МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1986

УДК 531.383

ОБ ОЦЕНКЕ УХОДА ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

КУЗЬМИНА Р. П.

В [1] рассмотрены качественные вопросы задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. В [2, 3] получены оценки ухода гироскопа.

В данной работе предложен метод оценки ухода гироскопа в кардановом подвесе, основанный на методе последовательных приближений. Метод может быть использован при оценке решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия, если начальные возмущения решения достаточно малы и решение линеаризованной задачи известно.

1. Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/dt=f(x,\ t),\quad x(0)=x^\circ \tag{1.1}$$

Здесь x, x°, f — векторы размерности N, $f(0,\ t)\equiv 0$.

Обозначим через $U(t,\ s)$ матрицу Коши линейной системы $dy/dt=A(t)y$, $A(t)=f_x(0,\ t)$. Норму матрицы A и вектора x определим равенствами

$$\|A\|=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{j=1}^{N}|A_{ij}|,\qquad \|x\|=\max_{1\leqslant i\leqslant N}|x_i|$$

$$\varepsilon=\|x^\circ\|,\qquad X_n(t)=\sum_{k=1}^{n}x^{(k)}(t) \tag{1.2}$$

где $x^{(k)}(t)$ — последовательные приближения решения, определяемые из уравнений

$$dx^{(1)}/dt=A(t)x^{(1)},\ x^{(1)}(0)=x^\circ \tag{1.3}$$
$$dx^{(k)}/dt=A(t)x^{(k)}+g_k(t),\quad x^{(k)}(0)=0$$

Здесь $g_k(t)$ — однородный многочлен степени k от координат вектора x° в разложении вектор-функции $f(X_{k-1}(t),\ t)$ в ряд по степеням координат вектора X_{k-1}. Это разложение представляет собой степенной ряд по координатам вектора x°, в котором коэффициентами являются вектор-функции времени. Нетрудно проверить, что $x^{(k)}(t)$ — однородный многочлен степени k от координат вектора x°.

Теорема. Пусть выполнены условия: существует постоянная $\delta>0$, такая, что при $\|x\|<\delta$, $t\geqslant 0$ $f(x,\ t)$ имеет ограниченные по норме и непрерывные по t производные по компонентам вектора x до $(n+1)$-го порядка, $n\geqslant 1$; существует постоянная C, такая, что при $0\leqslant s\leqslant t$ матрица $U(t,\ s)$ удовлетворяет неравенству

$$\|U(t,\ s)\|\leqslant C \tag{1.4}$$

Тогда для любого значения $T>0$ (и при $n=1$ для любого значения ϑ: $0<\vartheta<1$) существуют постоянные $\varepsilon_*>0$, $C_*>0$, не зависящие от ε, t, и такие, что решение задачи Коши (1.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|x(t)-X_n(t)\|\leqslant C_*\varepsilon^{n+1}(t^{n^2}+t)$ при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_*$, $0\leqslant t\leqslant T\varepsilon^{-\vartheta}$, где $\vartheta=n^{-1}$ при $n>1$.

Доказательство. Уравнения (1.3) эквивалентны уравнениям

$$x^{(1)}(t)=U(t,0)x^{\circ}, \qquad x^{(k)}(t)=\int\limits_0^t U(t,s)g_k(s)\,ds \qquad (k=2,\ldots,n)$$

Отсюда и из (1.2), (1.4) следует неравенство $\|x^{(1)}(t)\|\leqslant C\varepsilon$. По индукции доказывается, что существует постоянная C_1, такая, что при $t\geqslant 0$ вектор-функции $x^{(k)}(t)$ (которые существуют, единственны и непрерывны при $t\geqslant 0$) удовлетворяют неравенствам

$$\|x_k(t)\|\leqslant C_1\varepsilon^k(t^{k-1}+1) \quad (k=1,\ldots,n) \tag{1.5}$$

Отсюда следует оценка вектор-функции $X_n(t)$:

$$\|X_n(t)\|\leqslant C_1\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k(t^{k-1}+1) \tag{1.6}$$

Выберем $\varepsilon_1>0$, $\delta_*>0$ так, чтобы выполнилось неравенство

$$C_1\sum_{k=1}^{n}[T^{k-1}\varepsilon_1^{k-k\vartheta+\vartheta}+\varepsilon_1{}^k]+\delta_*\leqslant\delta \tag{1.7}$$

Обозначим $u(t)=x(t)-X_n(t)$. Из (1.1) найдем, что u удовлетворяет уравнениям

$$du/dt=A(t)u+g(u,t), \quad u(0)=0 \tag{1.8}$$

$$g(u,t)=f(X_n(t)+u,t)-f_x(0,t)[X_n(t)+u]-\sum_{k=2}^{n}g_k(t)$$

которые эквивалентны интегральным

$$u(t)=\int\limits_0^t U(t,s)g(u(s),s)\,ds \tag{1.9}$$

Из первого условия теоремы, из (1.7) и из теоремы о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что для любого значения ε: $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ — существует такое значение $t_*=t_*(\varepsilon)$: $0<t_*\leqslant T\varepsilon^{-\vartheta}$,— что решение задачи Коши (1.8) существует, единственно и удовлетворяет неравенству $\|u(t)\|\leqslant\delta_*$ при $0\leqslant t\leqslant t_*$. Оценим $u(t)$ на этом интервале времени.

Разлагая вектор-функцию $f(X_n(t),t)$ по степеням компонент вектора X_n до $(n+1)$-го порядка и используя первое условие теоремы и неравенства (1.5), найдем, что существует постоянная C_2, такая, что при $0<\varepsilon\leqslant\leqslant\varepsilon_1$, $0\leqslant t\leqslant T\varepsilon^{-\vartheta}$ вектор-функция $g(0,t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(0,t)\|\leqslant C_2\varepsilon^{n+1}(t^{n^2-1}+1) \tag{1.10}$$

Оценим $\Delta g(u,t)=g(u,t)-g(0,t)$:

$$\Delta g(u,t)=f(X_n(t)+u,t)-f(X_n(t),t)-$$

$$-f_x(0,t)u=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial\varkappa_1}f_x(\varkappa_1X_n(t)+\varkappa_1\varkappa_2u,t)\,u\,d\varkappa_1\,d\varkappa_2$$

Отсюда, из (1.6), (1.7) и первого условия теоремы следует, что существует постоянная C_3, такая, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$, $0\leqslant t\leqslant T\varepsilon^{-\vartheta}$, $\|u\|\leqslant\delta_*$ выполняется неравенство

$$\|\Delta g(u,t)\|\leqslant C_3\left[C_1\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k(t^{k-1}+1)+\|u\|\right]\|u\| \tag{1.11}$$

Выберем $\varepsilon_*>0$, C_* из множества

$$\varepsilon_*\leqslant\varepsilon_1 \quad D_1=1-CC_1C_3\sum_{k=1}^{n}(k^{-1}T^k\varepsilon_*^{k(1-\vartheta)}+T\varepsilon_*^{k-\vartheta})>0 \tag{1.12}$$

$$D_2=D_1^2-4C^2C_2C_3[n^{-2}T^{n^2+1}\varepsilon_*^{n+1-\vartheta(n^2+1)}+T^2\varepsilon_*^{n+1-2\vartheta}]>0$$

$$2CC_2\leqslant C_*(D_1+D_2^{1/2}),\qquad C_*(T^{n^2}\varepsilon_*^{n+1-n^2\vartheta}+T\varepsilon_*^{n+1-\vartheta})\leqslant\delta_*$$

Из (1.4), (1.9)–(1.11) найдем

$$u(t)=\int_0^t U(t,s)[g(0,s)+\Delta g(u(s),s)]ds$$

$$\|u(t)\|\leqslant\int_0^t C[C_2\varepsilon^{n+1}(s^{n^2-1}+1)+C_1C_3\sum_{k=1}^n\varepsilon^k(s^{k-1}+1)\|u(s)\|+C_3\|u(s)\|^2]ds$$

Обозначим $v=v(t)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\|u(s)\|$. Тогда

$$v\leqslant c+bv+av^2,\qquad a=CC_3t \tag{1.13}$$

$$b=CC_1C_3\sum_{k=1}^n\varepsilon^k(k^{-1}t^k+t),\qquad c=CC_2\varepsilon^{n+1}(n^{-2}t^{n^2}+t)$$

Из (1.12) следует, что уравнение $v=c+bv+av^2$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_*$, $0\leqslant t\leqslant T\varepsilon^{-\vartheta}$ имеет два разных неотрицательных корня. Т. к. $v\geqslant0$, $v(0)=0$ и $v(t)$ – непрерывная функция времени, то при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_*$, $0\leqslant t\leqslant t_*$ справедливы неравенства

$$\|u(t)\|\leqslant v\leqslant\{1-b-[(1-b)^2-4ac]^{1/2}\}(2a)^{-1}=2c\{1-b+[(1-b)^2-$$
$$-4ac]^{1/2}\}^{-1}\leqslant C_*\varepsilon^{n+1}(t^{n^2}+t) \tag{1.14}$$

Предположим, что $t_*<T\varepsilon^{-\vartheta}$. Тогда $\|u(t_*)\|=\delta_*$ (иначе решение можно продолжить). Из (1.12), (1.14) получим

$$\delta_*=\|u(t_*)\|<C_*\varepsilon^{n+1}(T^{n^2}\varepsilon^{-n^2\vartheta}+T\varepsilon^{-\vartheta})\leqslant C_*(T^{n^2}\varepsilon_*^{n+1-n^2\vartheta}+T\varepsilon_*^{n+1-\vartheta})\leqslant\delta_*$$

Противоречие доказывает теорему (случай $\varepsilon=0$ очевиден).

Из доказательства следует, что утверждение теоремы справедливо для постоянных ε_*, C_*, удовлетворяющих неравенствам (1.12), в которых ε_1, δ_* определяются неравенствами (1.7), а постоянные C_1, C_2, C_3 оценивают вектор-функции $x^{(k)}(t)$, $g(u,t)$ в (1.5), (1.10), (1.11). Это обстоятельство позволяет доводить до числа оценку решения задачи Коши (1.1), если выполняются условия теоремы и начальные значения решения достаточно малы по модулю.

2. Рассмотрим уравнения движения астатического гироскопа в кардановом подвесе [4]:

$$I(\beta)\alpha^{\cdot\cdot}+H\cos\beta\beta^{\cdot}+D\alpha^{\cdot}\beta\sin2\beta=0 \tag{2.1}$$

$$B_0\beta^{\cdot\cdot}-H\cos\beta\alpha^{\cdot}-{}^1/_2D\alpha^{\cdot2}\sin2\beta=0$$

$$I(\beta)=A_2+(A+A_1)\cos^2\beta+C_1\sin^2\beta$$

$$B_0=B_1+A,\quad D=C_1-A-A_1$$

$$\alpha(0)=\alpha^\circ,\ \beta(0)=\beta^\circ\neq{}^1/_2\pi,\ \alpha^{\cdot}(0)=\alpha^{\cdot\circ},\ \beta^{\cdot}(0)=\beta^{\cdot\circ}$$

Здесь α, β – углы поворота колец карданова подвеса, A, A_1, A_2, B_1, C_1 – моменты инерции, H – кинетический момент. Точка означает дифференцирование по времени t. Дифференциальные уравнения (2.1) имеют частное решение $\alpha\equiv\alpha^\circ$, $\beta\equiv\beta^\circ$. Приведем уравнения (2.1) к виду (1.1). Для этого введем обозначения: $\tau=t/t_*$, $x_1=\alpha-\alpha^\circ$, $x_2=\beta-\beta^\circ$, $x_3=\alpha'$, $x_4=\beta'$, $x_3^\circ=t_*\alpha^{\cdot\circ}$, $x_4^\circ=t_*\beta^{\cdot\circ}$. Здесь $t_*>0$ – параметр размерности t, который выберем дальше; штрих означает дифференцирование по τ. Система (2.1) в новых переменных примет вид

$$x_1'=x_3,\quad x_2'=x_4 \tag{2.2}$$

$$x_3'=-I^{-1}(\beta^\circ+x_2)x_4[t_*H\cos(\beta^\circ+x_2)+D\sin 2(\beta^\circ+x_2)x_3]$$

$$x_4'=B_0^{-1}x_3[t_*H\cos(\beta^\circ+x_2)+{}^1/_2D\sin 2(\beta^\circ+x_2)x_3]$$

$$x_1(0)=x_2(0)=0,\quad x_3(0)=x_3^\circ,\quad x_4(0)=x_4^\circ$$

Линеаризуем систему (2.2):

$$y_1'=y_3,\quad y_2'=y_4 \tag{2.3}$$

$$y_3'=-I^{-1}(\beta^\circ)t_*H\cos\beta^\circ y_4,\quad y_4'=B_0^{-1}t_*H\cos\beta^\circ y_3$$

Матрицу Коши системы (2.3) нетрудно вычислить

$$U(\tau,s)=(u_{ij}(\tau,s)),\quad u_{11}=u_{22}=1 \tag{2.4}$$

$$u_{12}=u_{21}=u_{31}=u_{32}=u_{41}=u_{42}=0$$

$$u_{13}=u_{24}=\omega^{-1}\sin\omega(\tau-s),\quad u_{14}=-\omega^{-1}k^{-1}[1-\cos\omega(\tau-s)]$$

$$u_{23}=\omega^{-1}k[1-\cos\omega(\tau-s)],\quad u_{33}=u_{44}=\cos\omega(\tau-s)$$

$$u_{34}=-k^{-1}\sin\omega(\tau-s),\quad u_{43}=k\sin\omega(\tau-s)$$

$$\omega=t_*H\cos\beta^\circ[I(\beta^\circ)B_0]^{-1/2},\quad k=[I(\beta^\circ)B_0^{-1}]^{1/2}$$

Из (2.2), (2.4) следует, что при любом значении $\delta>0$ система (2.2) удовлетворяет условию теоремы в п. 1. По этой теореме можно оценить разность точного и приближенного решений системы (2.2). Обозначим $u(\tau)=x(\tau)-X_1(\tau)$, где $X_1(\tau)=x^{(1)}(\tau)$ — первое приближение решения системы (2.2):

$$x_1^{(1)}(\tau)=x_3^\circ\omega^{-1}\sin\omega\tau-x_4^\circ\omega^{-1}k^{-1}(1-\cos\omega\tau)$$

$$x_2^{(1)}(\tau)=x_3^\circ\omega^{-1}k(1-\cos\omega\tau)+x_4^\circ\omega^{-1}\sin\omega\tau$$

$$x_3^{(1)}(\tau)=x_3^\circ\cos\omega\tau-x_4^\circ k^{-1}\sin\omega\tau,\quad x_4^{(1)}(\tau)=x_3^\circ k\sin\omega\tau+x_4^\circ\cos\omega\tau$$

Оценивая $u(\tau)$, получим тем самым оценку ухода гироскопа в кардановом подвесе. Чтобы довести оценку до числа, рассмотрим систему (2.2), следуя доказательству теоремы п. 1. Система (2.2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u(\tau)=\int_0^\tau U(\tau,s)g(u(s),s)\,ds \tag{2.5}$$

$$g(u,\tau)=G(x^{(1)}(\tau)+u),\quad G(x)=(0,0,G_3(x),G_4(x))^T$$

$$G_3(x)=-I^{-1}(\beta^\circ+x_2)[t_*H\cos(\beta^\circ+x_2)x_4+$$

$$+D\sin 2(\beta^\circ+x_2)x_3x_4]+I^{-1}(\beta^\circ)t_*H\cos\beta^\circ x_4$$

$$G_4(x)=B_0^{-1}[t_*H\cos(\beta^\circ+x_2)x_3+{}^1/_2D\sin 2(\beta^\circ+$$

$$+x_2)x_3^2-t_*H\cos\beta^\circ x_3]$$

Здесь T — знак транспонирования. Из (2.5) получим неравенства

$$\|u_i(\tau)\|\leqslant c_i+b_iv+a_iv^2\quad (i=1,2,3,4) \tag{2.6}$$

$$v\leqslant c+bv+av^2,\quad v=v(\tau)=\max_{0\leqslant s\leqslant\tau}(|u_2(s)|,|u_3(s)|,|u_4(s)|)$$

$$a=a(\tau)=\max(a_2,a_3,a_4),\quad b=b(\tau)=\max(b_2,b_3,b_4),$$

$$c=c(\tau)=\max(c_2,c_3,c_4)$$

Здесь a_i, b_i, c_i — функции, оценивающие интегралы

$$\left|\int_0^\tau[u_{i3}(\tau,s)G_3(x^{(1)}(s))+u_{i4}(\tau,s)G_4(x^{(1)}(s))]ds\right|\leqslant c_i(\tau)=c_i$$

$$\left| \int_0^{\tau} \{u_{i3}(\tau, s)[G_3(x^{(1)}(s)+u(s))-G_3(x^{(1)}(s))]+u_{i4}(\tau, s)[G_4(x^{(1)}(s)+u(s))-\right.$$

$$\left. -G_4(x^{(1)}(s))]\}ds \right| \leqslant b_i(\tau)v+a_i(\tau)v^2=b_iv+a_iv^2$$

Для всех значений β°, x_3°, x_4°, τ, удовлетворяющих неравенствам

$$1-b>0, \ \Delta=(1-b)^2-4ac>0 \tag{2.7}$$

справедлива оценка $v \leqslant (1-b-\Delta^{1/2})(2a)^{-1}=v_*$. Для исходных переменных отсюда и из (2.6) следует: для любых значений α°, $t_*>0$ и всех значений β°, $\alpha^{\cdot\circ}$, $\beta^{\cdot\circ}$, t, удовлетворяющих неравенствам (2.7), имеет место оценка $|\alpha-\alpha^\circ-\alpha^{(1)}| \leqslant c_1+b_1v_*+a_1v_*^2$, где $\alpha^{(1)}=t_*^{-1}x_1^{(1)}$ — первое приближение решения $\alpha=\alpha(t)$. Если прежде, чем оценивать переменную u_1, в правой части (2.5) выделить квадратичные по x_3°, x_4° члены и перенести их в левую часть

$$u(\tau)-x^{(2)}(\tau)=\int_0^{\tau} U(\tau, s)[g(u(s), s)-g_2(s)]ds$$

получим: для любых значений α°, $t_*>0$ и всех значений β°, $\alpha^{\cdot\circ}$, $\beta^{\cdot\circ}$, t из множества (2.7) решение системы (2.1) удовлетворяет неравенству

$$|\alpha-\alpha^\circ-\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}| \leqslant c_{1*}+b_1v_*+a_1v_*^2 \tag{2.8}$$

Здесь $\alpha^{(2)}=\alpha^{(2)}(t)$ — второе приближение решения $\alpha=\alpha(t)$, c_{1*} — функция, оценивающая интеграл

$$\left| \int_0^{\tau} \{u_{13}(\tau, s)[G_3(x^{(1)}(s))-G_{32}(s)]+u_{14}(\tau, s)[G_4(x^{(1)}(s))-\right.$$

$$\left. -G_{42}(s)]\}ds \right| \leqslant c_{1*}(\tau)=c_{1*}$$

где $G_{i2}(\tau)=G_i^{(2)}(x^{(1)}(\tau))$, $G_i^{(2)}(x)$ — многочлен 2-й степени в разложении функции $G_i(x)$ в ряд по степеням координат вектора x. Формулы для функций a_i, b_i, c_i, $\alpha^{(2)}$ не приводим ввиду их громоздкости. Из них (как и из теоремы п. 1) следует, что при стремлении $\alpha^{\cdot\circ}$, $\beta^{\cdot\circ}$ к нулю правая часть (2.8) стремится к нулю, а интервал времени, на котором неравенство (2.8) справедливо, стремится к бесконечности.

3. Положим $t_*=\min[I(\beta^\circ), B_0]H^{-1}|\cos\beta^\circ|^{-1}$ и рассмотрим гироскоп в кардановом подвесе с параметрами [2]: $H=6\cdot10^3$ г см с, $A_2+C_1=6$ г см с^2, $D=0$, $B_0=4$ г см с^2 в момент времени $t=T$, где $T=2\pi[I(\beta^\circ)B_0]^{1/2}H^{-1}|\cos\beta^\circ|^{-1}$ — период первого приближения решения. Для такого гироскопа полученный в п. 2 результат формулируется следующим образом: для любого значения α° и для всех значений β°, $\alpha^{\cdot\circ}$, $\beta^{\cdot}0$ из множества

$$1-b>0, \quad \Delta=(1-b)^2-4ac>0 \tag{3.1}$$

решение системы (2.1) удовлетворяет неравенству

$$|\alpha(T)-\alpha^\circ-\alpha^{(2)}| \leqslant c_{1*}+b_1v_*+a_1v_*^2 \tag{3.2}$$

Здесь $a=2{,}482\cdot10|\cos\beta^\circ|^{-1}$, $b=2{,}482\cdot10^{-2}\cos^{-2}\beta^\circ(|\alpha^\circ|+1{,}760\,K)$ с, $c=5{,}130\cdot10^{-6}|\alpha^{\cdot\circ}\sin\beta^\circ\cos^{-3}\beta^\circ|\max(|\alpha^{\cdot\circ}|, |\beta^{\cdot\circ}|)$ с^2$+9{,}425\cdot10^{-9}\cos^{-4}\beta^\circ K(|\alpha^{\cdot\circ}|+K)^2$ с^3, $T=5{,}130\cdot10^{-3}|\cos\beta^\circ|^{-1}$ с, $\alpha^{(2)}=-7{,}695\cdot10^{-6}\sin\beta^\circ|\cos\beta^\circ|^{-3}[(\alpha^{\cdot\circ})^2+{}^2/_9(\beta^{\cdot\circ})^2]$ с^2, $a_1=2{,}167\cdot10|\cos\beta^\circ|^{-1}$, $b_1=2{,}167\cdot10^{-2}\cos^{-2}\beta^\circ(|\alpha^{\cdot\circ}|+1{,}710\,K)$ с, $c_{1*}=7{,}695\cdot10^{-9}\cos^{-4}\beta^\circ K\times(|\alpha^{\cdot\circ}|+K)^2$ с^3, $v_*=(1-b-\Delta^{1/2})(2a)^{-1}$, $K=[(\alpha^{\cdot\circ})^2+{}^2/_3(\beta^{\cdot\circ})^2]^{1/2}$.

При $\beta^\circ=30^\circ$, $\alpha^{\cdot\circ}=8$ с$^{-1}$, $\beta^{\cdot\circ}=0$ неравенства (3.1) выполняются и получаем следующую оценку: $-0{,}204$ с$^{-1} \leqslant [\alpha(T)-\alpha^\circ]/T \leqslant 0{,}076$ с$^{-1}$. Средняя скорость ухода, вычисленная по формуле Магнуса, равна $-0{,}021$ с$^{-1}$.

Полученные оценки можно улучшить, если рассмотреть следующее приближение решения системы (2.2).

Отметим, что при начальных значениях, рассмотренных в [2], решение системы (2.1) нельзя оценить по формуле (3.2), так как неравенства (3.1) для этих значений не выполняются. Оценки, полученные в [2, 3], быстрее дают хорошую точность ухода гироскопа. Значение предлагаемого метода в том, что (в отличие от [2, 3], где использована специфика уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе) этим методом можно оценить решение любой задачи Коши (1.1), если значение $\|x^\circ\|$ достаточно мало и решение линеаризованной задачи известно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузьмина Р. П.* Движение гироскопа в кардановом подвесе.– Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 14–22.
2. *Журавлев В. Ф.* К вопросу об оценках эффекта Магнуса.– Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1976, т. 226, № 3, с. 541–543.
3. *Филиппова Л. О.* Оценки скорости ухода гироскопа в кардановом подвесе.– Вестн. МГУ. Математика, механика, 1978, № 5, с. 74–77.
4. *Ишлинский А. Ю., Борзов В. И., Степаненко Н. П.* Лекции по теории гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1983. 245 с.

Москва

Поступила в редакцию 4.V.1985