

УДК 539.3:534.1

## УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЖАТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ

АЗИКОВ Н. С., ВАСИЛЬЕВ В. В.

Рассматривается нелинейное деформирование прямоугольных шарнирно опертых сжатых композитных панелей. Решение осуществляется в перемещениях на основе уравнений типа Кармана и проводится в два этапа: представлением прогиба в форме произведения тригонометрических функций с числами полуволн, зависящими от уровня сжимающей нагрузки и определяемыми в процессе расчета, строится первое приближение; методом возмущений осуществляется уточнение решения. При этом дополнительный (по отношению к решению в первом приближении) прогиб представляется двойным тригонометрическим рядом и считается малым. В результате линеаризации по дополнительному прогибу задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов соответствующего разложения. Исследовано влияние структурных параметров слоистых композитов на критические нагрузки и закритическое поведение сжатых панелей.

1. Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую по всем сторонам пластину, сжатую усилиями  $N_x$  и  $N_y$  (фиг. 1). Пластина состоит из  $2k$  ортотропных слоев, причем слой с индексом  $i$  имеет толщину  $h_i$  и включает смежные элементарные слои композита с углами армирования  $\pm\varphi_i$  по отношению к оси  $x$ . Будем считать, что слои расположены симметрично относительно срединной плоскости. Тогда исходная система уравнений имеет вид

$$\partial N_x / \partial x + \partial N_{xy} / \partial y = 0, \quad \partial N_y / \partial y + \partial N_{xy} / \partial x = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial^2 M_x / \partial x^2 + 2\partial^2 M_{xy} / (\partial x \partial y) + \partial^2 M_y / \partial y^2 + N_x k_x + N_{xy} k_{xy} + N_y k_y = 0 \quad (1.2)$$

$$N_x = C_{11} e_x + C_{12} e_y, \quad N_y = C_{21} e_x + C_{22} e_y, \quad N_{xy} = C_{33} e_{xy} \quad (1.3)$$

$$M_x = D_{11} k_x + D_{12} k_y, \quad M_y = D_{21} k_x + D_{22} k_y, \quad M_{xy} = D_{33} k_{xy} \quad (1.4)$$

$$e_x = \partial u / \partial x + \frac{1}{2} (\partial w / \partial x)^2, \quad e_y = \partial v / \partial y + \frac{1}{2} (\partial w / \partial y)^2$$

$$e_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x + (\partial w / \partial x) (\partial w / \partial y), \quad k_x = -\partial^2 w / \partial x^2$$

$$k_y = -\partial^2 w / \partial y^2, \quad k_{xy} = -2\partial^2 w / (\partial x \partial y)$$

Мембранные и изгибные жесткости определяются следующими равенствами [1]:  $C_{pq} = C_{qp} = 2\sum B_{pq}^{(i)} (z_i - z_{i-1})$ ,  $D_{pq} = D_{qp} = \frac{2}{3}\sum B_{pq}^{(i)} (z_i^3 - z_{i-1}^3)$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ), где  $2k$  — число слоев,  $z_i$  — расстояние от срединной плоскости до наружной поверхности  $i$ -го слоя, причем  $z_0=0$  и  $z_k=h/2$  (фиг. 1). Обобщенные жесткости слоя определяются соотношениями [2]:

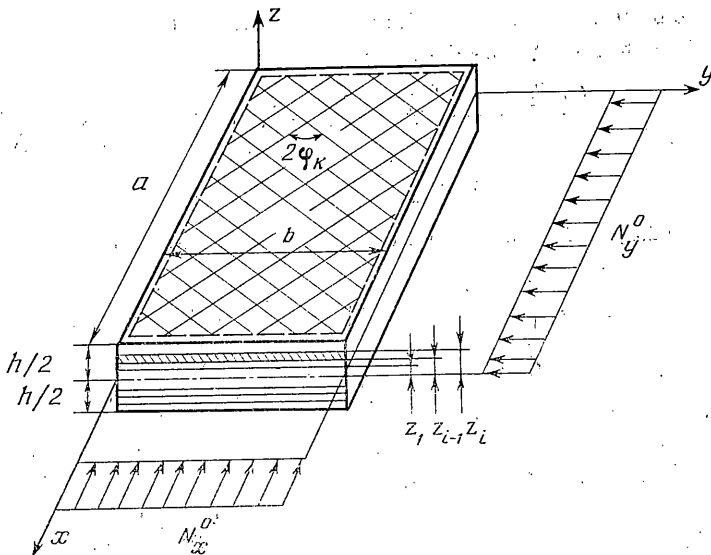
$$B_{11}^{(i)} = E_1^{\vee(i)} \cos^4 \varphi_i + 2E_1^{\vee(i)} \mu_{12}^{(i)} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + E_2^{\vee(i)} \sin^4 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \sin^2 2\varphi_i$$

$$B_{12}^{(i)} = B_{21}^{(i)} = (E_1^{\vee(i)} + E_2^{\vee(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \mu_{12}^{(i)} E_1^{\vee(i)} (\sin^4 \varphi_i + \cos^4 \varphi_i) - G_{12}^{(i)} \sin^2 2\varphi_i$$

$$B_{22}^{(i)} = E_1^{\vee(i)} \sin^4 \varphi_i + 2E_1^{\vee(i)} \mu_{12}^{(i)} \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + E_2^{\vee(i)} \cos^4 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \sin^2 2\varphi_i$$

$$B_{33}^{(i)} = (E_1^{\vee(i)} + E_2^{\vee(i)} - 2\mu_{12}^{(i)} E_1^{\vee(i)}) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \cos^2 2\varphi_i$$

$$E_{1,2}^{\vee(i)} = E_{1,2}^{(i)} / (1 - \mu_{12}^{(i)} \mu_{21}^{(i)}), \quad E_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} = E_2^{(i)} \mu_{21}^{(i)}$$



Фиг. 1

где  $E_1^{(i)}$ ,  $E_2^{(i)}$  — модули упругости  $i$ -го армированного слоя при нагружении вдоль и поперек волокон,  $G_{12}^{(i)}$  — модуль сдвига. Упругие постоянные  $i$ -го слоя в координатах  $x$ ,  $y$  выражаются через жесткости  $B_{pq}^{(i)}$  так:

$$E_x^{(i)} = B_{11}^{(i)} - B_{12}^{(i)} B_{12}^{(i)} / B_{22}^{(i)}, \quad E_y^{(i)} = B_{22}^{(i)} - B_{12}^{(i)} B_{21}^{(i)} / B_{11}^{(i)}, \quad G_{xy}^{(i)} = B_{33}^{(i)},$$

$$\mu_{xy}^{(i)} = B_{12}^{(i)} / B_{11}^{(i)}, \quad \mu_{yx}^{(i)} = B_{21}^{(i)} / B_{22}^{(i)}.$$

2. Построим решение, соответствующее первому приближению. Представим прогиб пластины в форме

$$w_1 = A_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad \lambda_m = m\pi/a, \quad \lambda_n = n\pi/b \quad (2.1)$$

где  $A_{mn}$ ,  $m$ ,  $n$  — постоянные, подлежащие определению. Записывая уравнения равновесия (1.1) через перемещения при помощи равенств (1.3), (1.5), подставляя в них (2.1) и решая относительно  $u$  и  $v$ , получим

$$u_1 = C_1 x - \frac{A_{mn}^2}{16\lambda_m^2} \left[ \lambda_m^2 (1 - \cos 2\lambda_n y) - \frac{C_{12}}{C_{11}} \lambda_n^2 \right] \sin 2\lambda_m x \quad (2.2)$$

$$v_1 = C_2 y - \frac{A_{mn}^2}{16\lambda_n^2} \left[ \lambda_n^2 (1 - \cos 2\lambda_m x) - \frac{C_{21}}{C_{22}} \lambda_m^2 \right] \sin 2\lambda_n y$$

Решение (2.2) удовлетворяет условиям сохранения прямолинейности кромок пластины при нагружении. Из статических граничных условий

$$\int_0^b N_x dy = b N_x^0 \text{ при } x=0, x=a; \quad \int_0^a N_y dx = a N_y^0 \text{ при } y=0, y=b \quad (2.3)$$

определяются постоянные  $C_1 = (C_{12} N_y^0 - C_{22} N_x^0) / C - 1/8 \lambda_m^2 A_{mn}^2$ ,  $C_2 = (C_{12} N_x^0 - C_{11} N_y^0) / C - 1/8 \lambda_n^2 A_{mn}^2$ ,  $C = C_{11} C_{22} - C_{12}^2$ .

Соотношения (2.1), (2.2), естественно, не удовлетворяют уравнению равновесия (1.2). Для построения приближенного решения воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. Выражая полную энергию

$$\Pi = 1/2 \int_0^a \int_0^b (N_x e_x + N_y e_y + N_{xy} e_{xy} + M_x k_x + M_y k_y + M_{xy} k_{xy}) dx dy -$$

$$- N_x^0 \int_0^a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - N_y^0 \int_0^b \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy \quad (2.4)$$

через перемещения при помощи равенств (1.3)–(1.5), подставляя (2.1), (2.2) и минимизируя по  $A_{mn}$ , получим

$$A_{mn}^2 = \frac{16C_{11}C_{22}\lambda_m^2}{C(C_{11}\lambda_m^4 + C_{22}\lambda_n^4)} \left[ N_x^\circ \left( 1 + \psi \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \right) - N_{mn} \right], \quad \psi = \frac{N_y^\circ}{N_x^\circ} \quad (2.5)$$

$$N_{mn} = \lambda_n^2 (D_{11}\lambda_m^2/\lambda_n^2 + 2D_{12} + 4D_{33} + D_{22}\lambda_n^2/\lambda_m^2) \quad (2.6)$$

С учетом (2.5), (2.6) выражение для полной энергии (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{(N_x^\circ)^2 ab}{2C} \left( C_{22} - 2\psi \frac{C_{12}C_{22}}{C_{11}} + \psi^2 C_{11} \right) + \\ & + \frac{abC_{11}C_{22}\lambda_m^2\lambda_n^2}{C(\lambda_m^4 C_{11} + \lambda_n^4 C_{22})} \left[ N_x^\circ \left( 1 + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \psi \right) - N_{mn} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим пластину, сжатую в одном направлении вдоль оси (фиг. 1). Традиционные граничные условия допускают свободное смещение продольных кромок  $y=0$  и  $y=b$  в направлении оси  $y$ . В соотношениях (2.5), (2.7) следует принять  $\psi=0$ . Из равенства (2.5) при этом следует, что искривленная форма равновесия существует, если  $N_x^\circ > N_{mn}$ , а минимальное значение  $N_{mn}$  определяет величину критического усилия  $N_*$ . Минимизируя соотношение (2.6) по  $m$  и  $n$ , можно установить [3], что  $n=1$ , а  $m$  удовлетворяет неравенству

$$m(m-1) < a^2/b^2 (\sqrt{D_{22}}/\sqrt{D_{11}}) < m(m+1) \quad (2.8)$$

Исследуем закритическое деформирование пластины, сжатой в одном направлении. Как известно, при возрастании внешней нагрузки число полуволн  $m$  может увеличиваться. Пусть начальное значение  $m$  определяется неравенством (2.8). При увеличении нагрузки полная энергия  $\Pi(N_x^\circ, m)$  возрастает в соответствии с равенством (2.7), причем равенство  $\Pi(N_x^\circ, m) = \text{const}$  определяет совокупность значений  $N_x^\circ$  и  $m$ , из которых предлагается выбирать значение  $m$ , соответствующее наименьшему значению  $N_x^\circ$  [4]. Найденный методом конечных разностей результат  $N_x^\circ = 3,28 N_*$ , определяющий усилие, соответствующее вторичной бифуркации изотропной пластины, приводится в [5]. Описанный выше способ дает  $N_x^\circ = 3,08 N_*$ . Отметим, что в [6], где рассматривается аналогичная задача,  $m$  выбирается из условия минимума нагрузки, обеспечивающей заданное сближение нагруженных кромок пластины.

Определяя таким образом значение  $m$ , соответствующее заданному уровню нагрузки, можно далее при помощи равенств (2.5), (2.1), (2.2) описать в первом приближении закритическое поведение сжатой пластины. На фиг. 2 сплошной линией показана расчетная зависимость относительного усилия от относительного сближения кромок пластины (звездочка в нижнем индексе соответствует критической нагрузке), а точками — экспериментальные результаты, полученные в [7] для однородной по толщине композитной пластины с параметрами  $h = 2,506 \times 10^{-3}$  м,  $E_x = 28,06$  ГПа,  $E_y = 5,3$  ГПа,  $G_{xy} = 2,16$  ГПа,  $\mu_{yx} = 0,33$ .

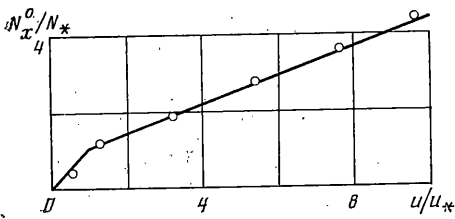
Для оценки прочности пластины необходимо найти деформации и кривизны (1.5), распределение деформаций по толщине  $\varepsilon_x = e_x + zk_x$ ,  $\varepsilon_y = e_y + zk_y$ ,  $\varepsilon_{xy} = e_{xy} + zk_{xy}$ , перейти от них к деформациям в осях ортотропии слоев [2]:

$$\varepsilon_1^{(i)} = \varepsilon_x \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_y \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i$$

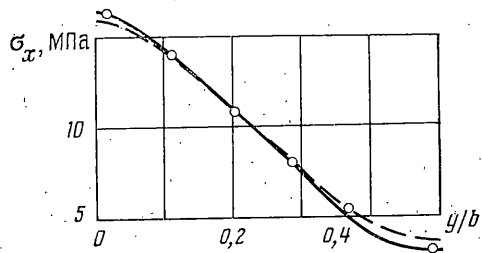
$$\varepsilon_2^{(i)} = \varepsilon_x \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_y \cos^2 \varphi_i - \varepsilon_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i$$

$$\varepsilon_{12}^{(i)} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin 2\varphi_i + \varepsilon_{xy} \cos 2\varphi_i$$

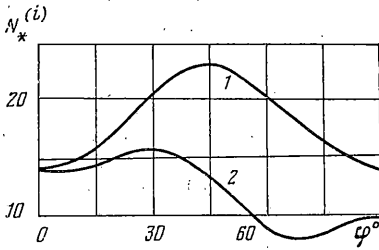
и найти напряжения в слоях  $\sigma_1^{(i)} = E_1^{(i)} (\varepsilon_1^{(i)} + \mu_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)})$ ,  $\sigma_2^{(i)} = E_2^{(i)} (\varepsilon_2^{(i)} + \mu_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)})$ ,  $\tau_{12}^{(i)} = G_{12}^{(i)} \varepsilon_{12}^{(i)}$ .



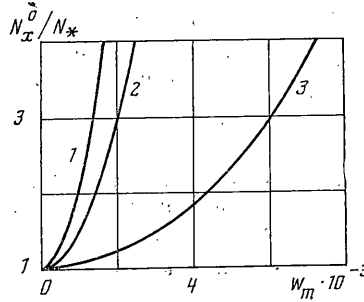
Фиг. 2



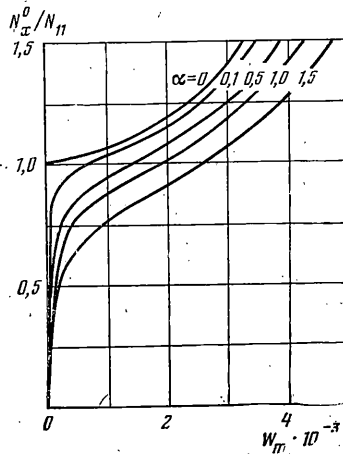
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Окончательно выражения для напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^{(i)} = & -f_x E_1^{(i)} \left[ (1 - \mu_{12}^{(i)} C_{12}/C_{22}) \cos^2 \varphi_i + (\mu_{12}^{(i)} - C_{12}/C_{22}) \sin^2 \varphi_i \right] - \quad (2.9) \\
 & -f_y E_1^{(i)} \left[ (1 - \mu_{12}^{(i)} C_{12}/C_{11}) \sin^2 \varphi_i + (\mu_{12}^{(i)} - C_{12}/C_{11}) \cos^2 \varphi_i \right] + \\
 & + z E_1^{(i)} A_{mn} [\lambda_m^2 (\cos^2 \varphi_i + \mu_{12}^{(i)} \sin^2 \varphi_i) + \lambda_n^2 (\sin^2 \varphi_i + \mu_{12}^{(i)} \cos^2 \varphi_i)] \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y - \\
 & - z E_1^{(i)} \lambda_m \lambda_n A_{mn} (1 - \mu_{12}^{(i)}) \sin 2\varphi_i \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y \\
 \sigma_2^{(i)} = & -f_x E_2^{(i)} \left[ (1 - \mu_{21}^{(i)} C_{12}/C_{22}) \sin^2 \varphi_i + (\mu_{21}^{(i)} - C_{12}/C_{22}) \cos^2 \varphi_i \right] - \\
 & -f_y E_2^{(i)} \left[ (1 - \mu_{21}^{(i)} C_{12}/C_{11}) \cos^2 \varphi_i + (\mu_{21}^{(i)} - C_{12}/C_{11}) \sin^2 \varphi_i \right] + \\
 & + z E_2^{(i)} A_{mn} [\lambda_m^2 (\sin^2 \varphi_i + \mu_{21}^{(i)} \cos^2 \varphi_i) + \lambda_n^2 (\cos^2 \varphi_i + \mu_{21}^{(i)} \sin^2 \varphi_i)] \times \\
 & \times \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y - z E_2^{(i)} \lambda_m \lambda_n A_{mn} (1 - \mu_{21}^{(i)}) \sin 2\varphi_i \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{12}^{(i)} = & f_x G_{12}^{(i)} (1 + C_{12}/C_{22}) \sin 2\varphi_i + f_y G_{12}^{(i)} (1 + C_{12}/C_{11}) \sin 2\varphi_i - G_{12}^{(i)} A_{mn} z (\lambda_m^2 - \\ & - \lambda_n^2) \sin 2\varphi_i \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y - 2G_{12}^{(i)} A_{mn} z \lambda_m \lambda_n \cos 2\varphi_i \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y \\ f_x = & C_{22} N_x^0 / C + 1/8 \lambda_m^2 A_{mn}^2 \cos 2\lambda_n y, \quad f_y = C_{11} N_y^0 / C + 1/8 \lambda_n^2 A_{mn}^2 \cos 2\lambda_m x \end{aligned}$$

В равенствах (2.9) для  $i$ -го слоя  $z_{i-1} \leq z \leq z_i$  (фиг. 1). Предельная нагрузка может быть установлена подстановкой напряжений (2.9) в один из известных критериев прочности для ортотропного слоя [8].

3. Приведенное на фиг. 2 сопоставление расчетных и экспериментальных результатов показывает, что построенное выше первое приближение удовлетворительно описывает закритическое поведение сжатой пластины. Это дает основание предположить, что поправки к первому приближению окажутся достаточно малыми и для уточнения решения можно воспользоваться методом возмущений. В соответствии с этим методом представим прогиб пластины в виде

$$w = w_1 + w_2 \quad (3.1)$$

где  $w_1$  — уже известное первое приближение, а  $w_2$  — дополнительный прогиб, который считается малым по сравнению с  $w_1$  и представляется для шарнирно опертой пластины двойным тригонометрическим рядом

$$w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} R_{ij} \sin \lambda_i x \sin \lambda_j y \quad (\lambda_i = \pi i/a, \lambda_j = \pi j/b) \quad (3.2)$$

Предположение о малости  $w_2$  позволяет осуществить линеаризацию геометрических соотношений (1.5) и записать их в виде

$$\begin{aligned} e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, определение дополнительного состояния сводится к решению линейной задачи, которое строится следующим образом. Аналогично (3.1) перемещения  $u$  и  $v$  также представляются в виде сумм  $u = u_1 + u_2$ ,  $v = v_1 + v_2$  и из уравнений равновесия (1.4), записанных через перемещения при помощи равенств (1.3) и (3.3), дополнительные перемещения  $u_2$  и  $v_2$  выражаются через известное решение первого приближения  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ . Далее полная энергия (2.4) минимизируется по коэффициентам ряда (3.2)  $R_{ij}$  и для них получается линейная система алгебраических уравнений (которая из-за громоздкости здесь не приводится).

Проведенные расчеты показали, что для композитных пластин амплитуда прогиба  $w_2$  составляет (2–5) % от амплитуды прогиба  $w_1$ . При этом для определения  $w_2$  в разложении (3.2) достаточно удержать четыре первых члена.

На фиг. 3 показано распределение нормальных напряжений  $\sigma_x = N_x^0/h$  (МПа) по половине ширины однородной композитной пластины, сжатой усилиями  $N_x^0 = 2N_*$ . Штриховая линия соответствует первому приближению, сплошная линия — решению, уточненному описанным выше методом возмущений, а точки — экспериментальным результатам, полученным в [7]. Из графика следует, что первое приближение с удовлетворительной точностью описывает напряженное состояние пластины в закритической стадии.

4. Воспользуемся решением первого приближения для исследования некоторых особенностей поведения композитных пластин. Результаты, полученные в п. 2, соответствовали случаю свободно смещающихся в поперечном направлении продольных кромок пластины. Однако в реальных конструкциях, в частности в обшивке крыла самолета, пластина является элементом подкрепленной панели и ее продольные кромки опираются на стрингеры, взаимное смещение которых исключается элементами поперечного набора. В результате при сжатии пластины в направлении оси  $x$

усилиями  $N_x^\circ$  в ней появляются за счет эффекта Пуассона поперечные сжимающие усилия  $N_y^\circ = \psi N_x^\circ$  ( $\psi = C_{12}/C_{11}$ ), оказывающие существенное влияние на поведение композитных пластин, у которых коэффициент Пуассона может достигать больших значений. Для иллюстрации ниже представлены результаты определения по следующей из (2.5) формуле  $N_* = \min [N_{mn}/(1 + \psi \lambda_n^2/\lambda_m^2)]$  критических усилий для трех пластин из углепластика с упругими постоянными  $E_1 = 170$  ГПа,  $E_2 = 9$  ГПа,  $G_{12} = 4,5$  ГПа,  $\mu_{21} = 0,3$  для трех типов структур  $\psi = 0,016; 0,134; 0,823$ .

Пластины имеют одинаковую толщину  $h = 8 \times 10^{-4}$  м, причем первая пластина армирована под углом  $\varphi = 0$ , вторая является трехслойной, ее крайние слои имеют толщину  $2 \times 10^{-4}$  м и  $\varphi = 0$ , а средний слой —  $4 \times 10^{-4}$  м и  $\varphi = \pm 45^\circ$ ; третья пластина образована из чередующихся слоев с углами  $+45$  и  $-45^\circ$ . Усилия  $N_*^{(1)} = 6,0; 9,7; 23,3$  соответствуют свободным, а  $N_*^{(2)} = 5,9; 8,5; 12,8$  — несмещающимся по отношению кромкам. Из приведенных результатов следует, что учет эффекта закрепления кромок может привести к значительному снижению критических усилий. Это обстоятельство следует учитывать при проектировании композитных пластин. В частности, в соответствии с кривой 1 для  $N_*^{(1)}(\varphi)$  (кН/м), показанной на фиг. 4, принято считать, что квадратная пластина, армированная под углами  $\pm\varphi$  к направлению сжатия, будет оптимальной при  $\varphi = 45^\circ$ . Кривая 2 для  $N_*^{(2)}(\varphi)$ , соответствующая закреплению кромок, показывает, что  $\varphi = 45^\circ$  не обеспечивает максимума критического усилия.

Из графика фиг. 5, где представлены зависимости максимального прогиба  $w_m(M)$  от усилия сжатия (номера кривых соответствуют упомянутым структурам), следует, что значение  $\varphi = 45^\circ$  (кривая 3) является наименее рациональным по условиям закритического деформирования.

5. Рассмотренные решения относились к пластинам с симметричной структурой материала по толщине. В случае произвольного расположения слоев уравнение (2.5) обобщается так:

$$\begin{aligned}
 & t_1 A_{mn}^3 + t_2 A_{mn}^2 + t_3 A_{mn} + t_4 = 0 \quad (5.4) \\
 t_1 = & \frac{1}{16} \frac{C}{C_{22}} \lambda_n^2 \left[ \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} + \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \right], \quad t_2 = -\frac{1}{ab} \left\{ \frac{C}{C_{22}} \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \left[ l_1 + \frac{C_{22}}{C_{11}} l_2 \frac{\lambda_n^4}{\lambda_m^4} \right] - \right. \\
 & - \left[ (K_{11} - C_{11} l_1) \frac{\lambda_m}{\lambda_n} + (K_{12} - C_{12} l_2) \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \right] \left( 1 - \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \right) - \left[ (K_{22} - C_{22} l_2) \frac{\lambda_n}{\lambda_m} + \right. \\
 & \left. \left. + (K_{12} - C_{12} l_1) \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \right] \left( \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - \frac{C_{12}}{C_{22}} \right) \right\}, \quad t_3 = - \left( N_x^\circ - N_y^\circ \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - N_{mn} \right) + \\
 & + \lambda_n^2 \left\{ (l_1 + l_2) [-2K_{33} + C_{33}(l_1 + l_2)] - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} l_1 \left[ K_{11} - C_{11} l_1 + (K_{12} - C_{12} l_2) \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} l_2 \left[ K_{22} - C_{22} l_2 + (K_{12} - C_{12} l_1) \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} \right] \right\} \\
 t_4 = & -8N_x^\circ \frac{C_{22}}{\lambda_m^2 ab C} \left[ \left( K_{11} - K_{12} \frac{C_{12}}{C_{22}} \right) \frac{\lambda_m}{\lambda_n} + \left( K_{12} - K_{22} \frac{C_{12}}{C_{22}} \right) \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \right] - \\
 & -8N_y^\circ \frac{C_{11}}{\lambda_m^2 ab C} \left[ \left( K_{22} - K_{12} \frac{C_{12}}{C_{11}} \right) \frac{\lambda_n}{\lambda_m} + \left( K_{12} - K_{11} \frac{C_{12}}{C_{11}} \right) \frac{\lambda_m}{\lambda_n} \right] \\
 l_1 = & \frac{K_{11} C_{33} \lambda_m^2 / \lambda_n^2 - C_{12} (K_{12} + 2K_{33}) + K_{11} C_{22} - [K_{12} (C_{12} + C_{33}) - C_{11} C_{33} \lambda_m^2 / \lambda_n^2 + C - 2C_{12} C_{33} + C_{22} C_{33} \lambda_n^2 / \lambda_m^2]}{C_{11} C_{33} \lambda_m^2 / \lambda_n^2 + C - 2C_{12} C_{33} + C_{22} C_{33} \lambda_n^2 / \lambda_m^2} \\
 & - C_{22} (K_{12} + 2K_{33}) \lambda_n^2 / \lambda_m^2 \\
 l_2 = & \frac{K_{22} C_{33} \lambda_n^2 / \lambda_m^2 - C_{12} (K_{12} + 2K_{33}) + K_{22} C_{11} - [K_{12} (C_{12} + C_{33}) - C_{11} C_{33} \lambda_m^2 / \lambda_n^2 + C - 2C_{12} C_{33} + C_{22} C_{33} \lambda_n^2 / \lambda_m^2]}{C_{11} C_{33} \lambda_m^2 / \lambda_n^2 + C - 2C_{12} C_{33} + C_{22} C_{33} \lambda_n^2 / \lambda_m^2} \\
 & - C_{11} (K_{12} + 2K_{33}) \lambda_m^2 / \lambda_n^2
 \end{aligned}$$

где  $N_{mn}$  определяется равенством (2.6), а  $C_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $D_{ij}$  — мембранные, смешанные и изгибные жесткости [1].

Решение уравнения (5.1) определяет амплитуду прогиба, соответствующего первому приближению (2.1). Уточнение, проведенное описанным в п. 3 методом возмущений, показало, что для определения дополнительного прогиба  $w_2$  в разложении (3.2) достаточно удержать 16 первых членов. Для типовых композитных пластин погрешность первого приближения по максимальному прогибу составляет (5–7)%, а по продольному напряжению  $\sigma_x$  — (5–10)%.

В качестве примера рассмотрим квадратную пластину из углепластика, образованную из пяти слоев с параметрами (за начальную принимается одна из поверхностей пластины):  $\varphi_1=0$ ,  $h_1=2 \times 10^{-3}$ ;  $\varphi_2=90^\circ$ ,  $h_2=4 \times 10^{-4}$  м;  $\varphi_3=0$ ,  $h_3=1 \times 10^{-3}$  м;  $\varphi_4=90^\circ$ ,  $h_4=6 \times 10^{-4}$  м;  $\varphi_5=\pm 45^\circ$ ,  $h_5=8 \times 10^{-4}$  м. Для этой пластины был проведен параметрический анализ, предусматривающий изменение смешанных жесткостей пропорционально параметру  $\alpha$ .

На графике фиг. 6 показаны соответствующие зависимости максимального прогиба  $w_m$  от отношения действующего усилия к первому собственному значению (2.6)  $N_{11}$  для симметричного пакета. Кривая  $\alpha=0$  (т. е.  $K_{ij}=0$ ) соответствует пластине с симметричным расположением слоев относительно срединной плоскости, а кривая  $\alpha=1$  — исходной пластине, структура которой была приведена выше.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
4. Азиков Н. С., Васильев В. В. О редуцированном коэффициенте для сжатых ортотропных прямоугольных пластин. — В кн.: Механика композитных материалов: Рига: Изд-е рижск. политехн. ин-та, 1982, вып. 5, с. 75–82.
5. Евстратов А. А. Об исследовании работы гибких пластинок методом конечных разностей. — Изв. вузов. Стр-во и архитектура, 1977, № 5, с. 39–44.
6. Stein M. Postbuckling of orthotropic composite plates loaded in compression. — AIAA Journal, 1983, v. 21, No. 12, p. 1729–1735.
7. Banks W. M., Harvey J. M. Experimental study of stability problems in composite materials. — In: Stab. Probl. Eng. Struct. and Components. Pap. Annu. Conf. Stress Anal. Group. Inst. Phys. Cardiff: 1978, London, 1979, p. 1–22.
8. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191 с.

Москва

Поступила в редакцию  
4.XII.1985