a[(1+2\nu_1)(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2+(1-2\nu_1)(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(1+2\nu_2)(\sigma_{11}+\sigma_{33})^2+ \\ +(1-2\nu_2)(\sigma_{11}-\sigma_{33}^{\vee})^2+(1+2\nu_2)(\sigma_{22}+\sigma_{33}^{\vee})^2-(1-2\nu_2)(\sigma_{22}-\sigma_{33}^{\vee})^2]/4+ \\ +e(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)+s_{66}^E\sigma_{12}^2+(D_1^2+D_2^2)/\varepsilon_{11}^T+D_3^2/\varepsilon_{33}^T \qquad (1.3) \\ a=s_{11}^E-d_{31}^2/\varepsilon_{33}^T, \quad b=s_{12}^E-d_{31}^2/\varepsilon_{33}^T, \quad c=s_{13}^E-d_{31}d_{33}/\varepsilon_{33}^T \\ d=s_{33}^E-d_{33}^2/\varepsilon_{33}^T, \quad e=s_{44}^E-d_{15}^2/\varepsilon_{11}^T, \quad \nu_1=b/a \\ \nu_2=c/\sqrt{ad}, \quad \sigma_{33}^{\vee}=\sqrt{d/a}\,\sigma_{33} \end{gathered}$$

Постоянные множители перед заключенными в круглые скобки искомыми величинами в формуле (1.3) — положительные числа, их значения можно вычислить воспользовавшись физическими постоянными, приведенными, например, в [2].

Выполнение общих теорем обеспечивает возможность применения вариационных подходов к решению задач электроупругости. Нетрудно показать, что имеющие место в теории упругости вариационные принципы и экстремальные оценки [3] можно обобщить на электроупругость. Здесь и дальше для краткости ограничимся только исследованием выполнимости теорем Клапейрона, взаимности работ и единственности.

2. Для сведения трехмерного уравнения энергии (1.1) к двумерному, воспользуемся асимптотическим методом. Следуя [4], представим полное электроупругое состояние в виде суммы внутреннего электроупругого состояния, описываемого теорией электроупругих оболочек, и электроупругого погранслоя, возникающего вблизи линий искажения, например у краев. Теории пьезокерамических оболочек в зависимости от направлений предварительной поляризации, электрических и механических условий на поверхностях, ограничивающих оболочку, можно условно подразделить на два следующих типа: неклассические теории, для которых либо гипотезы качественно отличаются от гипотез типа Кирхгофа — Лява, обобщенных на электроупругость, либо в традиционные граничные условия теории оболочек входят поправочные члены погранслоя, соизмеримые с главными членами [5]; классические теории пьезокерамических оболочек, для которых можно сформулировать гипотезы типа Кирхгофа — Лява, обобщенные на электроупругость. Известно [5—8], что в этом случае полный расчет электроупругого состояния состоит из двух этапов: на первом выполняется расчет по двумерной теории, на втором, если возникает необходимость, выполняется расчет по теории погранслоя.

Рассмотрим выполнение общих теорем на примерах, относящихся к упомянутым типам теорий.

Пусть оболочка с предварительной поляризацией вдоль α_2-линий с полностью электродированными лицевыми поверхностями имеет один жестко заделанный край. Как показано в [5], электроупругое состояние такой оболочки описывается теорией, качественно отличающейся от классической теории: для нее непригодны гипотезы Кирхгофа — Лява, в граничные условия теории оболочек входят члены, соизмеримые с главными членами и определяемые из решения задач погранслоя.

Отнесем оболочку к триортогональной системе координат α_i, γ, где α_i-линии совпадают с линиями кривизны срединной поверхности, а γ-линии им ортогональны $(-h\leqslant\gamma\leqslant h)$.

Будем считать, что на электродированных лицевых поверхностях задан электрический потенциал, а механическая поверхностная нагрузка отсутствует:

$$\varphi|_{\gamma=\pm h}=\pm V, \quad \sigma_{i3}|_{\gamma=\pm h}=0, \quad \sigma_{33}|_{\gamma=\pm h}=0 \tag{2.1}$$

Выполним растяжение масштаба по координатным линиям таким образом, чтобы дифференцирование и интегрирование по вновь введенным безразмерным переменным не приводило к существенному увеличению или уменьшению искомых функций. Для внутреннего электроупругого состояния растяжение масштаба выполняется по формулам

$$\alpha_i=\eta^t R\xi_i, \quad \gamma=\eta^1 R\zeta \tag{2.2}$$

Для погранслоя у края $\alpha_1=\mathrm{const}$ введем безразмерные переменные [4]:

$$\alpha_1=\eta^1 R\xi_1, \quad \alpha_2=\eta^t R\xi_2, \quad \gamma=\eta^1 R\zeta \tag{2.3}$$

Здесь R — характерный размер оболочки, η — относительная полутолщина, t — показатель изменяемости внутреннего электроупругого состояния.

В соответствии с (2.2), (2.3) элемент длины краевой линии на срединной поверхности dl, элемент площади поверхности края dS_e, элемент площади срединной поверхности dS, элемент объема dV можно выразить через безразмерные величины со звездочками вверху для внутреннего электроупругого состояния

$$dl=\eta^t R dl^*, \quad dS_e=\eta^{1+t}R^2 dS_e^*, \quad dS=\eta^{2t}R^2 dS^*, \quad dV=\eta^{1+2t}R^3 dV^* \tag{2.4}$$

и со звездочками внизу для погранслоя

$$dl=\eta^t R dl_*, \quad dS_e=\eta^{1+t} dS_{e*}, \quad dS_f{}^{\pm}=\eta^{1+t}R^2 dS_*{}^{\pm}, \quad dV=\eta^{2+t}R^3 dV_* \tag{2.5}$$

Здесь $dS_f{}^+$, $dS_f{}^-$ — элемент площади верхней и нижней лицевой поверхности соответственно.

Каждую из искомых величин, как это делается в асимптотическом методе, запишем в виде суммы соответствующих величин внутреннего электроупругого состояния, плоского и антиплоского погранслоев

$$P=\eta^s\left(\sum_{i=0}^{n}\eta^{k_i}\zeta^i \overset{\mathrm{in}}{P}_{,i}+\eta^{2-2t}P^{\mathrm{in}}\right)+\eta^{r+\alpha+j}P^a+\eta^{q+\beta+j}P^b \tag{2.6}$$

Здесь под P подразумевается любая из искомых величин, индексы in, a, b означают принадлежность данной величины к внутреннему электроупругому состоянию, антиплоскому или плоскому погранслою соответственно.

Для рассматриваемого конкретного примера числа s, k_i, r, q принимают следующие значения (из них выпишем только главные члены, которые потребуются в дальнейшем) [5, 8]:

$$s=0, \quad k_i=0 \quad \text{для} \quad \overset{\mathrm{in}}{u}_{2,1}, \overset{\mathrm{in}}{\varphi}_{,1}$$

$$s=-1, \quad k_i=0 \quad \text{для} \quad \overset{\mathrm{in}}{E}_{3,0}, \overset{\mathrm{in}}{D}_{3,0}, \overset{\mathrm{in}}{e}_{23,0} \tag{2.7}$$

$$r=0, \; q=1-t \; \text{для} \; u_2, e_{12}, e_{23}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, E_1, E_3, D_1$$

$$r=1+t, \quad q=2 \quad \text{для} \quad e_{22} \tag{2.8}$$

$r=1-t$, $q=0$ для остальных величин, $j=1$ для перемещений, $j=0$ для остальных величин.

Числа α и β в формулах (2.6) выбираются в зависимости от граничных условий на краю оболочки. Как показано в [8], на жестко заделанном краю $\alpha_1=\mathrm{const}$ следует положить $\alpha=-1$, $\beta=-t$.

Подставим разложения (2.6) с учетом (2.7), (2.8) в трехмерное уравнение энергии (1.1), выполним замену переменных по формулам (2.2) —

(2.5). В результате для оболочки, поляризованной вдоль α_2-линий, с электродированными лицевыми поверхностями, на которых заданы условия (2.1), с одним жестко заделанным краем $\alpha_1=\text{const}$, задаваясь точностью до величин порядка η^{1-t}, получим приближенное уравнение энергии

$$\int\limits_{S_e} [\sigma_{12}{}^a(u_2{}^a+\gamma u_{2,1}) - \varphi^a D_1{}^a] dS_e + \int\limits_{S_e} [-\gamma u_{2,1}\sigma_{12}{}^a - \varphi^a D_1{}^a] dS_e +$$

$$+ \int\limits_{S_f{}^\pm} (\sigma_{23}{}^a v_2{}^a - \varphi^a D_3{}^a) dS_f{}^\pm = \int\limits_V [2\sigma_{12}{}^a e_{12}{}^a + 2\sigma_{23}{}^a e_{23}{}^a + E_1{}^a D_1{}^a + E_3{}^a D_3{}^a] dV$$

При его выводе учтено тождество, имеющее место для основного электроупругого состояния:

$$2h\int\limits_V E_3 D_{3,0}\, dV = -\int\limits_{S_f{}^\pm} \varphi D_{3,0}\, dS_f{}^\pm$$

Здесь $E_3=-\partial\varphi/\partial\gamma$, а $D_{3,0}$ не зависит от γ.

Полагая, что на краю $\alpha_1=\text{const}$ выполняются условия $u_2{}^a+\gamma u_{2,1}=0$, $D_1{}^a=0$, а на лицевых поверхностях $S_f{}^\pm - \sigma_{23}{}^a=0$, $\varphi^a=0$, получим уравнение энергии, которое является уравнением энергии для антиплоского погранслоя с заданными на краю перемещениями

$$-\int\limits_{S_e} \gamma u_{2,1}\sigma_{12}{}^a\, dS_e = \int\limits_V [2\sigma_{12}{}^a e_{12}{}^a + 2\sigma_{23}{}^a e_{23}{}^a + E_1{}^a D_1{}^a + E_3{}^a D_3{}^a] dV \qquad (2.9)$$

Уравнение энергии для рассматриваемой оболочки оказалось в исходном приближении уравнением энергии для антиплоского погранслоя, поскольку вблизи жестко заделанного края возникает интенсивный погранслой, напряжения в котором в η^{-1} раз больше напряжений внутреннего электроупругого состояния. Внутреннее электроупругое состояние войдет в уравнение энергии в следующих приближениях одновременно со следующими приближениями погранслоя. Заметим, что к таким же выводам привело в рассматриваемом случае сведение асимптотическим методом трехмерных уравнений электроупругости к двумерным.

Воспользовавшись формулами антиплоской задачи [8], можно показать, что для антиплоского погранслоя имеют место теоремы Клапейрона, взаимности работ, единственности (здесь и ниже теорема единственности проверяется при соответствующим образом выбранных граничных условиях).

3. Рассмотрим в рамках классической теории пьезокерамическую оболочку с одним неэлектродированным краем $\alpha_1=\alpha_{10}$ и неэлектродированными лицевыми поверхностями, предварительно поляризованную вдоль α_2-линий. Пусть объемные силы отсутствуют и действует механическая поверхностная нагрузка, порождающая электроупругое состояние с большой изменяемостью t ($^1/_2 \leqslant t < 1$). Электроупругое состояние такой оболочки описывается теорией [5], для которой имеют место обобщенные на электроупругость гипотезы Кирхгофа — Лява.

Будем считать, что любую из искомых величин можно представить формулой (2.6), кроме того, сохраняют силу формулы для замены переменных (2.3)—(2.5). Числа s, n, k_i, полученные асимптотическим методом при сведении трехмерной задачи к двумерной [5], принимают следующие значения:

$$k_i=0;\ n=0 \text{ для } v_3,\ e_{33},\ e_{i3},\ E_i,\ D_i,\ \varphi$$

$$n=1 \text{ для } v_i,\ e_{ii},\ \sigma_{ii},\ \sigma_{12},\ e_{12} \qquad (3.1)$$

$$n=2 \text{ для } \sigma_{i3},\ D_3,\ E_3(\sigma_{i3,1}=D_{3,1}=0),\ n=3 \text{ для } \sigma_{33}$$

$$s=t \text{ для } v_i,\ \varphi;\quad s=-1+2t \text{ для } v_3$$

$$s=1-t \text{ для } e_{i3},\ \sigma_{i3},\ E_3,\ D_3;\quad s=2-2t \text{ для } \sigma_{33};$$

$s=0$ для остальных величин. Числа j, r, q определяются формулами (2.8).

Числа α и β зависят от граничных условий на краю, например на свободном неэлектродированном краю $\alpha=0$, $\beta=1-t$, на шарнирно опертом неэлектродированном краю $\alpha=1-t$, $\beta=0$.

На лицевых поверхностях оболочки при $\gamma=\pm h$ выполняются следующие механические и электрические условия:

$$\sigma_{33}=\pm q_3^{\pm}, \quad \sigma_{i3}=\pm q_i^{\pm}, \quad D_3=0 \tag{3.2}$$

На свободном неэлектродированном краю $\alpha_1=\mathrm{const}$ должны выполняться следующие условия:

$$\sigma_{11}=0, \quad \sigma_{12}=0, \quad \sigma_{13}=0, \quad D_1=0 \tag{3.3}$$

На шарнирно опертом неэлектродированном краю должны удовлетворяться такие условия:

$$\sigma_{11}=0, \quad v_2=0, \quad v_3=0, \quad D_1=0 \tag{3.4}$$

Рассмотрим сначала оболочку с одним свободным краем.

Уравнение энергии с точностью до величин $O(\eta^{2-2t})$ с использованием формул (2.3)–(2.7), (3.1), (2.9) после преобразований примет вид

$$\begin{gathered}
\int\limits_{l^*}\Big[2\sigma_{1,0}v_{1,0}+\Big(\frac{2}{3}\sigma_{1,1}+\eta^{1-t}\int\limits_{-1}^{+1}\zeta(\sigma_1^a+\sigma_1^b)\,d\zeta\Big)v_{1,1}+2\sigma_{12,0}v_{2,0}+\\
+\frac{2}{3}\sigma_{12,1}v_{2,1}+\Big(2\sigma_{13,0}+\frac{2}{3}\sigma_{13,2}\Big)v_{3,0}-\varphi_{,0}D_{1,0}\Big]A_2\,d\xi_2+\\
+\int\limits_{S^*}[(q_3^++q_3^-)v_{3,0}+(q_1^++q_1^-)v_{1,0}+(q_2^++q_2^-)v_{2,0}+(q_1^+-q_1^-)v_{1,1}+\\
+[(q_2^+-q_2^-)v_{2,1}]dS^*+\eta^{1-t}\int\limits_{S_{e^*}}[(\zeta\sigma_{12,1}+\sigma_{12}^a)v_2^a-\varphi^aD_1^a]dS_{e^*}+\\
+2\zeta\sigma_{12,1}e_{12}^a+\zeta E_1^aD_{1,1}]dV_*=\int\limits_{S^*}\Big[2\sigma_{1,0}e_{1,0}+\frac{2}{3}\sigma_{1,1}e_{1,1}+2\sigma_{2,0}e_{2,0}+\\
+\frac{2}{3}\sigma_{2,1}e_{2,1}+4\sigma_{12,0}e_{12,0}+\frac{4}{3}\sigma_{12,1}e_{12,1}+2E_{1,0}D_{1,0}+2E_{2,0}D_{2,0}\Big]dS^*+\\
+\eta^{1-t}\int\limits_{V_*}[2\sigma_{23}^ae_{23}^a+2\sigma_{12}^ae_{12}^a+E_1^aD_1^a+E_3^aD_3^a]dV_*
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Величины погранслоя входят в уравнение (3.5) с малым множителем η^{1-t}. Отбросим в уравнении энергии (3.5) величины погранслоя и другие члены такого порядка малости и перейдем в полученном уравнении к принятым в теории оболочек обозначениям [5] — усилиям T_i, S, N_i, моментам G_i, H, перемещениям срединной поверхности u_i, w, в результате получим приближенное уравнение энергии

$$\begin{gathered}
\int\limits_S(X_1u_1+X_2u_2+Zw+M_1\gamma_1+M_2\gamma_2)\,dS+\\
+\int\limits_l\Big[T_1u_1+Su_2+G_1\gamma_1+\Big(N_1-\frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}\Big)w-2h\varphi^{(0)}D_1^{(0)}\Big]A_2\,d\alpha_2=\\
=\int\limits_S[T_1\varepsilon_1+T_2\varepsilon_2+S\omega-G_1\varkappa_1-G_2\varkappa_2+2H\tau+2hE_1^{(0)}D_1^{(0)}+2hE_2^{(0)}D_2^{(0)}]dS
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь X_i, Z, M_i — отнесенные к срединной поверхности компоненты поверхностной нагрузки $X_i=(q_i^++q_i^-)$, $Z=-(q_3^++q_3^-)$, $M_i=h(q_i^+-q_i^-)$; $\varphi^{(0)}$, $D_i^{(0)}$, $E_i^{(0)}$ — не зависящие от толщинной координаты электрические величины.

Выпишем для рассматриваемых оболочек соотношения электроупругости и уравнения электростатики с точностью до величин $O(\eta^{1-t})$ [5]:

$$T_i=2h(n_{ii}\varepsilon_i+n_{ij}\varepsilon_j)-2hc_iE_2^{(0)},\qquad H=2h^3\tau/(3s_{44}^E)$$
$$S=2h(\omega-d_{15}E_1^{(0)})/s_{44}^E,\qquad G_i=-2h^3(n_{ii}\varkappa_i+n_{ij}\varkappa_j)/3$$
$$E_i^{(0)}=-\partial\varphi^{(0)}/(A_i\partial\alpha_i),\qquad D_1^{(0)}=\varepsilon_{11}^TE_1^{(0)}+d_{15}S/2h \tag{3.7}$$
$$D_2^{(0)}=\varepsilon_{33}^TE_2^{(0)}+(d_{31}T_1+d_{33}T_2)/2h,\qquad \operatorname{div}D^{(0)}=0$$

Преобразуя выражение для работы внутренних сил при помощи формул (3.7), получим равенство, доказывающее теорему Клапейрона.

Для доказательства теоремы взаимности введем обозначение

$$A_{ij}=T_1^{(i)}\varepsilon_1^{(j)}+T_2^{(i)}\varepsilon_2^{(j)}+S^{(i)}\omega^{(j)}+2H^{(i)}\tau^{(j)}-$$
$$-G_1^{(i)}\varkappa_1^{(j)}-G_2^{(i)}\varkappa_2^{(j)}+2hE_1^{(i)}D_1^{(j)}+2hE_2^{(i)}D_2^{(j)}\qquad (i\neq j=1,2)$$

Если искомые величины связаны формулами (3.7), то $A_{12}=A_{21}$. Отсюда следует теорема взаимности работ.

Для доказательства теоремы единственности для внутреннего электроупругого состояния достаточно показать, что подынтегральное выражение в правой части формулы (3.6) есть положительная функция

$$T_1\varepsilon_1+T_2\varepsilon_2+S\omega-G_1\varkappa_1+G_2\varkappa_2+2H\tau+2hE_1^{(0)}D_1^{(0)}+2hE_2^{(0)}D_2^{(0)}=$$
$$={}^1/_2n_{11}[(1+\nu)(\varepsilon_1+\varepsilon_2^{\vee})^2+(1-\nu)(\varepsilon_1-\varepsilon_2^{\vee})^2]+$$
$$+{}^1/_6n_{11}[(1+\nu)(\varkappa_1+\varkappa_2^{\vee})^2+(1-\nu)(\varkappa_1-\varkappa_2^{\vee})^2]+ \tag{3.8}$$
$$+2h^2\tau^2/(3s_{44}^E)+\omega^2/s_{44}^E+(c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2-D_2^{(0)})^2/a+(\varepsilon_{11}^T-d_{15}^2/s_{44}^E)(E_1^{(0)})^2$$
$$a=\varepsilon_{33}^T-c_1d_{31}-c_2d_{33},\qquad \varepsilon_2^{\vee}=\sqrt{n_{22}/n_{11}}\,\varepsilon_2,$$
$$\varkappa_2^{\vee}=\sqrt{n_{22}/n_{11}}\,\varkappa_2,\qquad \nu=n_{12}/\sqrt{n_{11}n_{22}}$$

Так как все постоянные множители перед искомыми величинами в преобразованном выражении (3.8) положительны, то для рассматриваемой задачи единственность решения обеспечена.

Вернемся к уравнению энергии (3.5). Преобразуем его, задаваясь точностью до величин порядка η^{2-2t}. Так как в уравнение (3.5) величины антиплоского погранслоя входят с малым множителем η^{1-t}, то величины погранслоя следует учитывать с точностью до величин $O(\eta^{1-t})$. Выпишем систему уравнений антиплоского погранслоя с указанной точностью [8]:

$$\partial\sigma_{12}/(A_1\partial\xi_1)+\partial\sigma_{23}^a/\partial\zeta=0,\qquad \sigma_{12}^a=\sigma_{21}^a,\qquad \sigma_{23}^a=\sigma_{32}^a$$
$$\partial v_2^a/(A_1\partial\xi_1)=d_{15}E_1^a+s_{44}^E\sigma_{12}^a,\qquad \partial v_2^a/\partial\zeta=d_{15}E_3^a+s_{66}^E\sigma_{23}^a$$
$$\partial D_3^a/\partial\zeta+\partial D_1^a/(A_1\partial\xi_1)=0,\qquad E_3^a=-\partial\varphi^a/\partial\zeta \tag{3.9}$$
$$E_1^a=-\partial\varphi^a/(A_1\partial\xi_1)$$

Пользуясь этими уравнениями и предполагая, что заданы следующие механические и электрические граничные условия

$$\sigma_{12}^a=-\zeta\sigma_{12,1},\qquad D_1^a=0\qquad (\xi_1=0)$$
$$\sigma_{23}^a=0,\qquad D_3^a=0\qquad (\zeta=\pm1) \tag{3.10}$$

можно показать, что для антиплоского погранслоя выполняется следующее равенство:

$$-\int\limits_{S_{e*}}\zeta\sigma_{12,1}v_2^a\,dS_{e*}=\int\limits_{V_*}(2\sigma_{23}^ae_{23}^a+2\sigma_{12}^ae_{12}^a+E_1^aD_1^a+E_3^aD_3^a)\,dV_* \tag{3.11}$$

Для антиплоского погранслоя выполняются общие теоремы пьезоупругости.

Вместо искомых величин погранслоя введем новые величины с индексом a, заключенным в круглые скобки $P^{(a)}=P^a/\sigma_{12,1}$, где под P^a подразумевается любая из прежних величин $\sigma_{12}{}^a, \ldots, E_3{}^a$, а под P^a — любая из вновь введенных величин $\sigma_{12}^{(a)}, \ldots, E_3^{(a)}$.

В результате замены переменных первое условие (3.10) примет вид

$$\sigma_{12}^{(a)}=-\zeta. \tag{3.12}$$

Остальные формулы (3.9), (3.10) будут отличаться только индексом (a).

Решение этой антиплоской задачи приведено в [8]. Выпишем нужный в дальнейшем интеграл

$$J=\int\limits_{-1}^{+1}\zeta\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{0}\sigma_{12}^{(a)}A_1\,d\xi_1=-0{,}42\sqrt{\frac{s_{66}{}^E}{s_{44}{}^E}} \tag{3.13}$$

Считая, что для величин погранслоя выполняются условия затухания, однородные условия на лицевых поверхностях и уравнения равновесия [8], принимая во внимание (3.12), (3.13), преобразуем некоторые интегралы, входящие в (3.5):

$$\int\limits_{-1}^{+1}\zeta(\sigma_1{}^a+\sigma_1{}^b)\,|_{\xi_1=0}\,d\zeta=\int\limits_{-1}^{+1}\zeta\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{A_1}\frac{\partial(\sigma_1{}^a+\sigma_1{}^b)}{\partial\xi_1}A_1\,d\xi_1= \tag{3.14}$$

$$=-\int\limits_{-1}^{+1}\zeta\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{\partial(\sigma_{13}{}^a+\sigma_{13}{}^b)}{\partial\zeta}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}A_1\sigma_{12}{}^a\right]A_1\,d\xi_1=$$

$$=-\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\int\limits_{-1}^{+1}\zeta\,d\zeta\int\limits_{-\infty}^{0}\sigma_{12}{}^aA_1\,d\xi_1=-J\frac{1}{A_2}\frac{\partial\sigma_{12,1}}{\partial\xi_2},$$

$$\int\limits_{V_*}\zeta\sigma_{12}{}^ae_{12,1}\,dV_*=J\int\limits_{l_*}\sigma_{12,1}e_{12,1}A_2\,d\xi_2.$$

Сохраним в уравнении (3.5) все члены с точностью до величин $O(\eta^{2-2t})$, учтем (3.10)—(3.14), переходя затем к обозначениям теории оболочек, получим уточненные уравнения энергии

$$\int\limits_{s}(X_1u_1+X_2u_2+Zw+M_1\gamma_1+M_2\gamma_2)\,dS+\int\limits_{l}\Big[T_1u_1+Su_2+$$

$$+\left(G_1+3J\frac{h}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}\right)\gamma_1+\left(N_1-\frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}\right)w-2h\varphi^{(0)}D_1^{(0)}\Big]A_2\,d\alpha_2=$$

$$=\int\limits_{s}[T_1\varepsilon_1+T_2\varepsilon_2+S\omega-G_1\varkappa_1-G_2\varkappa_2+2H\tau+2hE_1^{(0)}D_1^{(0)}+2hE_2^{(0)}D_2^{(0)}]\,dS+ \tag{3.15}$$

$$+3J\int\limits_{l}H\tau A_2\,d\alpha_2.$$

Приведенные граничные условия на свободном краю $\alpha_1=\text{const}$, вытекающие из (3.15), совпадают с граничными условиями, полученными в [8].

Первый интеграл в правой части формулы (3.15) — величина положительная (см. (3.8)), второй — отрицателен. Оба интеграла соизмеримы лишь при $t=1$. В этом случае внутренняя энергия может стать отрицательной, что может привести к нарушению единственности решения. Отметим, что внутреннее электроупругое состояние, описываемое теорией оболочек, имеет смысл только для показателей изменяемости t, меньших единицы. Для решений с таким показателем изменяемости внутренняя энергия положительна и решение единственно.

Полученный результат подтверждается примером, приведенным в [9]. В работе [9] для неэлектрической пластины со свободным краем найдено отличное от нуля решение с показателем изменяемости, равным единице, удовлетворяющее однородным уравнениям изгиба пластины и однородным уточненным граничным условиям.

Если при построении решения пользоваться итерационным процессом, подобным описанному в [4], то на каждом шаге итерационного процесса единственность будет обеспечена.

Уравнение энергии (3.6), составленное с точностью до величин $O(\eta^{1-t})$, сохраняет силу и для других закреплений краев оболочки. В него входят только величины внутреннего электроупругого состояния. Влияние погранслоя проявляется лишь в уравнениях, составленных с большей точностью.

Опуская выкладки, аналогичные проделанным, выпишем уточненное уравнение энергии для оболочки с одним шарнирно опертым краем $\alpha_1=$ $=\text{const}$ для случая большой изменяемости внутреннего электроупругого состояния:

$$\int\limits_S (X_1u_1+X_2u_2+Zw+M_1\gamma_1+M_2\gamma_2)\,dS+\int\limits_l \Big\{ T_1u_1+Su_2+G_1\gamma_1+ \tag{3.16}$$

$$+\left(N_1-\frac{1}{A_2}\frac{\partial H}{\partial\alpha_2}\right)w-2h\varphi^{(0)}\left[D_1^{(0)}-\frac{m_2b}{2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(s_{13}{}^ET_2+2hd_{31}E_2^{(0)})\right]\Big\}\times$$

$$\times A_2\,d\alpha_2=\int\limits_S[T_1\varepsilon_1+T_2\varepsilon_2+S\omega-G_1\varkappa_1-G_2\varkappa_2+2H\tau+2hE_1^{(0)}D_1^{(0)}+$$

$$+2hE_2^{(0)}D_2^{(0)}]\,dS+hm_2b\int\limits_l E_2^{(0)}(s_{13}{}^ET_2+2hd_{31}E_2^{(0)})A_2\,d\alpha_2,\qquad b=d_{31}-d_{33}s_{13}{}^E/s_{33}{}^E$$

Из (3.16) следуют уточненные условия на шарнирно опертом краю

$$T_1=0,\qquad u_2=0,\qquad G_1=0,\qquad w=0$$

$$D_1^{(0)}-{}^1/_2m_2b\partial(s_{13}{}^ET_2+2hd_{31}E_2^{(0)})/(A_2\partial\alpha_2)=0$$

С учетом этих условий последний контурный интеграл в (3.16) можно преобразовать к виду

$$hm_2b\int\limits_l E_2^{(0)}(s_{13}{}^ET_2+2hd_{31}E_2^{(0)})A_2\,d\alpha_2=hm_2b^2\int\limits_l(E_2^{(0)})^2A_2\,d\alpha_2$$

Число m_2 определяется из решения однородных уравнений плоской задачи [8] с граничными условиями $v_3{}^b=-\zeta$, $\sigma_1{}^b=0$ $(\xi_1=0)$; $\sigma_{13}{}^b=0$, $\sigma_{33}{}^b=0$ $(\zeta=\pm1)$.

Для пьезокерамических материалов, приведенных в [2], рассматриваемая плоская задача совпадает с плоской задачей для изотропного материала [4]. В [4] выполнен расчет и получено положительное значение коэффициента m_2 $(m_2=0{,}096/(1-\nu^2))$. Если $m_2>0$, то интегралы в правой части формулы (3.16) положительны и для оболочки с одним шарнирно опертым краем уточненная теория обеспечивает единственность решения.

Доказательство теоремы Клапейрона и теоремы взаимности работ, исходя из равенств (3.16), (3.7), не представляет затруднений.

4. Итак, асимптотическим методом проведен анализ уравнения энергии. Показано, что во всех рассмотренных случаях для теорий оболочек и погранслоя выполняются теоремы Клапейрона и взаимности работ. Однако теорема единственности для уточненных теорий может нарушаться, так как оказалось, что вариационная формулировка с положительно-определенным функционалом не всегда возможна. Выяснено, что неединственность может иметь место только в классе недопустимых в теории оболочек функций с показателем изменяемости, равным единице. Чтобы при расчете оболочки по уточненной теории избежать неединственности, на-

до, решая задачу, следить, чтобы изменяемость искомых функций не была слишком велика. Например, если задача решается в тригонометрических рядах, то следует заранее исключить из рассмотрения члены с достаточно большими номерами.

Таким образом показано, что вариационная формулировка возможна не только для теорий самого грубого приближения, но и для уточненных теорий. При этом для уточненных теорий пьезокерамических оболочек второго типа получены уточненные граничные условия, являющиеся обобщением на электроупругость приведенных условий работы [4].

Отметим, что все формулы и выводы, относящиеся к классическим теориям пьезокерамических оболочек, сохраняются и для неэлектрических оболочек, если всюду в уравнении энергии положить равными нулю электрические величины.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постановку задачи и ценные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tiersten H. F.* Linear Piezoelectric Plate Vibration. N.– Y.: Plenum Press, 1969. 212 p.
2. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезокерамические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях.– В кн.: Физическая акустика. Т. 1. Ч. А/Под ред. У. Мезона. М.: Мир, 1966, с. 204–326.
3. *Гольденвейзер А. Л.* О применимости общих теорем теории упругости к тонким оболочкам.– ПММ, 1944, т. 8, вып. 1, с. 3–14.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Рогачева Н. Н.* Уравнения состояния пьезокерамических оболочек.– ПММ, 1981, т. 45, вып. 5, с. 902–911.
6. *Рогачева Н. Н.* Уточненная теория пьезокерамических оболочек.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, т. 34, № 1, с. 55–64.
7. *Рогачева Н. Н.* Граничные условия в теории пьезокерамических оболочек.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1983, т. 36, № 6, с. 50–60.
8. *Рогачева Н. Н.* О граничных условиях в теории пьезокерамических оболочек, поляризованных вдоль координатных линий.– ПММ, 1983, т. 47, вып. 2, с. 263–270.
9. *Бердичевский В. Л.* Вариационно асимптотический метод построения теории оболочек.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 664–687.

Москва

Поступила в редакцию
4.IV.1985