МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 · 1986

УДК 533.6.013.42

РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ПРИ ПОМОЩИ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ

ГОЛОВАНОВ В. А., ПОПОВ А. Л., ПОПОВ А. Ю.

Предложен приближенный метод решения задачи о резонансных колебаниях оболочки вращения, погруженной в идеальную сжимаемую жидкость. Метод основан на экспоненциальном представлении акустического давления вблизи оболочки, использовавшемся ранее при рассмотрении коротковолновых колебаний. В данной работе применение этого подхода распространяется также на случай низкочастотных колебаний. Обоснование приближенного метода выполнено сравнением с численным решением задачи о гидроупругих колебаниях эллипсоидальной оболочки вращения. Дано также сопоставление с точным решением для бесконечной цилиндрической оболочки. Приведены результаты расчетов резонансных колебаний эллипсоидальной оболочки в жидкости в низкочастотном диапазоне.

1. Исследование колебаний упругих оболочек, погруженных в жидкость, приводит к сложным и малоизученным задачам математической физики. Только для сравнительно небольшого числа задач этого класса удается получить точное аналитическое решение, поэтому особое значение приобретает разработка приближенных подходов. В данной работе предлагается метод решения задач гидроупругости, основанный на приближенном определении коэффициента присоединенной массы жидкости.

Рассмотрим установившиеся гармонические колебания тонкой упругой оболочки вращения, погруженной в бесконечную идеальную сжимаемую жидкость. Введем на срединной поверхности оболочки систему координат α, φ, в которой α — длина дуги меридиана, φ — угол по параллели. Через A_1, A_2 обозначим коэффициенты первой квадратичной формы, а через R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности. Ограничиваясь рассмотрением оболочки, не имеющей участков отрицательной кривизны, примем в качестве третьей координаты в жидкой среде расстояние z по нормали n к поверхности оболочки.

Будем исходить из общей системы динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек [1]. После отделения в искомых функциях временной переменной и окружной координаты с помощью множителя $\exp(i\omega t+im\varphi)$, $m=0,1,2,\ldots$ придем к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $y_j(\alpha)$ $(j=1,2,\ldots,8)$, определяющих меридиональные зависимости кинематических и силовых факторов u_1, u_2, w, γ_1, T_1, S, N_1, M_1 [1], и к уравнению относительно функции акустического давления $P(\alpha, z)$:

$$\frac{dy_j}{d\alpha}=\sum_{k=1}^{8} b_{jk}(\alpha)\,y_k-\delta_{j7}A_1[P_0(\alpha)+F(\alpha)]\qquad (j=1,2,\ldots,8)\qquad(1.1)$$

$$\Delta_m P+k^2P=0,\quad \partial P/\partial n|_{z=0}=\omega^2\rho w,\quad P_0=P|_{z=0}$$

$$k=\omega/c,\quad \Delta_m P\equiv\Delta(Pe^{im\varphi})e^{-im\varphi}$$

Здесь ω — частота колебаний, ρ, c — плотность жидкости и скорость звука в ней, δ_{j7} — символ Кронекера, $F(\alpha)$ — функция поперечной нагрузки, Δ — трехмерный оператор Лапласа. Функция акустического давления должна удовлетворять на бесконечности условию излучения.

Известно [2, 3], что однородная $(F\equiv0)$ задача (1.1) имеет спектр комплексных собственных частот, мнимые части которых существенно меньше действительных частей. В силу этого свойства неоднородная задача характеризуется наличием резонансов с ограниченной амплитудой колебаний. При малых мнимых частях комплексных собственных частот формы резонансных гидроупругих колебаний оболочки, как можно показать, подобны формам колебаний оболочки в вакууме с учетом малого внутреннего трения. В этом случае на резонансах мнимые части y_{jI} комплексных амплитуд y_j превалируют над действительными частями y_{jR}. Влияние жидкости в основном сводится к снижению резонансных частот по отношению к случаю колебаний оболочки в вакууме. Эффект этого влияния может быть приближенно учтен путем введения коэффициента присоединенной массы жидкости.

Для того чтобы определить коэффициент присоединенной массы жидкости при резонансных колебаниях, применим для решения задачи (1.1) метод экспоненциального представления акустического давления в ближнем поле излучения. Сущность метода и его применение к некоторым задачам о гидроупругих колебаниях оболочек и пластин изложены в [4—6]. В [4] показано, что асимптотика точного решения для акустического давления в эталонной задаче о квазипоперечных колебаниях сферической оболочки в жидкости имеет в окрестности оболочки преимущественно экспоненциальный характер. В [5] экспоненциальное представление для давления было применено для решения задачи о коротковолновых колебаниях эллипсоидальной оболочки в жидкости. В данной работе указанный метод распространяется на задачу о колебаниях с произвольной изменяемостью напряженно-деформированного состояния оболочки. Возможность такого обобщения нуждается, вообще говоря, в обосновании. Ниже будут сделаны определенные выводы о правомерности такого подхода.

Пусть акустическое давление в окрестности колеблющейся оболочки может быть представлено следующим образом:

$$P(\alpha, z)=P_0(\alpha)\exp(-az) \tag{1.2}$$

Здесь $a=a(\alpha)$ — неизвестная величина, характеризующая интенсивность изменения давления в ближнем поле, причем предполагается, что $\operatorname{Re} a>0$. Подставим выражение (1.2) в уравнения (1.1) и исключим функцию $P_0(\alpha)$ с помощью равенства

$$P_0=-\omega^2\rho a^{-1}w \tag{1.3}$$

Это приводит к системе девяти обыкновенных дифференциальных уравнений относительно восьми компонент y_j вектора состояния оболочки. Для полученной переопределенной задачи требуется сформулировать условие разрешимости.

В том случае, когда на основе уравнений колебаний оболочек для состояний с большой изменяемостью рассматриваются коротковолновые колебания оболочки, благодаря структуре этих уравнений удается вывести условие разрешимости [5] в виде алгебраического уравнения девятой степени относительно a. Тем самым задача сводится к отысканию корней этого уравнения, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} a>0$, и построению для этих значений a интегралов однородной системы уравнений. Анализ корней данного уравнения показывает, что при некоторых ограничениях на параметры задачи существует положительный корень a_1. При этом величина a_1 является медленно меняющейся функцией меридиональной координаты и, что особенно важно, при рассмотрении резонансных колебаний определяет основной вклад в величину инерционного эффекта жидкости.

В рассматриваемом общем случае динамических уравнений оболочки вывод условия разрешимости и, тем самым, явного уравнения относительно $a(\alpha)$ является трудновыполнимой задачей. Поэтому предлагается следующий подход.

Пусть существует положительная медленно меняющаяся функция $a_1(\alpha)$, для которой приближенно разрешима упомянутая выше переопределенная задача. Тогда имеет место краевая задача для уравнений колебаний оболочки вращения с учетом присоединенной массы жидкости

$$\frac{dy_j}{d\alpha}=\sum_{k=1}^{8} b_{jk}{}^{\circ}(\alpha)\, y_k \tag{1.4}$$

$$b_{jk}{}^{0}=b_{jk}+\delta_{j7}\delta_{k3}A_1\omega^2\rho a_1^{-1} \quad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 8)$$

При решении задачи в коротковолновом приближении было получено, что положительному корню $a_1(\alpha)$ соответствует осциллирующий интеграл уравнений колебаний оболочки. Предположим, что и в общем случае искомой функции $a_1(\alpha)$ отвечает интеграл уравнений (1.4), имеющий осциллирующий характер:

$$y_j(\alpha)=y_{0j}\exp(s\alpha) \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ 8) \tag{1.5}$$

где $y_{0j}=y_{0j}(\alpha)$, $s=s(\alpha)$ — медленно меняющиеся функции, причем $|\mathrm{Re}\, s|\ll|\mathrm{Im}\, s|$. Подстановка (1.5) в уравнения (1.4) с учетом малой изменяемости ($|s'(\alpha)|\ll|s(\alpha)|$, $|y_{0j}'(\alpha)|\ll|y_{0j}(\alpha)|$) дает систему линейных алгебраических уравнений относительно y_{0j}. Условием нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$\det\{b_{jk}{}^{0}-\delta_{jk}s\}=0 \tag{1.6}$$

Рассмотрим теперь уравнение, которое следует из уравнения (1.1) для функции давления после подстановки (1.2), (1.3). Применяя здесь представление (1.5), получаем уравнение

$$\Phi(s,\ a_1)\equiv s^2+A_1{}^2(c_1s+a_1{}^2-c_2a_1+k^2-m^2/A_2{}^2)=0 \tag{1.7}$$

$$c_1=A_1{}^{-2}(A_2'/A_2-A_1'/A_1), \quad c_2=R_1{}^{-1}+R_2{}^{-1}$$

Следовательно, искомые значения a_1 и s должны удовлетворять уравнениям (1.6), (1.7). Поскольку s является комплексной величиной, то после отделения действительных и мнимых частей в уравнениях (1.6), (1.7) получим четыре алгебраических уравнения относительно трех вещественных величин a_1, s_R, s_I ($s=s_R+is_I$). Учитывая предположенное неравенство $|s_R|\ll|s_I|$, отбросим уравнение $\mathrm{Im}\,\Phi(s,\ a_1)=0$ и сведем задачу к решению уравнения (1.6) и уравнения

$$\mathrm{Re}\,\Phi(s,\ a_1)\equiv s_R{}^2-s_I{}^2+A_1{}^2(c_1s_R+a_1{}^2-c_2a_1+k^2-m^2/A_2{}^2)=0 \tag{1.8}$$

Как показывает численный анализ, такой шаг не влечет за собой существенной ошибки в определении a_1.

По найденному таким образом значению a_1 вычисляется приближенный коэффициент присоединенной массы жидкости $\mu=(\rho/\rho_0)(ha_1)^{-1}$, где ρ_0, h — плотность материала и толщина оболочки. Тогда определение частот резонансных колебаний оболочки вращения в жидкости может быть выполнено путем интегрирования уравнений (1.4), отличающихся от уравнений колебаний оболочки в вакууме наличием множителя $1+\mu$ в слагаемом, соответствующем поперечной инерционной силе.

К числу наиболее эффективных численных методов решения этой задачи относится метод Годунова, заключающийся в сведении краевой задачи к задачам Коши и применении ортогонализации линейно независимых вектор-решений в дискретном числе точек. В случае оболочки, замкнутой в вершинах, задача осложняется тем, что вершины являются особыми точками уравнений. В [7] сформулированы условия, позволяющие свести задачу для замкнутой в вершинах оболочки вращения к краевой задаче и применить метод численного интегрирования уравнений.

2. Численная реализация изложенного метода приближенного определения присоединенной массы жидкости при резонансных колебаниях оболочки вращения в жидкости осуществлялась с помощью алгоритма, основанного на применении метода Данилевского вычисления коэффициентов характеристического полинома и собственных значений произвольной матрицы. Этот метод является достаточно эффективным для матриц невысокого порядка.

Сущность алгоритма можно пояснить следующим образом. Пусть при фиксированном значении α найдены значения a_1 и $s=s_R+is_I$, удовлетворяющие уравнениям (1.6) и (1.8). Делая шаг по координате, примем найденное значение a_1 в качестве стартового значения при поиске a_1 в новой точке меридиана. Для данного значения a_1 из восьми корней s уравнения (1.6), отсортированных по возрастанию абсолютной величины мнимой части, отбирается тот, который удовлетворяет условию $|s_R|<|s_I|$ и дает минимальную (по модулю) относительную невязку в уравнении (1.8). При этом запоминается номер этого корня в последовательности всех корней. Аналогичные операции выполняются для значений a_{11} и a_{12}, расположенных слева и справа от ведущего значения a_1. На основании вычисленных невязок, соответствующих значениям a_{11}, a_1, a_{12}, принимается решение о перемещении вдоль оси a_1 с целью отыскания такой тройки a_{11}, a_1, a_{12}, для которой невязка в точке a_1 меньше невязок в соседних точках a_{11}, a_{12}. Это может означать смену знака невязки на отрезке $[a_{11}, a_{12}]$. При этом контролируется номер корня. Если найдена нужная тройка a_{11}, a_1, a_{12}, то на отрезке $[a_{11}, a_{12}]$ применяется метод деления отрезка пополам для вычисления корня уравнения (1.8). Таким образом вычисляются значения $a_1(\alpha)$ и затем значения $\mu(\alpha)$ в узлах сетки, заданной на меридиане срединной поверхности оболочки. Отметим, что из-за сильной чувствительности корней s уравнения (1.6) к изменениям a_1 шаг сетки должен быть достаточно малым.

При использовании изложенного алгоритма для эллипсоидальной оболочки вращения таблица значений $\mu(\alpha)$ строилась благодаря симметрии на половине меридиана, начиная с экваториальной точки. Стартовое значение при поиске a_1 в этой точке задавалось исходя из значения коэффициента присоединенной массы жидкости для бесконечной цилиндрической оболочки с радиусом r, равным радиусу экватора:

$$\mu=-(\rho/\rho_0)(r/h)K_m(\varkappa)[\varkappa K_m'(\varkappa)]^{-1},\quad \varkappa=r(k_0^2-k^2)^{1/2} \tag{2.1}$$

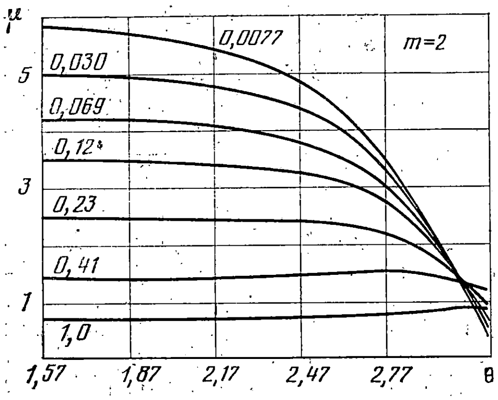
где $K_m(\varkappa)$ — функция Макдональда порядка m, k_0 — волновое число изгибных волн, определяемое из дисперсионного уравнения для заданной частоты.

Отметим, что в окрестности вершины оболочки возрастает значение действительной части s_R корня s, который отвечает искомому значению a_1. В малой окрестности вершины для вычисления a_1 применяется экстраполяция.

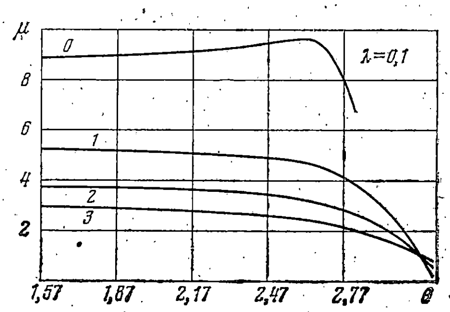
3. Приведем результаты применения предложенного метода в задаче о гидроупругих колебаниях эллипсоидальной оболочки вращения относительной толщины $h/r=0{,}01$ с отношением длин полуосей $r/b=0{,}4$ (r — радиус экватора). Рассматривался случай стальной оболочки, погруженной в воду.

В [8] изложен метод численного решения этой задачи, в основу которого положено сведение исходной трехмерной дифференциальной задачи к двумерной интегродифференциальной. Применимость этого метода ограничивается случаем сравнительно малой изменяемости напряженно-деформированного состояния оболочки. С помощью программы, реализующей алгоритм численного решения задачи о вынужденных колебаниях оболочки в жидкости, найдены значения нескольких первых резонансных частот при фиксированном значении числа m волн по параллели. Расчеты проводились как с учетом, так и без учета сжимаемости жидкости. Было установлено, что значения резонансных частот сравнительно слабо зависят от сжимаемости жидкости.

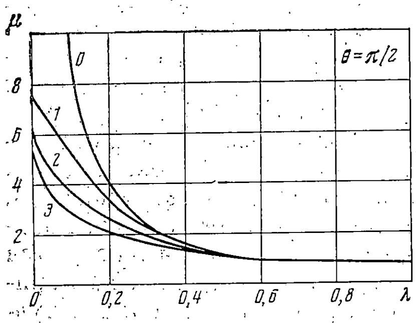
Представим результаты расчетов резонансных значений частотного параметра $\lambda=\omega^2r^2\rho_0/E$ (E — модуль Юнга материала оболочки) с учетом присоединенной массы жидкости при значениях $m=1$, 2, 3 (первый, второй и третий столбец соответственно) и n (n — номер частоты), причем для каждого n в первой и второй строках приведены значения, вычисленные без учета и с учетом сжимаемости жидкости соответственно, а в четвертой строке даны собственные частоты колебаний оболочки



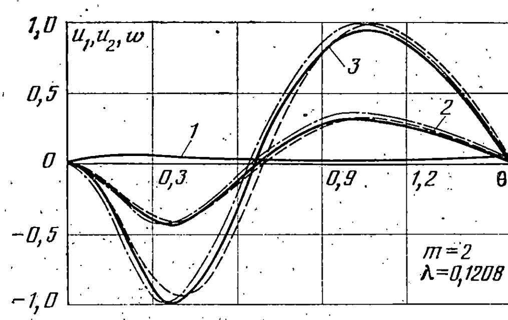
Фиг. 1



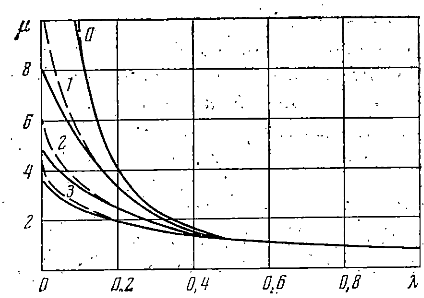
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

в вакууме. В третьей строке приведены резонансные значения частотного параметра λ, полученные численным методом [8] без учета сжимаемости жидкости (в скобках даны значения λ с учетом сжимаемости).

$n=1$	0,0812	0,00781	0,00775
	0,0769	0,00775	0,00770
	0,0681	0,00768 (0,00757)	0,00886
	0,211	0,0401	0,0393
$n=2$	0,137	0,0308	0,0232
	0,129	0,0302	0,0230
	0,118	0,0296 (0,0288)	0,0251
	0,403	0,131	0,0983
$n=3$	0,216	0,0708	0,0492
	0,204	0,0688	0,0485
	—	—	—
	0,686	0,273	0,185

Как видно из таблицы, приближенный метод дает приемлемые результаты уже в низкочастотном диапазоне. С ростом номера резонансной частоты увеличивается изменяемость напряженно-деформированного состояния оболочки, совершающей квазипоперечные колебания, а следовательно, лучше выполняются допущения, положенные в основу приближенного подхода.

На фиг. 1 изображены графики функции $\mu(\theta)$ на половине меридиана (θ – угловая координата; на экваторе $\theta=\pi/2$) при $m=2$ и нескольких значениях частотного параметра λ, указанных над графиками. Эти графики демонстрируют свойство малой изменяемости $\mu(\theta)$. На большей части меридиана $\mu(\theta)$ близка к постоянной. В окрестности вершины $\mu(\theta)$ ведет себя как степенная функция.

На фиг. 2 даны графики функции $\mu(\theta)$ при $\lambda=0{,}1$ и $m=0$, 1, 2, 3. Приведенные графики иллюстрируют поведение функции $\mu(\theta)$ в зависимости от частотного параметра λ и числа волн m.

На фиг. 3 представлены зависимости $\mu(\pi/2)$ – значения коэффициента в экваториальной точке – от λ при различных значениях m, указанных над графиками.

На фиг. 4 даны нормированные формы резонансных колебаний оболочки при $m=2$, $n=4$. Сплошными линиями изображены графики $u_1(\theta)$, $u_2(\theta)$, $w(\theta)$, полученные численным методом [8] без учета сжимаемости жидкости (кривые *1–3* соответственно). Штриховыми линиями показаны аналогичные зависимости, рассчитанные приближенным методом. Там же штрихпунктирными линиями приведены графики компонент соответствующей собственной формы колебаний оболочки в вакууме. Отметим, что графики $u_1(\theta)$ в выбранном масштабе совпадают.

С помощью изложенного метода рассчитывалась также присоединенная масса жидкости в задаче о колебаниях бесконечной цилиндрической оболочки. В этом случае существует точное решение типа свободных волн, для которого по заданному значению частоты ω из дисперсионного уравнения определяется волновое число k_0 изгибных волн, а затем по формуле (2.1) вычисляется коэффициент присоединенной массы жидкости μ. На фиг. 5 сплошными линиями изображены зависимости μ от λ при различных значениях m, рассчитанные приближенным методом, а штриховыми линиями показаны результаты точного решения задачи. Существенное расхождение между результатами имеет место только в низкочастотном диапазоне.

Таким образом, предложенный подход позволяет с приемлемой погрешностью найти оценки резонансных частот и форм колебаний оболочек вращения, погруженных в жидкость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 384 с.
2. *Hayek S., DiMaggio F. L.* Complex natural frequencies of vibrating submerged spheroidal shells.– Int. J. Solids and Struct., 1970, v. 6, No. 3, p. 333–351.
3. *Васильев Д. Г.* Формула для функции распределения частот оболочки вращения, погруженной в жидкость.– Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 2, с. 325–328.
4. *Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* О резонансных частотах оболочек, колеблющихся в бесконечной жидкости.– ПММ, 1979, т. 43, № 5, с. 869–876.
5. *Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* Коротковолновые колебания замкнутой оболочки в жидкости, возбуждаемые окружной нормальной силой.– В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982, с. 228–237.
6. *Голованов В. А., Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* Колебания пластин под действием сосредоточенных нагрузок в акустической среде.– ПММ, 1982, т. 46, № 2, с. 303–309.
7. *Голованов В. А., Орлов Б. А., Попов А. Ю.* О постановке условий в вершине при динамических расчетах оболочек вращения.– Строит. мех. и расчет сооруж., 1983, № 6, с. 45–48.
8. *Голованов В. А.* Низкочастотные колебания оболочки вращения, погруженной в жидкость.– Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 2, с. 155–161.

Москва

Поступила в редакцию 12.V.1985