

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН,
ОПИРАЮЩИХСЯ НА ОДНОСТОРОННЕЕ
УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

КАРТВЕЛИШВИЛИ В. М., ЛАРИЧЕВ А. Д.

Приводится постановка и излагается методика решения нового типа двумерных задач численной оптимизации внутренней структуры композитных пластин, покоящихся без сцепления и трения на одностороннем упругом основании. Для решения «прямых» задач отыскания прогибов упругих пластин выписываются выпуклые конечно-разностные аппроксимации функционала энергии со вторым порядком точности, позволяющие на базе модификаций известных итерационных методов построить вычислительный процесс, обладающий высокой скоростью сходимости. Предлагаемая градиентная процедура последовательной оптимизации эффективно использует качественные особенности построенных вариационно-разностных схем. Алгоритм апробируется на примере оптимизации коэффициента армирования консольно закрепленных композитных пластин, опирающихся на упругое основание.

Задачи оптимизации упругих конструкций, в которых учитывались стесненность прогибов и взаимодействие с упругим основанием, рассматривались ранее в [1-4].

1. **Постановка задачи.** В прямоугольной системе координат Ox_1x_2z рассмотрим неоднородную пластину переменной изгибной жесткости $D(x_1, x_2)$, занимающую в плане на плоскости Ox_1x_2 область Ω с границей Γ и площадью S .

На части контура $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma)$ пластина соответственно свободна, жестко закреплена и шарнирно оперта. На дискретном множестве точек $\Omega_0 \subset \Omega \cup \Gamma$ пластина закреплена и ее прогибы в Ω_0 равны нулю.

На пластину действует поперечная нагрузка интенсивности $q(x_1, x_2)$.

В области $\Omega_c \subset \Omega$ пластина покоится на одностороннем упругом основании, имеющем жесткость $c=c(x_1, x_2)$.

Считается, что силы трения и сцепления между пластиной и поверхностью упругого основания отсутствуют.

Пластина выполнена из упругого, хаотически армированного композитного материала с концентрацией армирующих включений (коэффициентом армирования) $v(x_1, x_2)$, коэффициентами Ламе матрицы λ^0, μ^0 и модулем Юнга арматуры E^+ .

На концентрацию $v(x)$ наложены естественные ограничения (v^\pm, ξ_v — заданные величины):

$$0 < v^-(x) \leq v(x) \leq v^+(x), \quad \max_{x \in \Omega} |\nabla v(x)| \equiv \max_{x \in \Omega} (v_{,i} v_{,i})^{1/2} \leq \xi_v \quad (1.1)$$

обусловленные как технологическими требованиями, так и требованиями концепции осредненных модулей [5].

Здесь и далее латинские индексы i, j, k, l принимают значения 1 и 2; по дважды повторяющимся индексам ведется суммирование; нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате; $x=(x_1, x_2)$.

Обозначив через $h=h(x)$ толщину пластины, удовлетворяющую конструктивным ограничениям

$$0 < h^-(x) \leq h(x) \leq h^+(x), \quad \max_{x \in \Omega} |\nabla h(x)| \equiv \max_{x \in \Omega} (h_{,i} h_{,i})^{1/2} \leq \xi_h \quad (1.2)$$

а через $\rho^0, \rho^+, dx=dx_1 dx_2$ — соответственно плотность материала матрицы,

плотность материала армирующих включений и дифференциал площади, получим следующее выражение для массы композитной пластины

$$M = \int_{\Omega} h[\rho^{\circ} + (\rho^+ - \rho^{\circ})v] dx \quad (1.3)$$

Пусть $w = w(x)$ — прогибы пластины, покоящейся без трения и сцепления на одностороннем упругом основании, определяемые из решения краевой задачи

$$Lw \equiv (D\beta_{ijk}w_{,k})_{,j} + \frac{1}{2}c(1 + \operatorname{sgn} w)w = q, \quad x \in \Omega$$

$$w = 0, \quad x \in \Omega_0; \quad L_{\Gamma}w = 0, \quad x \in \Gamma \quad (1.4)$$

где $\beta_{1111} = \beta_{2222} = 1$, $\beta_{1122} = \beta_{2211} = \nu$, $\beta_{1212} = 2(1 - \nu)$, все остальные коэффициенты β_{ijk} равны нулю, $\operatorname{sgn} w = \pm 1$, если $w \gtrless 0$, L_{Γ} — оператор краевых условий.

Тогда жесткостные характеристики пластины можно описать интегральным функционалом

$$Q = \int_{\Omega} q(x)w(x) dx \quad (1.5)$$

или локальным критерием качества $W = \max_{x \in \Omega} |w(x)|$. Критерий качества W сведем к интегральному функционалу [6]:

$$W = \left(\frac{1}{S} \int_{\Omega} w^p dx \right)^{1/p} = \|w\|_p \quad (1.6)$$

где p — достаточно большое [6] четное положительное число.

Аналогично выражению (1.6), предварительно введя вспомогательные функции φ_v, φ_h , сведем неравенства (1.1), (1.2) к условиям

$$\left[\frac{1}{S} \int_{\Omega} (v_{,i}v_{,i})^{p/2} \right]^{1/p} - \xi_v + \varphi_v^2 = 0, \quad \left[\frac{1}{S} \int_{\Omega} (h_{,i}h_{,i})^{p/2} \right]^{1/p} - \xi_h + \varphi_h^2 = 0 \quad (1.7)$$

Обозначив через U_{θ} множество допустимых управляющих функций $v(x), h(x)$, принадлежащих пространству $W_p^1(\Omega)$ и удовлетворяющих системе (1.7), сформулируем следующие задачи оптимизации Φ_Q и Φ_W , отвечающие соответственно функционалам (1.5) и (1.6).

Требуется выбором компонент управляющего вектора $H(x) = \{v(x), h(x)\}$ добиться снижения массы композитной пластины

$$M \rightarrow \min_{H \in U_{\theta}} \quad (1.8)$$

не нарушив ограничений по жесткости (1.5), (1.6) (Q°, W°) — заданные величины): $Q \leq Q^{\circ}$ (для задачи Φ_Q), $W \leq W^{\circ}$ (для задачи Φ_W), которые после введения вспомогательных функций φ_Q и φ_W можно записать соответственно в виде

$$Q - Q^{\circ} + \varphi_Q^2 = 0, \quad W - W^{\circ} + \varphi_W^2 = 0 \quad (1.9)$$

2. Метод последовательной оптимизации композитных пластин.

Развиваемый подход к построению оптимального вектора $H(x)$ базируется на методике последовательной оптимизации [6–9], сводящейся к построению по формулам $H^{(k+1)} = H^{(k)} + \delta H^{(k)}$ последовательности распределений управляющего вектора $H^{(1)}, H^{(2)}, \dots$, из условия, что вектор вариаций $\delta H^{(k)} = (\delta v^{(k)}, \delta h^{(k)})$ порождает на каждом шаге k такие вариации оптимизируемого функционала, которые обеспечивают его монотонное улучшение в требуемом смысле. При этом, если используются градиентные процедуры построения $H^{(k)}$, то введением дополнительной сопряженной функции w^* и с помощью приемов анализа чувствительности необходимо вначале привести вариации критерия качества и ограничений к виду $\langle F_H^{(k)}, \delta H^{(k)} \rangle$, где угловыми скобками обозначается соответствующая операция скалярного произведения. Вектор-функция $F_H^{(k)}$ зависит от текущих значений компонент управляющего вектора, а также значе-

ний фазовых и сопряженных переменных на данном шаге k последовательной оптимизации: $F_H^{(k)} = F(H^{(k)}, w^{(k)}, w^{*(k)})$. Полагая, в частности

$$\langle a, b \rangle = \int_{\Omega} ab \, dx$$

выпишем вариации выражений (1.3), (1.5), (1.6):

$$\begin{aligned} \delta M &= \langle f, \delta H \rangle = \langle f_v, \delta v \rangle + \langle f_h, \delta h \rangle, & \delta Q &= \langle q, \delta w \rangle, & \delta W &= \langle e_w, \delta w \rangle \\ f_v &= (\rho^+ - \rho^0)h, & f_h &= \rho^0 + (\rho^+ - \rho^0)v, & e_w &= S^{-1}(w/\|w\|_p)^{p-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выражение для вариации минимизируемого функционала δM имеет требуемую структуру, а подынтегральные выражения для вариаций δQ и δW не содержат сомножителем вариацию управляющего вектора δH . Определим в явном виде зависимость вариаций δQ и δW от вариаций δH или, иными словами, получим формулу чувствительности ограничений к вариациям управляющих функций.

С этой целью выпишем краевую задачу (1.4) в вариациях и введем сопряженную функцию w^* . Умножим уравнения и граничные условия в вариациях на w^* и проинтегрируем полученные выражения соответственно по области Ω и границе Γ . Наложив на w^* условия

$$w^* = 0, \quad x \in \Omega_0; \quad L_T^* w^* = 0, \quad x \in \Gamma \quad (2.2)$$

где L_T^* — сопряженный оператор граничных условий, получим следующее соотношение, связывающее вариацию управляющих функций $\delta v, \delta h$ с вариацией прогибов δw :

$$\langle F_v, \delta v \rangle + \langle F_h, \delta h \rangle + \langle L^* w^*, \delta w \rangle = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.3)$$

$$F_v = w_{,ij}^* \frac{\partial D}{\partial v} \beta_{ijhi} w_{,hi}, \quad F_h = w_{,ij}^* \frac{\partial D}{\partial h} \beta_{ijhi} w_{,hi}$$

$$L^* w^* = (D \beta_{ijhi} w_{,ij}^*)_{,hi} + 1/2 c (1 + \operatorname{sgn} w) w^*$$

Если при условии (2.2) в задачах Φ_Q и Φ_W определить функцию w^* соответственно как решение уравнения

$$L^* w^* = -q, \quad L^* w^* = -e_w \quad (2.4)$$

то, сложив вариации δQ и δW из (2.1) с выражением (2.3), заключаем, что записанные в вариациях изопериметрические условия (1.9) имеют следующую искомую структуру требуемого вида:

$$\delta Q = \langle F_H, \delta H \rangle + 2\varphi_Q \delta \varphi_Q, \quad \delta W = \langle F_H, \delta H \rangle + 2\varphi_W \delta \varphi_W \quad (2.5)$$

где компоненты вектор-функции $F_H = (F_v, F_h)$ определяются согласно (2.3) после решения соответствующих прямых и сопряженных задач (1.4), (2.4).

Учет ограничений $0 < H^- \leq H(x) \leq H^+$ из (1.1), (1.2) можно осуществить несколькими способами. Так, введем вспомогательную вектор-функцию $\psi(x)$ по закону

$$H(x) = 1/2 [H^+(x) + H^-(x)] + 1/2 [H^+(x) - H^-(x)] \sin \psi(x)$$

произвольная вариация которой никогда не нарушает указанных ограничений. Следовательно, не умаляя общности, можно считать, что первые ограничения в (1.1), (1.2) выполняются автоматически и вариации δH произвольны.

При необходимости можно учесть и вторые ограничения в (1.1), (1.2), записанные в виде изопериметрических условий (1.7). Так как в подынтегральные выражения указанных условий входят лишь компоненты управляющего вектора, то вариация ограничений (1.7) имеет требуемую для градиентных методов структуру. К примеру, записав в вариациях пер-

вое ограничение из (1.7), получим

$$\langle e_v, \delta v \rangle + 2\Phi_v \delta \Phi_v = 0 \quad (2.6)$$

$$e_v = S^{-1} (\Phi^{p-2} \|\Phi_v\|^{1-p} v_i)_i; \quad \Phi_v = (v_i, v_i)^{1/2}$$

Очевидно, что аналогичную выражению (2.6) структуру имеет и записанное в вариациях второе ограничение из (1.7).

На базе выписанных выражений построим эффективную процедуру вычисления улучшающей поправки δH в рассматриваемых задачах оптимизации композитных пластин на упругом основании. Для краткости опишем случай с одним изопериметрическим условием и скалярной управляющей функцией.

Пусть на каждом шаге k последовательной оптимизации вариации минимизируемого функционала Φ_0 и изопериметрического условия $\Phi_1=0$ записаны с использованием формул (2.1), (2.5) в виде скалярных произведений

$$\delta \Phi_0^{(k)} = \langle f^{(k)}, \delta H^{(k)} \rangle, \quad \delta \Phi_1^{(k)} = \langle e^{(k)}, \delta H^{(k)} \rangle \quad (2.7)$$

Индексы k далее опустим. Необходимо построить такую вариацию управляющей функции δH , которая, не нарушая изопериметрического условия $\Phi_1=0$, приводит на каждом шаге оптимизации к уменьшению функционала качества Φ_0 , т. е. обеспечивает выполнение условий $\delta \Phi_0 = \langle f, \delta H \rangle \leq 0$, $\delta \Phi_1 = \langle e, \delta H \rangle = 0$. Искомая вариация имеет вид

$$\delta H = \tau_0 \left[-f + \frac{\langle f, e \rangle}{\langle e, e \rangle} e \right] + \tau_1 \Delta \Phi_1 \left[\frac{e}{\langle f, e \rangle} - \frac{f}{\langle f, f \rangle} \right] \frac{\langle f, e \rangle \langle f, f \rangle}{\langle e, e \rangle \langle f, f \rangle - \langle f, e \rangle^2} \quad (2.8)$$

При $\tau_0 > 0$, где τ_0 — шаг по градиенту, и $\tau_1 = 0$ формула (2.8) совпадает с применявшимися ранее в [7] выражениями для вариаций управляющей функции в алгоритмах метода проекции градиента. При $\tau_1 = 1$ в формуле для вариации появляется второе слагаемое, призванное компенсировать в исходном изопериметрическом условии $\Phi_1=0$ рассогласование $\Delta \Phi_1 = -\Phi_1$, обусловленное вычислительными погрешностями. Подключение корректирующего слагаемого может осуществляться как на тех шагах оптимизации, на которых значение модуля невязки $|\Delta \Phi_1|$ начинает превышать заданную величину, так и на каждом шаге. Отметим, что в отличие от формул метода условного градиента, использованных в [9] и допускающих на некоторых шагах оптимизации незначительный рост минимизируемого функционала, вариация (2.8) при $\tau_1 = 1$ приводит к монотонному уменьшению функционала Φ_0 , т. е. к выполнению условий (2.7).

3. Выпуклые квадратурно-разностные аналоги функционала энергии. Необходимость неоднократного решения прямых задач (краевых задач отыскания текущей фазовой и сопряженной переменной w, w^*), обусловленная существом метода последовательной оптимизации, в котором на каждом шаге улучшающая поправка $\delta H^{(k)}$ строится с использованием текущих значений $w^{(k)}$ и $w^{*(k)}$, требует разработки экономичных и эффективных схем подсчета полей этих функций.

Стесненные прогибы пластины находим из решения вариационной задачи

$$J = J^0 + J^1 + J^2 - J^3 \rightarrow \min_w \quad (3.1)$$

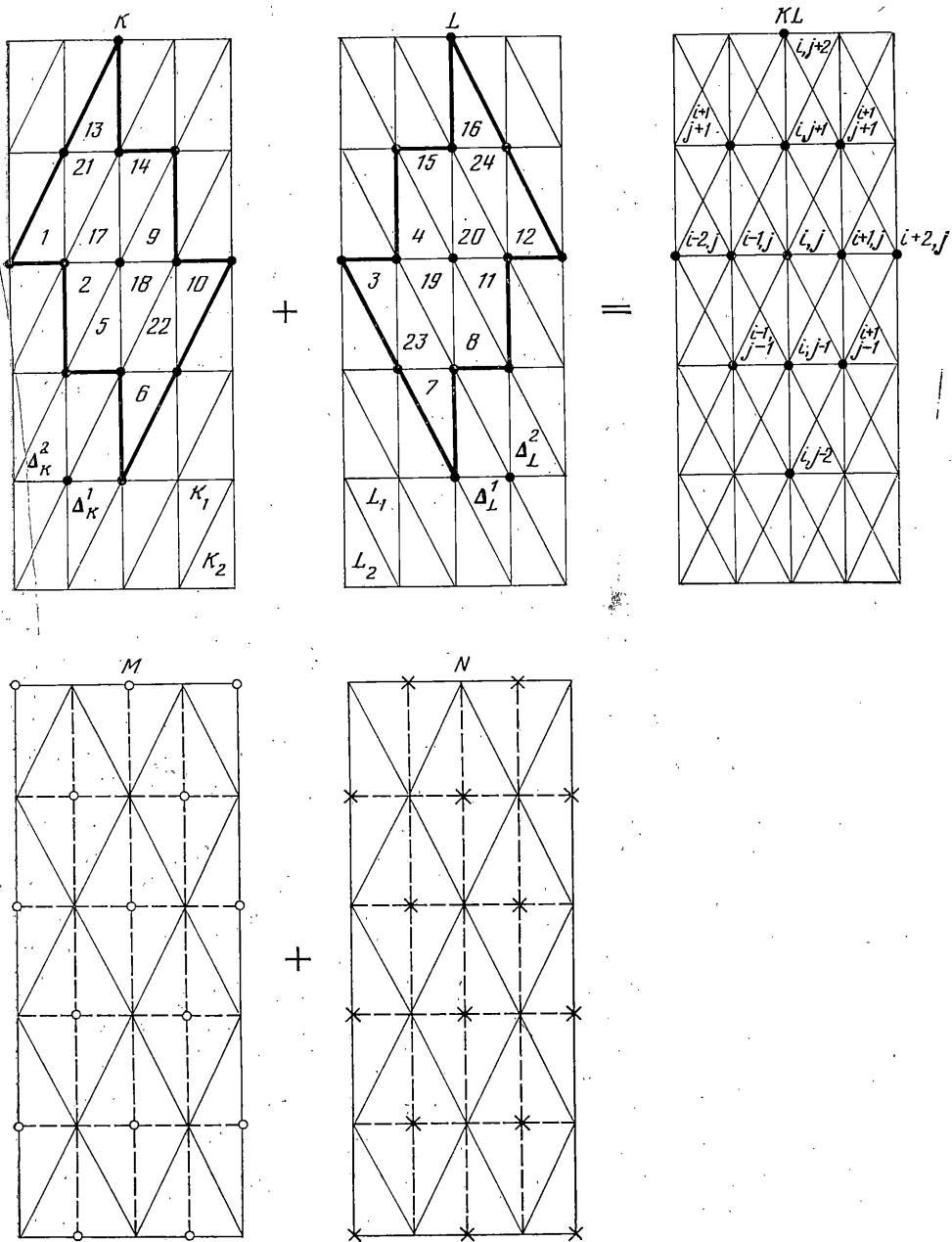
$$J^0 = 1/2 \int_{\Omega} D(x) U(x) dx, \quad J^1 = (1-\nu) \int_{\Omega} D(x) w_{,12}^2 dx$$

$$J^2 = 1/2 \int_{\Omega} c(x) (1 + \operatorname{sgn} w) w^2 dx, \quad J^3 = \int_{\Omega} q w dx$$

$$U(x) = w_{,11}^2 + 2\nu w_{,11} w_{,22} + w_{,22}^2$$

$$w = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad l_{\Gamma} w = 0, \quad x \in \Gamma$$

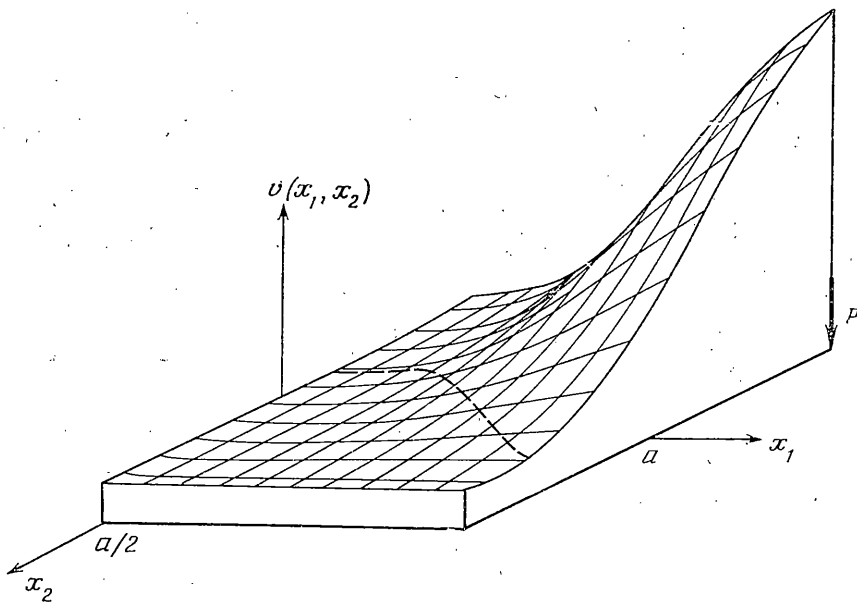
где l_{Γ} — оператор существенных краевых условий.



Фиг. 1

Структура уравнений (1.4), (2.4) для фазовой и сопряженной переменной совпадает, что при отыскании полей прямых и сопряженных функций вариационно-разностным методом определяет одинаковую структуру соответствующих минимизируемых функционалов. Последнее обстоятельство, в свою очередь, позволяет единообразно выписывать квадратурно-разностные аналоги построенных функционалов.

Выписывая конечно-разностные приближения функционалов, важно добиться того, чтобы полученные в результате аппроксимации квадратурно-разностные схемы были выпуклы на вводимых сетках разбиения области Ω , т. е. сопоставляли строго выпуклым функционалам их строго выпуклые по сеточным переменным аналоги. Кроме того, искомая схема заданной точности должна быть экономичной, т. е. по возможности простой и требующей наименьшего числа обращений к вычислению подынтегральных выражений [10].



Фиг. 2

Опишем методику построения схем, отвечающих перечисленным требованиям в вариационных задачах изгиба неоднородных пластин, аппроксимируя сумму $J^* = J^0 + J^1$, являющуюся составной частью минимизируемого функционала энергии изгибаемой пластины (3.1).

Для двумерных вариационных задач плоской теории упругости в [10] было показано, что выпуклые схемы обладают определенного рода «асимметрией», которая обусловлена необходимостью при аппроксимации функционала энергии деформации, содержащего частные производные первого порядка, использовать сетки разбиения K или L (фиг. 1), образованные соответственно двумя типами треугольных ячеек K_1, K_2 или L_1, L_2 , в сумме составляющих прямоугольник ($K = K_1 + K_2$ или $L = L_1 + L_2$).

В [9] на сетке KL (фиг. 1), образованной формальным наложением треугольных сеток K и L и обладающей, в отличие от последних, высокой степенью симметрии, удалось получить симметричные квадратурно-разностные аналоги функционалов энергии, включающие все достоинства экономичных выпуклых «асимметричных» схем. Указанное обстоятельство побуждает использовать прием наложения сеток и при аппроксимации функционала изгибной энергии $J^* = J^*(w_{,11}, w_{,12}, w_{,22})$, содержащего частные производные второго порядка. Воспользуемся возможностью задания симметричной сетки KL путем формального наложения как сеток K и L , так и двух «асимметричных» сеток M и N , образующих ромбовидные ячейки, которые, согласно фиг. 1, в свою очередь состоят из четырех треугольных ячеек (по две ячейки из каждой сетки K и L). Построим квадратурно-разностный аналог функционала J^* на сетке KL с помощью наложения асимметричных схем, выбрав для каждого слагаемого J^0 и J^1 свой тип сеток разбиения области Ω . Выбор сеток осуществим исходя из вида частных производных, входящих в подынтегральные функции рассматриваемых интегралов. Определяя тип сетки, потребуем, чтобы все узлы, участвующие в аппроксимации данной подынтегральной функции, принадлежали одной и той же ячейке разбиения. Так, подынтегральную функцию из J^0 , содержащую комбинацию вторых производных $w_{,11}$ и $w_{,22}$, отнесем к ромбовидным ячейкам M или N , а подынтегральную функцию из J^1 , включающую смешанную частную производную $w_{,12}$, — к прямоугольным ячейкам K или L . Тем самым выпуклость квадратурно-разностного аналога функционала J^* обусловлена, во-первых, «асимметрией», возникающей из-за аппроксимации слагаемых J^0 и J^1 на ячейках различ-

ной конфигурации, и, во-вторых, возможностью представления прямоугольных и ромбовидных ячеек соответствующей комбинацией треугольных ячеек, принадлежащих асимметричным сеткам K и L . Последнее обстоятельство, в свою очередь, позволяет представить квадратурно-разностный аналог в виде формальной суммы двух асимметричных схем, каждая из которых выписана на одном типе треугольных сеток K и L .

Следуя предложенной методике, введем сеточную функцию w^{ij} , заданную на множестве точек (узлов) $P = P_{ij}$. Точки P_{ij} лежат в области $\Omega \{-a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b\}$ на пересечении прямых $x_1^i = -a + i\Delta_1$, $x_2^j = -b + j\Delta_2$. Здесь $i=0, \dots, i^*$, $j=0, \dots, j^*$, $i^* = 2a/\Delta_1$, $j^* = 2b/\Delta_2$, Δ_1, Δ_2 — шаги разбиения. Точки P_{ij} , лежащие на Γ , назовем граничными, точки с индексами $i=1, i^*-1; j=1, j^*-1$ — приграничными, остальные точки $P^\circ \subset P$ — внутренними. Построим квадратурно-разностный аналог J° в точках P° .

Рассмотрим интеграл J° . Зададим на множестве P° конечно-разностный аналог функции $U(x)$, аппроксимировав в каждой внутренней точке P° частные производные $w_{,11}$ и $w_{,22}$ по формулам $w_{,11}(P_{ij}^\circ) \approx w_{,11}^{ij} = (w^{i+1, j} - 2w^{ij} + w^{i-1, j})\Delta_1^{-2}$, $w_{,22}(P_{ij}^\circ) \approx w_{,22}^{ij} = (w^{i, j+1} - 2w^{ij} + w^{i, j-1})\Delta_2^{-2}$. Имеем

$U(P_{ij}^\circ) \approx U^{ij} = (w_{,11}^{ij})^2 + 2vw_{,11}^{ij}w_{,22}^{ij} + (w_{,22}^{ij})^2$, откуда следует, что конечно-разностная аппроксимация функции $U(x)$ зависит от пяти значений сеточной функции w^{ij} , определенных в геометрическом центре и вершинах ромба, построенного при помощи точек $P_{i+1, j}, P_{i, j+1}, P_{i-1, j}, P_{i, j-1}$. Построим симметричный квадратурно-разностный аналог функционала J° как линейную комбинацию двух асимметричных схем, базирующихся на ромбовидных ячейках. С этой целью разобьем множество точек P_{ij}° на два подмножества P_{ij}^1 и P_{ij}^2 ($P^1 + P^2 = P^\circ$). Узлы P^1 и P^2 лежат в Ω , чередуясь в шахматном порядке (на фиг. 1 точки из P^1 и P^2 обозначены соответственно знаками \circ и $*$). Соединив точки подмножества P^2 (подмножества P^1) отрезками прямыми так, чтобы получить ромбовидные ячейки M_{ij} , $i, j \in P^1$ (N_{ij} , $i, j \in P^2$), содержащие внутри себя по одной точке из множества P^1 (P^2), приходим соответственно к асимметричным сеткам M и N , которые после формального наложения их друг на друга образуют «симметричную» KL -сетку. Так как сетка KL в свою очередь распадается на треугольные сетки K и L , то отнесем жесткостные характеристики пластины к треугольным ячейкам. Пусть $(\Delta_M^k)_{ij}$, $i, j \in P^1$ и $(\Delta_N^k)_{ij}$, $i, j \in P^2$ ($k=1, \dots, 4$) — соответственно четыре прямоугольных треугольника, на которые диагонали ромба делят каждую ромбовидную ячейку M_{ij} или N_{ij} . Заменяем функцию $D(x)$ в ромбе M_{ij} (ромбе N_{ij}) ступенчатой функцией $(D_M^k)_{ij}$, $i, j \in P^1$ ($(D_N^k)_{ij}$, $i, j \in P^2$), $k=1, \dots, 4$, кусочно-постоянной в каждом треугольнике. Аппроксимировав в области Ω на сетке M (сетке N) функцию $U(x)$ ступенчатой функцией U_M^{ij} (U_N^{ij}), кусочно-постоянной в каждом ромбе M_{ij} , N_{ij} , приближенно заменим интеграл J° одним из следующих двух «симметричных» квадратурно-разностных аналогов

$$J^\circ \approx I_M^\circ = 1/2 \sum_{i, j \in P^1} \left[U_M^{ij} \sum_{k=1}^4 (D_M^k \Delta_M^k)_{ij} \right] + I_\Gamma^M \quad (3.2)$$

$$J^\circ \approx I_N^\circ = 1/2 \sum_{i, j \in P^2} \left[U_N^{ij} \sum_{k=1}^4 (D_N^k \Delta_N^k)_{ij} \right] + I_\Gamma^N$$

где слагаемые I_Γ^M и I_Γ^N включают сумму по приграничным и граничным узлам.

Рассмотрим интеграл J^1 . Аппроксимировав во внутренних точках P_{ij}° смешанную производную $w_{,12}(x)$ ее конечно-разностным аналогом $w_{,12}(P_{ij}^\circ) \approx w_{,12}^{ij} = (w^{i+1, j+1} - w^{i, j+1} - w^{i+1, j} + w^{ij})\Delta_1^{-1}\Delta_2^{-1}$, приближенно заменим функцию $w_{,12}^2(x)$ ступенчатой функцией $(w_{,12}^{ij})^2$, кусочно-постоянной в каждой прямоугольной ячейке K_{ij} или L_{ij} с вершинами $P_{ij}, P_{i, j+1}, P_{i+1, j}, P_{i+1, j+1}$. Заменяв в каждом из двух треугольников $(\Delta_K^m)_{ij}$ или $(\Delta_L^m)_{ij}$ ($m=1, 2$, $i, j \in P^\circ$), у которых точка P_{ij}° служит вершиной прямого

угла (фиг. 1), непрерывную функцию $D(x)$ кусочно-постоянной функцией $(D_K^m)_{ij}$ или $(D_L^m)_{ij}$, получим, что интеграл J^1 можно аппроксимировать как линейную комбинацию следующих двух имеющих одинаковую структуру асимметричных квадратурно-разностных аналогов

$$(u_K^1 = (w_{i,12}^{i-1,j})^2, \quad u_K^2 = (w_{i,j-1}^{i,j-1})^2, \quad u_L^1 = (w_{i,12}^{ij})^2, \quad u_L^2 = (w_{i,12}^{i-1,j-1})^2)$$

$$J^1 \approx I_K^1 = (1-\nu) \sum_{i,j \in P_0} \sum_{m=1}^2 (D_K^m u_K^m \Delta_K^m)_{ij} + I_{\Gamma^K} \quad (3.3)$$

$$J^1 \approx I_L^1 = (1-\nu) \sum_{i,j \in P_0} \sum_{m=1}^2 (D_L^m u_L^m \Delta_L^m)_{ij} + I_{\Gamma^L}$$

где слагаемые I_{Γ^K} и I_{Γ^L} содержат суммы по приграничным и граничным точкам.

Структура слагаемых I_{Γ^K} , I_{Γ^L} , I_{Γ^M} , I_{Γ^N} зависит от вида граничных условий и специфики численной реализации алгоритма отыскания сеточной функции. Так, можно ввести фиктивные законтурные узлы, либо аппроксимировать в граничных и приграничных точках частные производные по конечно-разностным схемам «вперед» и «назад» второго порядка точности [11] типа

$$w_{i,11}(P_{ij}) \approx (2w^{ij} - 5w^{i-1,j} + 4w^{i-2,j} - w^{i-3,j}) \Delta_1^{-2}$$

Взяв для каждого типа сеток среднюю величину от выписанных в (3.2), (3.3) «асимметричных» сумм, получим на KL -сетке искомый «симметричный» аналог $J^* \approx I^* = 1/2 (I_M^0 + I_N^0 + I_K^1 + I_L^1)$. Поменяв порядок суммирования в выражениях (3.2), (3.3) (т. е. суммируя не по узлам, а по треугольникам), при необходимости можно представить аналог I^* как формальную сумму двух «асимметричных» аппроксимаций, выписанных лишь на треугольных сетках K и L (фиг. 1). Остальные слагаемые, входящие в минимизируемый функционал вариационной задачи изгиба пластины (3.1), аппроксимируем выпуклыми квадратурно-разностными аналогами на сетке KL , придерживаясь методики, изложенной в [10], и в итоге получим искомую аппроксимацию I функционала J .

4. Алгоритмы решения прямых задач отыскания прогибов пластины. Сеточную функцию w^{ij} , минимизирующую конечно-разностный аналог I , отыскиваем итерационными методами. При наличии ограничений на прогибы w в качестве базового метода выберем метод локальных вариаций [12] с оптимальными шагами варьирования [1, 13], а при отсутствии ограничений на диапазон изменения сеточной функции реализуем стационарный итерационный процесс Гаусса — Зейделя [14] с последующей модификацией классических схем выбранных методов и использованием приемов, ускоряющих процесс сходимости.

Учет односторонности упругого основания, т. е. учет возможности отслапывания пластины от поверхности упругого основания в силу отсутствия сцепления между основанием и пластиной, осуществляется с помощью следующего алгоритма типа «прогноз — коррекция». На шаге «прогноз», заменив в квадратурно-разностном аналоге I функционала (3.1) величину w^{ij} на $w^{ij} + l^{ij}$ и продифференцировав полученное выражение по l^{ij} , получим явную формулу для оптимального шага варьирования l_{opt}^{ij} , обеспечивающего наискорейшее поточечное убывание квадратурно-разностной аппроксимации функционала в фазовом сеточном пространстве. Если при этом в одной из треугольных ячеек с вершиной в данном узле усредненное значение прогибов становится отрицательным (пластина в данной ячейке «отлипает» от основания), то выполняется шаг «коррекция» и новое значение оптимального шага варьирования сеточной функции w^{ij} в рассматриваемом узле подсчитывается согласно изложенной методике с нулевым значением жесткости основания.

Для увеличения эффективности вычислительного процесса использовалось сочетание однослойных и многослойных итерационных схем. В од-

нослойных схемах на k -м шаге итерационного процесса минимизации конечно-разностного аналога функционала J новые значения сеточной функции w_{k+1}^{ij} , вычисляемые по формуле $(l_{\text{opt}}^{ij})_k$ — оптимальный шаг варьирования, вычисленный согласно алгоритму прогноз — коррекция):

$$w_{k+1}^{ij} = w_k^{ij} + \alpha (l_{\text{opt}}^{ij})_k \quad (4.1)$$

сразу же использовались для подсчета $(l_{\text{opt}}^{mn})_k$ в следующем узле P_{mn} . Указанный алгоритм при $\alpha=1$ в зависимости от наличия или отсутствия ограничений на искомые значения сеточной функции реализовывал соответственно метод локальных вариаций с оптимальными шагами варьирования или метод Гаусса — Зейделя. Для ускорения скорости сходимости однослойного итерационного процесса с помощью численного эксперимента подбирались значения параметра релаксации α . Эти значения зависят от граничных условий закрепления пластины и, как правило, лежат в диапазоне 1,53—1,76, т. е. при минимизации данного типа функционала энергии композитной пластины реализуется однослойный итерационный процесс, отвечающий методу верхней релаксации.

Целесообразность включения в общий итерационный процесс многослойной схемы в каждом конкретном случае нагружения и закрепления конструкции следует проверять численным экспериментом. При этом в каждом итерационном процессе важно установить оптимальный порядок чередования вычисления сеточной функции по однослойной и многослойной схемам, т. е. отыскать наилучший период m циклического подключения многослойной схемы к базовой однослойной схеме. Так, для сочетания однослойной схемы (4.1) и исследованного В. И. Германом варианта двухслойной схемы

$$w_{k+1}^{ij} = \alpha w_k^{ij} + (1-\alpha) w_{k-1}^{ij} \quad (4.2)$$

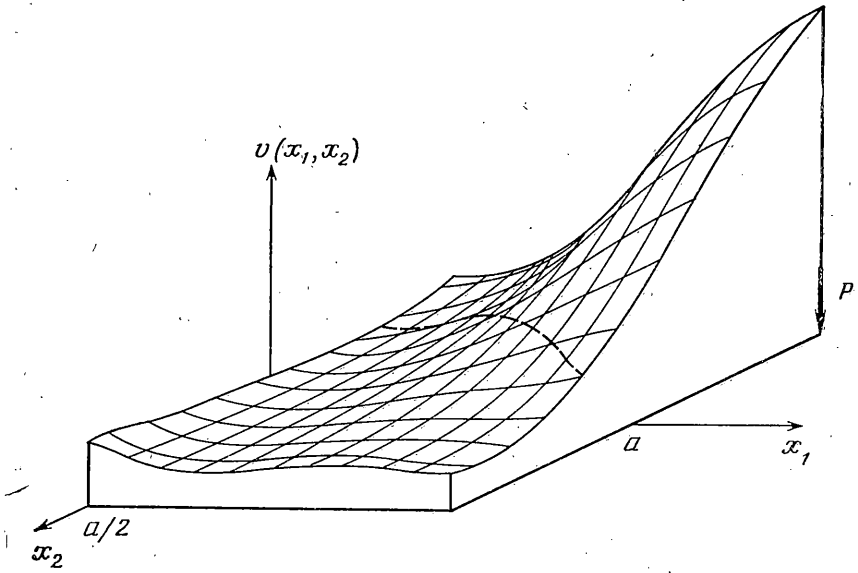
в котором параметр α отыскивается в результате минимизации нормы невязки $\delta = w_{n+1}^{ij} - w_n^{ij}$ на двух последовательных итерациях по двухслойной схеме, оптимален шаг из 75 шагов по схеме (4.1) и одного шага по схеме (4.2). Для консольных пластин итерационный процесс с $m \sim 75$ имеет большую скорость сходимости, чем все остальные процессы, построенные на циклическом чередовании схем (4.1) и (4.2) и, в частности, в два раза превышает скорость сходимости чисто двухслойного процесса с $m=1$.

Дальнейшее ускорение скорости сходимости построенного выше итерационного процесса можно добиться, реализовав в нем методику экстраполяции решений, подробно изложенную в работе [8]. Такое последовательное использование различных приемов, увеличивающих скорость сходимости итерационного процесса, позволяет в шесть раз сократить время, необходимое для расчета «прямой» задачи отыскания прогибов пластин на упругом основании базовым методом локальных вариаций с оптимальными шагами варьирования.

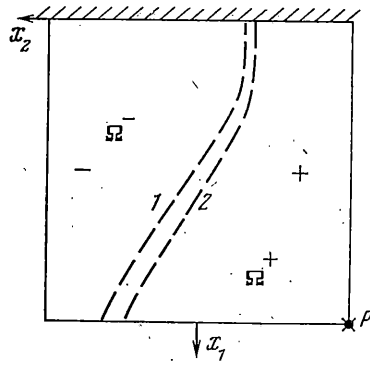
5. Оптимизация внутренней структуры консольных пластин. Для численной реализации предложенных методик расчета и оптимизации композитных пластин рассмотрим квадратные пластины $\Omega \{0 \leq x_1 \leq a, -a/2 \leq x_2 \leq a/2\}$, консольно закрепленные вдоль стороны $x_1=0$ и взаимодействующие с упругим основанием $\Omega_c = \{0 \leq x_1 \leq a, -a/2 \leq x_2 \leq a/2\}$ ($\Omega_c \equiv \Omega$). Пусть в точке $x_1=a, x_2=-a/2$ на пластину действует сосредоточенная нагрузка P .

Выбрав для аппроксимации эффективного модуля упругости $E(x)$ хаотически армированной включениями композитной пластины следующую линейную зависимость эффективных коэффициентов Ламе λ, μ от концентрации арматуры $v(x)$ [15] $\lambda = (1-v)\lambda^0 + E^+v/15, \mu = (1-v)\mu^0 + E^+v/15$, запишем изгибную жесткость пластины $D(x)$ в линеаризованном по v виде, напоминающем по форме правило смесей [16]:

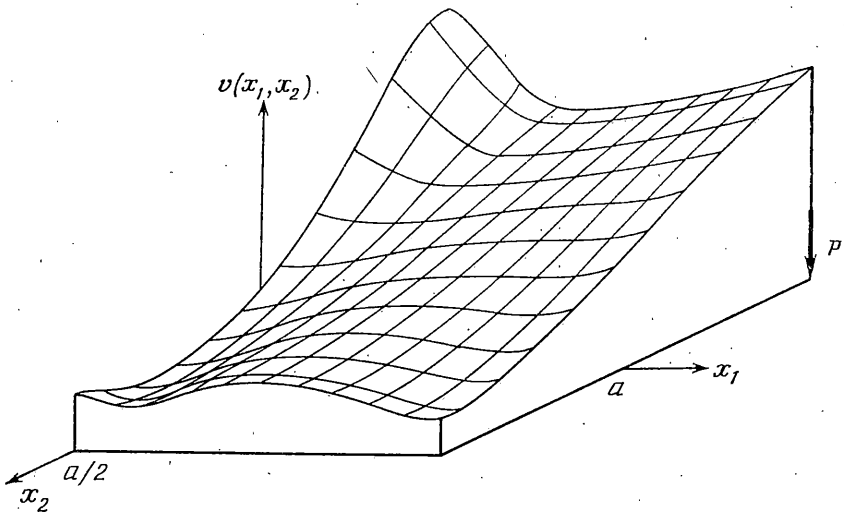
$$D(x) = I(x)E(x) = h^3 [Av(x) + B], \quad A = CB$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$$B = \frac{\mu^\circ(3\lambda^\circ + 2\mu^\circ)}{12(\lambda^\circ + \mu^\circ)(1 - \nu^2)}, \quad C = \frac{E^+(3\lambda^\circ\lambda^\circ + 2\lambda^\circ\mu^\circ + \mu^\circ\mu^\circ)}{180\mu^\circ(3\lambda^\circ + 2\mu^\circ)(\lambda^\circ + \mu^\circ)(1 - \nu^2)}$$

где ν — эффективный коэффициент Пуассона композитного материала.

Значения констант в линеаризованном представлении $E(x)$ существенно зависят от используемой теории композиционных материалов [16] и могут быть получены из эксперимента.

Рассмотрим оптимизационную задачу Φ_w из п. 1: требуется минимизировать массу армирующих включений $\nu(x)$ при соответствующих ограничениях на прогибы пластины и характер управляющей функции.

Особенности методики наложения сеток разбиения при выписывании квадратурно-разностных аналогов функционала энергии можно естественным образом использовать для повышения точности получаемых распределений управляющей функции и минимизации затрачиваемого процессорного времени на ЭВМ. С этой целью разобьем KL -сетку на сетки K и L (фиг. 1) и, считая искомую управляющую функцию $\nu(x)$ кусочно-постоянной на треугольных ячейках K_1, K_2 и L_1, L_2 , «распараллелим» процесс оптимизации, т. е. осуществим одновременный поиск оптимальных решений по формуле (2.8) на двух сетках K и L , решая при этом прямую задачу отыскания прогибов пластины на исходной KL -сетке. «Параллельный» процесс оканчивается, если модуль градиента управляющей функции на каждой из сеток становится меньше заданной величины.

Определив в треугольных ячейках $(\Delta_K^m)_{ij}, (\Delta_L^m)_{ij}$ ($m=1, 2; i, j \in P_{ij}$), принадлежащих сеткам K и L , два набора значений управляющих функций $(\nu_K^m)_{ij}, (\nu_L^m)_{ij}$ ($m=1, 2; i, j \in P$), получим по формулам (индексы i, j опущены):

$$\begin{aligned} \nu_{KL}^1 &= (\nu_K^1 E_K^1 + \nu_L^1 E_L^1) (E_K^1 + E_L^1)^{-1}, & \nu_{KL}^2 &= (\nu_K^2 E_K^2 + \nu_L^2 E_L^2) (E_K^2 + E_L^2)^{-1} \\ \nu_{KL}^3 &= (\nu_K^2 E_K^2 + \nu_L^2 E_L^2) (E_K^2 + E_L^2)^{-1}, & \nu_{KL}^4 &= (\nu_K^1 E_K^1 + \nu_L^1 E_L^1) (E_K^1 + E_L^1)^{-1} \end{aligned}$$

где E_K^m, E_L^m ($m=1, 2$) — соответственно значения функционала J (энергии пластины) в ячейках K_m и L_m ($m=1, 2$), один набор значений управляющей функции $(\nu_{KL}^n)_{ij}$ ($n=1, \dots, 4; i, j \in P_{ij}$), но заданной уже на более мелком разбиении области Ω — в треугольных ячейках KL -сетки (фиг. 1).

На фиг. 2 и 3 изображены оптимальные распределения армирующих включений соответственно для двух качественно отличающихся случаев взаимодействия композитной пластины с упругим основанием: пластины, спаянной с поверхностью основания, и пластины, свободно покоящейся на одностороннем упругом основании без трения и сцепления. На фиг. 4 значками $+$ и $-$ помечены соответственно области положительных и отрицательных (в выбранной системе координат) прогибов пластины. Границы раздела областей изображены на фиг. 2–4 штриховыми линиями и помечены на фиг. 4 цифрами 1 и 2 соответственно для спаянной и не скрепленной с основанием пластины.

В первом случае при любом знаке прогибов пластины перемещения срединной поверхности пластины и поверхности упругого основания совпадают. Во втором случае, в области Ω^- , где прогибы пластины отрицательны (см. фиг. 4), пластина «отлипает» от поверхности основания, а осадка поверхности основания становится равной нулю. В области $\Omega^+ = \Omega \setminus \Omega^-$, где прогибы пластины под действием силы P положительны, осадка поверхности основания равна по величине прогибам пластины.

Указанные обстоятельства объясняют существенное различие в характере распределения армирующего материала в оптимальных пластинах для рассматриваемых случаев.

В первом случае сцепление с основанием уменьшает величину действующего в заделке $x_1=0$ момента и позволяет изъять часть армирующего материала из прилегающей к закреплению области.

Во втором случае, в области Ω^- , где происходит нарушение контакта с упругим основанием (отсутствует подкрепляющий эффект основания), всю нагрузку несет на себе пластина, что приводит к увеличению момен-

тов в ней и, тем самым, к необходимости увеличения степени армирования оптимизируемой конструкции. При этом профиль распределения армирующего материала в сечении $x_2 = a/2$ качественно напоминает профиль распределения жесткости в оптимальной консольно шарнирно опертой балке.

Для случаев, приведенных на фиг. 2, 3, величина безразмерной жесткости упругого основания принималась равной 10^3 . Для выявления качественных особенностей распределения армирующих включений в оптимальных проектах в зависимости от жесткости основания были получены решения для значений c , равных 10^2 и 10^5 . На фиг. 5 приведена картина оптимального распределения армирующих включений для «податливого» основания ($c = 10^2$). Так, согласно фиг. 5, прослеживается закономерная концентрация армирующего материала в зоне заделки пластины в окрестности точки $x_1 = 0$, $x_2 = -a/2$. При этом, в силу малости величины c , пластина вдавливается в основание во всей области Ω и отлипания не происходит. При большой жесткости основания ($c = 10^5$) армирующий материал концентрируется в области, близкой к точке приложения силы, а в остальной области в силу малой осадки упругого основания степень армирования минимальна.

Из анализа полученных результатов можно сделать вывод, что за счет рационального использования работы двусторонних упругих связей удается лучше перераспределить в тонкостенной конструкции напряженно-деформированное состояние и достичь большего выигрыша от оптимизации по сравнению с конструкциями, имеющими односторонние упругие связи.

Наряду с полученным в [2, 3] фактом увеличения выигрыша от оптимизации при увеличении жесткости упругого основания, полученные выше результаты подтверждают, что выигрыш от оптимизации увеличивается с увеличением жесткости упругих связей.

Алгоритм метода последовательной оптимизации композитных пластин, взаимодействующих с упругим односторонним основанием, реализован в виде набора программ, написанных на языке ФОРТРАН-4. Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1060. Время работы центрального процессора составляло менее одной минуты при отыскании поля перемещений изгибаемой конструкции на сетке 11×11 . Выпуклость предложенной квадратурно-разностной аппроксимации функционала энергии проверялась на ЭВМ с использованием языка аналитических вычислений REDUCE-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каргвелишвили В. М. Численное решение двух контактных задач для упругих пластин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 68—72.
2. Ларичев А. Д. Оптимизация балки прямоугольного сечения, лежащей на упругом основании. — В кн.: Экспериментальные и теоретические исследования строительных конструкций и элементов. М.: Стройиздат, 1979, с. 46—50.
3. Баничук Н. В., Ларичев А. Д. Оптимизация балки с учетом упругости основания. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 6, с. 65—73.
4. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. М.: Мир, 1983. 479 с.
5. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
6. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости. — В кн.: Материалы 5-й Всесоюз. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1978, ч. 2, с. 3—14.
7. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Численное решение двумерных задач оптимизации упругих пластин. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1, с. 68—78.
8. Каргвелишвили В. М., Миронов А. А., Самсонов А. М. Численный метод решения задач оптимизации подкрепленных конструкций. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 2, с. 93—103.
9. Каргвелишвили В. М. Оптимальное проектирование упругих пластин, взаимодействующих с внешним тепловым полем. — Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 4, с. 175—186.
10. Баничук Н. В., Каргвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л. О разностно-квадратурных аппроксимациях выпуклых интегральных функционалов. — Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 2, с. 269—272.

11. Березин Н. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1959. 464 с.
12. Черноушко Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, т. 5, № 4, с. 749—754.
13. Черноушко Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
14. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 235 с.
15. Аннин Б. Д. Современные модели пластических тел. Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1975. 96 с.
16. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
17. Вологин В. В., Новицков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.X.1985