

УДК 539.375

## КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ В ПОВРЕЖДАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

АХУНДОВ М. Б., НИКИТИН Л. В., СУВОРОВА Ю. В.

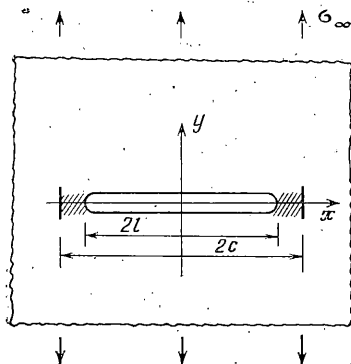
Как известно, разрушение материалов при нагрузках намного ниже их теоретической прочности связано с наличием и образованием в теле различного рода дефектов. Качественно их разделяют на два типа — это малые по своим размерам и рассеянные по всему объему дефекты, собственно и называемые поврежденностью, и крупные, магистральные трещины.

Существует много работ по оценке несущей способности материалов с дефектами обоого типа. Построены соответствующие теории прочности для тел с рассеянной поврежденностью [1–5 и др.] Наиболее достоверные результаты могут быть получены при совместном учете дефектов обоих типов. Отчасти это было сделано в работах [5–8] (обзор подобных работ см., например, в [9]), где учет наличия рассеянной поврежденности сводится к введению у вершины трещины на ее продолжении зоны предразрушения. В [10] рассматривается распространение магистральной трещины в поле мелких трещин (или дефектов), размер которых мал по сравнению с магистральной.

Представляет интерес и модель развития трещины в среде, в которой именно накопление повреждений фактически инициирует ее продвижение. Один из таких вариантов рассмотрен в [11]. В публикуемой работе предложен иной вариант, в котором критерий рассеянного разрушения основан на представлениях о последовательном характере накопления повреждений и непосредственно связан с определяющими уравнениями среды.

1. Рассмотрим процесс накопления повреждений и развития макротрещины в нагруженной тонкой неограниченной пластине (фиг. 1).

Отнесем пластину к декартовой системе координат  $xy$ . Трещину с начальной длиной  $2l_0$  расположим вдоль оси симметрично относительно оси  $y$ . Толщину пластины будем считать малой по сравнению с размером трещины так, что осуществляется плосконапряженное состояние. Нагружается пластина перпендикулярно плоскости трещины на бесконечности напряжением  $\sigma_y = \sigma_\infty$ .



Фиг. 1

Свойства материала среды будем описывать моделью наследственно упругого тела. Кроме того, будем считать, что под действием напряжений в материале происходит процесс накопления повреждений, который может быть описан также соотношениями наследственного типа [12, 13]:

$$e_{ij} = 1/2 \mu_0^{-1} (1 + M_R^* + M_D^*) s_{ij} \quad (1.1)$$

$$e = k_0 (1 + L_R^* + L_D^*) \sigma$$

где  $s_{ij}$  и  $e_{ij}$  — девиаторы, а  $\sigma$  и  $e$  — следы тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $e_{ij}$  соответственно,  $\mu_0$  и  $k_0$  — мгновенные модули сдвига и объемного сжатия. Через  $M^*$  и  $L^*$

обозначим операторы наследственного типа, описывающие реологические свойства среды (с индексом  $R$ ) и накопление в ней повреждений (с индексом  $D$ ):

$$M^* f = \int_0^t M(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad L^* f = \int_0^t L(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Операторы  $M_R^*$ ,  $L_R^*$  и  $M_D^*$ ,  $L_D^*$  по форме совпадают, хотя и описывают различные физические явления. Наиболее существенное различие этих операторов заключается в том, что операторы повреждаемости в противоположность операторам, описывающим реологические свойства среды, могут не обладать затухающей памятью. В дальнейшем, чтобы сосредоточить основное внимание на учете поврежденности материала, примем для простоты материал упругим  $M_R^* = L_R^* = 0$ . Будем считать, что материал претерпевает частичное разрушение, т. е. теряет сплошность без потери несущей способности, если максимальная растягивающая деформация достигает критического значения  $\varepsilon_r$  [13]. Это предположение подтверждается опытными данными, например, работы [14]. В рассматриваемой задаче о трещине максимальной растягивающей деформацией будет деформация  $\varepsilon_y$  на продолжении трещины

$$\varepsilon_y = \varepsilon_r \quad (1.3)$$

После достижения критического значения деформация обращается в бесконечность, т. е. появляется скачок компоненты смещения  $v$ , направленной по оси  $y$ . Напряжение, при котором материал переходит в частично разрушенное состояние, будет зависеть от развития во времени процессов деформирования и накопления повреждений. Оно определяется из соотношения (1.1) с помощью (1.3).

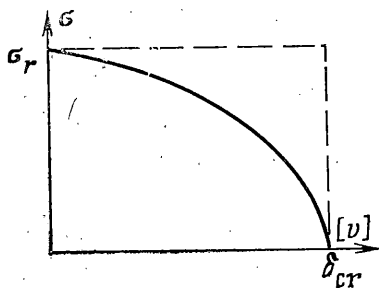
При мгновенном в квазистатическом смысле приложении нагрузки разрушающее напряжение  $\sigma_y = \sigma_c$  будет связано с деформацией разрушения  $\varepsilon_r$  зависимостью, следующей из (1.1), если в ней опустить оба оператора. Напряжение в частично разрушенном материале будет зависеть от скачка смещения  $[v]$  (фиг. 2). Будем считать, что в частично разрушенном элементе материала релаксация напряжений такова, что они принимают те же значения  $\sigma_r(t)$ , что и в разрушающемся элементе, т. е. в элементе, находящемся непосредственно перед кончиком трещины. Полное разрушение с потерей несущей способности происходит при достижении скачком смещения  $[v]$  некоторого критического значения, которое принимается константой материала [8] (квадратные скобки означают скачок заключенной в них величины):

$$[v] = \delta_{cr} \quad (1.4)$$

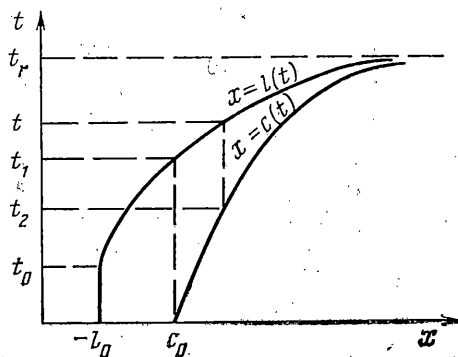
При таком подходе оказывается, что около кончика магистральной трещины возникает зона частичного разрушения, причем на границе этой зоны с неразрушенным материалом выполняется критерий (1.3), а на границе с магистральной трещиной — критерий (1.4).

2. Сформулируем на основе сделанных предположений о повреждаемости и разрушении среды математическую задачу о кинетике трещины в неограниченной пластине. Ввиду симметрии в произвольный момент времени  $t$  края трещины будут находиться на оси  $x$  в точках  $x = \pm l(t)$ . Нагрузка на бесконечности  $\sigma_y = \sigma_\infty$  прикладывается в момент времени  $t=0$  и затем остается неизменной. Материал на продолжении границы не может оставаться в сплошном состоянии, так как в противном случае там были бы неограниченные деформации, что запрещается условием (1.3). Поэтому на продолжении трещины появляется зона частичного разрушения материала, края которой располагаются на оси  $x$  в некоторых точках  $x = \pm c(t)$  (фиг. 1). В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть лишь верхнюю полуплоскость  $y > 0$ . На ее границе  $y=0$  должны выполняться следующие условия. Касательные напряжения отсутствуют всюду на границе, поскольку на трещине нагрузки отсутствуют по предположению, а вне трещины касательное напряжение должно быть равно нулю в силу симметрии

$$\tau_{xy} = 0, \quad y=0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.1)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Нормальное напряжение на самой трещине отсутствует, а в зоне частичного разрушения не зависит от  $x$  и равно значению  $\sigma_r(t)$ , которое достигнуто в рассматриваемый момент времени в элементе на продолжении зоны частичного разрушения  $x=\pm c(t)$ :

$$\sigma_y=0, \quad y=0, \quad |x|<l(t) \quad (2.2)$$

$$\sigma_y=\sigma_r(t), \quad y=0, \quad l(t)<|x|<c(t) \quad (2.3)$$

Вне трещины и зоны частичного разрушения материала ввиду симметрии отсутствует вертикальное смещение

$$v=0, \quad y=0, \quad |x|>c(t) \quad (2.4)$$

Условия нагружения вдали от трещины запишутся в виде

$$\sigma_y=\sigma_\infty, \quad \sigma_x=\tau_{xy}=0, \quad x^2+y^2 \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

На границе зоны частичного разрушения со сплошным материалом должно выполняться условие (1.3):

$$\epsilon_y=\partial v/\partial y, \quad y=0, \quad x=c(t) \quad (2.6)$$

Граница между трещиной и зоной частичного разрушения определяется условием (1.4):

$$[v]=2v=\delta_{cr}, \quad y=0, \quad x=\pm l(t) \quad (2.7)$$

Связь между напряжениями и деформациями в рассматриваемой линейно-упругой повреждающейся среде описывается при нагрузке линейными соотношениями наследственного типа. Трещина при рассматриваемой нагрузке может лишь возрастая. Граничные условия на трещине в зоне частичного разрушения и на бесконечности заданы в напряжениях. Все это позволяет применить к задаче (2.1)–(2.5) принцип соответствия между решениями задачи теории упругости и наследственной упругости и получить решения для напряжений, деформаций и перемещений через входящие в граничные условия функции  $\sigma_r(t)$ ,  $l(t)$  и  $c(t)$ . После нахождения решения этой задачи с помощью (2.6), (2.7) находятся считавшиеся известными функции  $\sigma_r(t)$ ,  $l(t)$  и  $c(t)$ .

Решение плоской задачи теории упругости для полуплоскости, граница которой свободна от касательных напряжений, выражается через единственную функцию  $\Phi(z)$  комплексного переменного  $z=x+iy$ , аналитическую в области, занимаемой телом [15]. Необходимые для дальнейшего формулы, выражающие напряжение  $\sigma_y$  и перемещение  $v$  через функцию  $\Phi(z)$ , имеют вид

$$\sigma_y=2 \operatorname{Re} \Phi(z)+2y \operatorname{Im} \Phi'(z) \quad (2.8)$$

$$2\mu v=(1+\kappa) \operatorname{Im} \varphi(z)-2y \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (2.9)$$

$$\varphi(z)=\int \Phi(z) dz$$

где  $\kappa$  — постоянная плоской задачи теории упругости, которая для рас-

смагриваемого случая плосконапряженного состояния связана с коэффициентом Пуассона  $\nu$  зависимостью  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ .

Граничные условия (2.1)–(2.5) позволяют записать функции  $\varphi(z)$  и  $\Phi(z)$  в виде

$$\varphi(z) = -\frac{i}{2} \sigma_{\infty} \sqrt{c^2 - z^2} - \frac{i\sigma_r}{2\pi} \int_l^c \ln \frac{\sqrt{c^2 - z^2} - \sqrt{c^2 - \xi^2}}{\sqrt{c^2 - z^2} + \sqrt{c^2 - \xi^2}} d\xi$$

$$\Phi(z) = \frac{i\sigma_{\infty} z}{2\sqrt{c^2 - z^2}} - \frac{i\sigma_r z}{\pi\sqrt{c^2 - z^2}} \int_l^c \frac{\sqrt{c^2 - \xi^2}}{z^2 - \xi^2} d\xi \quad (2.10)$$

Интегралы в (2.10) могут быть вычислены в явном виде, однако ввиду громоздкости результат не приводится. Ветвь радикала в (2.10) выбирается та, для которой  $\sqrt{c^2 - z^2} \cong iz$  при больших  $|z|$ . Поскольку деформации и напряжения в принятой модели среды должны быть ограниченными, функция  $\Phi(z)$  согласно (2.8) должна иметь конечный предел при  $z \rightarrow c$ . Отсюда следует, что должно выполняться равенство

$$l/c = \cos^2 \frac{1}{2} \pi \sigma_{\infty} / \sigma_r \quad (2.11)$$

Чтобы удовлетворить оставшимся граничным условиям, необходимо иметь выражения через функции  $\varphi(z)$  и  $\Phi(z)$  для  $\sigma_y$ ,  $\nu$  и  $\epsilon_y$  на оси  $y=0$ . С помощью (2.8) и (2.9) для этих функций имеем

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} \Phi(x), \quad \nu = \frac{\kappa+1}{2\mu} \operatorname{Im} \varphi(x), \quad \epsilon_y = \frac{\kappa-1}{2\mu} \operatorname{Re} \Phi(x) \quad (2.12)$$

Из принципа соответствия между решениями задач теории упругости и наследственной упругости следует, что в решении для рассматриваемой повреждающейся среды, описываемой соотношениями наследственной теории упругости, нужно поставить соответствующие операторы. Обозначим через  $\Omega^*$  и  $\Lambda^*$  интегральные операторы, которые получаются, если в соотношениях (2.12) заменить  $\kappa$  и  $\mu$  на операторы

$$\nu = \frac{\kappa_0+1}{2\mu_0} (1+\Lambda^*) \operatorname{Im} \varphi(x), \quad \epsilon_y = \frac{\kappa_0-1}{2\mu_0} (1+\Omega^*) \operatorname{Re} \Phi(x) \quad (2.13)$$

Очевидно, что  $\Lambda^*$  и  $\Omega^*$  — операторы того же типа, что и в (1.2), а нулем отмечены мгновенные значения соответствующих модулей. В случае, когда коэффициент Пуассона  $\nu$  постоянен,  $\Lambda^* = \Omega^*$  и они с учетом  $M_R^* = L_R^* = 0$  совпадают с оператором  $M_D^*$ .

Определим теперь входящие в (2.13) функции. С помощью (2.11) из (2.10) получим для  $\operatorname{Re} \Phi(x)$  при  $|x| < c$ :

$$\operatorname{Re} \Phi(x) = \frac{\sigma_r}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{l} \sqrt{\frac{c^2 - l^2}{x^2 - c^2}} \quad (2.14)$$

Для  $\varphi(x)$ , но уже при  $|x| < c$ , те же условия дают

$$\operatorname{Im} \varphi(x) = \frac{\sigma_2}{2\pi} \left( x \ln \frac{x\sqrt{x^2 - l^2} - l\sqrt{c^2 - x^2}}{x\sqrt{c^2 - l^2} + l\sqrt{c^2 - x^2}} - l \ln \frac{\sqrt{c^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - l^2}}{\sqrt{c^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - l^2}} \right) \quad (2.15)$$

Условие на границе зоны частичного разрушения (2.6) с помощью (2.14) приводятся к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$\sigma_r(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t-\tau) \sigma_2(\tau) \operatorname{arctg} \frac{c(\tau)}{l(\tau)} \sqrt{\frac{c^2(\tau) - l^2(\tau)}{c^2(t) - c^2(\tau)}} d\tau = \sigma_0 \quad (2.16)$$

Осталось не использованным лишь условие в кончике трещины (2.7). Вычислим с помощью (2.7), (2.13) и (2.15) скачок перемещения в кон-

чике движущейся трещины

$$[v]_{x=l(t)} = \frac{\kappa_0 + 1}{2\mu_0} \left\{ \frac{2}{\pi} \sigma_r(t) l(t) \ln \frac{c(t)}{l(t)} + \frac{1}{\pi} \int_{t_2}^t \Lambda(t-\tau) \sigma_r(\tau) \times \right. \\ \left. \times \left[ l(t) \ln \frac{l(t) \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} - l(\tau) \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}}{l(t) \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} - l(\tau) \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}} - \right. \right. \\ \left. \left. - l(\tau) \ln \frac{\sqrt{c^2(\tau) - l^2(t)} - \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}}{\sqrt{c^2(\tau) - l^2(t)} - \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)}} \right] d\tau \right\} \quad (2.17)$$

Здесь  $t_2$  является корнем уравнения

$$c(t_2) = l(t) \quad (2.18)$$

Интегрирование в (2.17) начинается с момента  $t_2$ , потому что именно этот момент соответствует моменту появления скачка перемещения, когда конец трещины занимает положение  $x=l(t)$  (см. фиг. 3).

Напряжение в зоне частичного разрушения в момент приложения нагрузки  $\sigma_\infty$  на бесконечности будет равно предельному значению, определенному по деформации разрушения  $\varepsilon_r$  мгновенными модулями

$$\sigma_r(0) = 2\mu_0 / (1 + \kappa_0) \varepsilon_r = \sigma_s \quad (2.19)$$

Размер зоны мгновенного частичного разрушения  $c_0$  в силу (2.11) связан с начальной длиной трещины  $l_0$  зависимостью  $l_0 = c_0 \cos^2 \frac{1}{2} \pi \sigma_\infty / \sigma_s = c_0 \cos \alpha$ , где введено обозначение  $\alpha = \pi \sigma_\infty / (2\sigma_s)$ . Скачок смещения, мгновенно возникающий в кончике трещины  $x=l_0$ , будет равен

$$[v] = l_0 \sigma_s (1 + \kappa_0) / (\pi \mu_0) \ln \operatorname{cosec} \alpha \quad (2.20)$$

Если мгновенное значение скачка перемещения в кончике трещины больше или равно критическому раскрытию  $\delta_{cr}$ , то равновесие невозможно как при длине трещины  $l_0$ , так и при любой длине, превышающей начальную. Тогда происходит мгновенное разрушение вследствие динамического распространения трещины. Свойства материала повреждаться при этом не проявляются. Предельное значение нагрузки  $\sigma_{cr}$ , при котором происходит разрушение, найдется из условия (2.7) и (2.20):

$$\sigma_{cr} = \frac{2\sigma_s}{\pi} \operatorname{arccos} \exp \left[ - \frac{\pi \mu_0 \delta_{cr}}{(1 + \kappa_0) \sigma_s l_0} \right] \quad (2.21)$$

Это значение в точности соответствует получаемому в рамках модели разрушения Леонова — Панасюка [8] с той разницей, что под модулями упругости понимаются их мгновенные значения [16].

Если приложенная нагрузка меньше предельной, то весь процесс развития трещины можно разбить на три периода.

*Инкубационный период.* В этот период скачок перемещений в кончике трещины меньше предельного значения и трещина некоторое время остается неподвижной. Пока трещина стоит, в материале идет процесс накопления микроповреждений, особенно интенсивный около кончика трещины. В результате деформация перед кончиком трещины повышается и в некоторый момент времени  $t=t_0$  трещина начинает сдвигаться. За этот же период зона частичного разрушения успевает вырасти, ибо условие (2.16) на ее границе выполняется с самого начала приложения нагрузки, что определяет изначальное движение этой границы, которая к моменту времени страгивания трещины займет положение  $c(t_0)$ . Тогда система уравнений для определения неизвестных функций  $\sigma(t)$  и  $c(t)$  будет следующей ( $t \leq t_0$ ):

$$\sigma_r(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t-\tau) \sigma_r(\tau) \operatorname{arctg} \frac{c(t)}{l_0} \sqrt{\frac{c^2(\tau) - l_0^2}{c^2(t) - c^2(\tau)}} d\tau = \sigma_s \quad (2.22)$$

$$c(t) \cos^2 \frac{1}{2} \pi \sigma_\infty / \sigma_r(t) = l_0 \quad (2.23)$$

Дополнительным соотношением, определяющим продолжительность инкубационного периода, будет

$$\frac{\kappa_0 + 1}{2\pi\mu_0} l_0 \ln \frac{c(t)}{l_0} \left[ \sigma_r(t_0) + \int_0^{t_0} \Lambda(t_0 - \tau) \sigma_r(\tau) d\tau \right] = \delta_{cr} \quad (2.24)$$

*Начальный период.* Это период времени  $[t_0, t_1]$ , за который трещина прошла путь, равный начальному размеру зоны частичного разрушения  $c_0 - l_0$ . Система уравнений, описывающих движение трещины на этом этапе, будет такой ( $t_0 < t \leq t_1$ ):

$$\sigma_r(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t - \tau) \sigma_r(\tau) \operatorname{arctg} \frac{c(t)}{l(\tau)} \sqrt{\frac{c^2(\tau) - l^2(\tau)}{c^2(t) - c^2(\tau)}} d\tau = \sigma_s \quad (2.25)$$

$$2\sigma_r(t) l(t) \ln \frac{c(t)}{l(t)} + \int_0^t \Lambda(t - \tau) \sigma_r(\tau) \lambda(t, \tau) d\tau = \frac{2\pi\mu_0}{1 + \kappa_0} \delta_{cr} \quad (2.26)$$

$$c(t) \cos^{1/2} \pi \sigma_\infty / \sigma_r(t) = l(t) \quad (2.27)$$

$$\lambda(t, \tau) = l(t) \ln \frac{l(t) \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} - l(\tau) \sqrt{c^2(t) - l^2(t)}}{l(t) \sqrt{c^2(\tau) - l^2(\tau)} + l(\tau) \sqrt{c^2(t) - l^2(t)}} - l(\tau) \ln \frac{\sqrt{c^2(\tau) - l^2(t)} - \sqrt{c^2(\tau) - l^2(t)}}{\sqrt{c^2(\tau) - l^2(t)} + \sqrt{c^2(\tau) - l^2(t)}} \quad (2.28)$$

причем в (2.25)  $l(\tau) = l_0$  при  $\tau \leq t_0$ , а  $l(t_1) = c_0$ .

*Основной период.* Это период интенсивного движения трещины, начиная с момента времени, когда трещина выходит в область, начально неразрушенную, и до момента разрушения  $t_r$ , когда скорость движения трещины становится бесконечно большой. В этот момент исчерпывается несущая способность пластины с трещиной и, следовательно, он определяет длительную прочность рассматриваемой конструкции. Система уравнений, описывающих движение трещины на этом этапе, имеет вид ( $t > t_1$ ):

$$\sigma_2(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \Omega(t - \tau) \sigma_r(\tau) \operatorname{arctg} \frac{c(t)}{l(\tau)} \sqrt{\frac{c^2(\tau) - l^2(\tau)}{c^2(t) - c^2(\tau)}} d\tau = \sigma_s \quad (2.29)$$

$$2\sigma_r(t) l(t) \ln \frac{c(t)}{l(t)} + \int_{t_2}^t \Lambda(t - \tau) \sigma_r(\tau) \lambda(t, \tau) d\tau = \frac{2\pi\mu_0}{1 + \kappa_0} \delta_{cr} \quad (2.30)$$

$$c(t) \cos \frac{\pi \sigma_\infty}{2\sigma_r(t)} = l(t) \quad (2.31)$$

Выписанные системы уравнений позволяют определить на каждом этапе неизвестные функции времени  $\sigma_r(t)$ ,  $l(t)$ ,  $c(t)$ , а также времена  $t_0$  и  $t_1$  и представляют собой систему нелинейных интегральных уравнений, которую затруднительно отнести к какому-либо известному типу. Вычислительная сторона упрощается тем, что нагрузка на бесконечности  $\sigma_\infty$  должна быть значительно меньше прочности бездефектного материала  $\sigma_s$ . Таким образом, будем считать введенный ранее параметр  $\alpha$  малым

$$\alpha = 1/2 \pi \sigma_\infty / \sigma_s \ll 1 \quad (2.32)$$

Будем, кроме того, считать, что в результате повреждаемости разрушающее напряжение, хотя и снижается, но не очень значительно, так что

$\sigma = \sigma_r / \sigma_s = O(1)$ . Это позволяет значительно упростить анализ. В самом деле, тогда

$$l(t) \cong c(t) \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2(t)} \right], \quad c(t) \cong l(t) \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{2\sigma^2(t)} \right] \quad (2.33)$$

Величину  $c(\tau)$  при  $t_2 \leq \tau < t$ ,  $t > t_1$  (основной период развития трещины) можно представить в виде

$$c(\tau) \cong c(t) + c'(t)(\tau - t) \quad (2.34)$$

тогда

$$t - \tau = \frac{c(t) - c(\tau)}{c'(t)}, \quad t - t_2 = \frac{c(t) - c(t_2)}{c'(t)} = \frac{c(t) - l(t)}{c'(t)} = \frac{\alpha^2 l(t)}{2\sigma^2(t) c'(t)} \quad (2.35)$$

Отсюда следует, что при  $t_2 \leq \tau < t$  имеем  $0 \leq t - \tau \leq \frac{1}{2} \alpha^2 l(t) / (\sigma^2(t) c'(t))$ . Введем вместо  $\tau$  новую переменную  $s$  по формуле

$$t - \tau = \frac{1}{2} \alpha^2 l(t) s / (\sigma^2(t) c'(t)) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (2.36)$$

Аналогично (2.34) для безразмерного напряжения  $\sigma(\tau)$  можно записать

$$\sigma(\tau) \cong \sigma(t) + \sigma'(t)(\tau - t) \quad (2.37)$$

Учитывая (2.36) в (2.34) и (2.37), получаем

$$c(\tau) \cong c(t) - \frac{\alpha^2 l(t)}{2\sigma^2(t)} s, \quad \sigma(\tau) \cong \sigma(t) - \frac{\alpha^2 l(t) \sigma'(t)}{2\sigma^2(t) c'(t)} s \quad (2.38)$$

Будем считать, что время  $t_1$  (а тем более  $t_0$ ) мало по сравнению со временем  $t_2$  до разрушения. Тогда для определения продолжительности инкубационного и начального периодов можно использовать предложенную в [9] аппроксимацию интегрального оператора наследственной упругости (где  $k$  — корректирующий множитель):

$$\Pi^* y(t) \cong k(\Pi^* \cdot 1) y(t) \quad (2.39)$$

С учетом приближения (2.33) система уравнений (2.22) — (2.24), описывающих инкубационный период развития трещины, примет вид

$$1 + k \int_0^t \Omega(s) ds = \frac{1}{\sigma(t)}, \quad 1 + k \int_0^{t_0} \Lambda(s) ds = \frac{l_*}{l_0} \sigma(t_0) \quad (2.40)$$

$$l_* = 2\pi\mu_0 \delta_{cr} / (1 + \kappa) \sigma_s \alpha \quad (2.41)$$

Первое уравнение (2.40) служит для определения напряжения  $\sigma(t)$ , второе — для определения инкубационного периода  $t_0$ .

Из системы уравнений (2.40) ввиду того, что их левые части больше единицы, следует  $\sigma(t) < 1$  и  $l_* > l_0$ . Введем

$$\sigma_* = \sigma_\infty (l_* / l_0)^{1/2} \quad (2.42)$$

Используя (1.41), можно показать, что при малых  $\alpha$ :

$$\sigma_* = [8\mu_0 \delta_{cr} \sigma_s / (\pi l_0 (1 + \kappa))]^{1/2} = \sigma_{cr} \quad (2.43)$$

Таким образом, если начальная длина трещины при данной нагрузке меньше некоторой критической,  $l_0 < l_*$ , то трещина будет развиваться за счет процесса накопления повреждений. В противном случае происходит мгновенное разрушение конструкции.

Рассмотрим частные случаи ядер операторов  $\Omega^*$  и  $\Lambda^*$ .

1.  $\Omega^* = \Omega = \text{const}$ ,  $\Lambda^* = \Lambda = \text{const}$ . Тогда, согласно [13],  $k = 1/3$  и из (2.40) получим

$$t_0 = \frac{3}{2} \frac{\Omega + \Lambda}{\Omega \Lambda} \left\{ \left[ 1 + \frac{4(l_* - l_0) \Omega \Lambda}{l_0 (\Omega + \Lambda)^2} \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad (2.44)$$

В случае, когда коэффициент Пуассона  $\nu$  — постоянная величина ( $\Lambda = \Omega$ ):

$$t_0 = \frac{3}{\Omega} \left[ \left( \frac{l_*}{l_0} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (2.45)$$

2.  $\Omega(t) = \lambda e^{-\beta t}$ ;  $\Lambda(t) = \kappa e^{-\omega t}$ ,  $k = 1/3$ . В этом случае

$$\sigma(t) = [1 + 1/3 \kappa / \omega (1 - e^{-\omega t})]^{-1} \quad (2.46)$$

а  $t_0$  является корнем уравнения

$$\left[ 1 + \frac{\lambda}{3\beta} (1 - e^{-\beta t_0}) \right] \left[ 1 + \frac{\kappa}{3\omega} (1 - e^{-\omega t_0}) \right] = \frac{l_*}{l_0} \quad (2.47)$$

Для регулярного ядра типа экспоненты существует своя специфика: при  $l_*/l_0 = (\sigma_{cr}/\sigma_\infty)^2 > (1 + 1/3 \lambda / \beta) (1 + 1/3 \kappa / \omega)$  трещина вовсе не будет развиваться вследствие того, что процесс накопления повреждений в этом случае ограничен (при  $t \rightarrow \infty$  интеграл ядра стремится к некоторой постоянной величине). При этом, если задана нагрузка, то начальная длина трещины должна подчиняться условию  $l_0 < (1 + 1/3 \lambda / \beta)^{-1} (1 + 1/3 \kappa / \omega)^{-1} l_*$ ; если задана длина трещины, то приложенная нагрузка должна подчиняться условию  $\sigma_\infty < (1 + 1/3 \lambda / \beta)^{-1/2} (1 + 1/3 \kappa / \omega)^{-1/2} \sigma_{cr}$ . При малых  $\beta t_0$  и  $\omega t_0$  приближенно получим для  $t_0$  формулу (2.44). В случае  $\nu = \text{const}$  будем иметь  $\lambda = \kappa$ ,  $\beta = \omega$ :

$$t_0 = -\omega^{-1} \ln [1 - 3\omega / \kappa (\sqrt{l_*/l_0} - 1)]$$

Можно убедиться, что при сделанных выше ограничениях  $t_0 > 0$ .

3.  $\Lambda(t) = \frac{\lambda t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}$ ,  $\Omega(t) = \frac{\kappa t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}$  ( $0 < \beta < 1$ ). В этом случае полу-

чим следующие оценки для искомых величин  $\sigma(t) = (1 + k \kappa t^{(1-\beta)})^{-1}$ :

$$t_0 = \left\{ \frac{(\lambda + \kappa) \Gamma(2-\beta)}{2\lambda \kappa k} \left[ \left( 1 + \frac{4\lambda \kappa (l_* - l_0)}{l_0 (\lambda + \kappa)^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/(1-\beta)} \quad (2.48)$$

Как показано, например, в [12, 13], для реальных материалов практически всегда  $\beta \geq 0,9$ ,  $k \approx 1$ ,  $\Gamma(2-\beta) \approx \Gamma(1) = 1$ . Тогда имеем

$$t_0 = \left\{ \frac{\lambda + \kappa}{2\lambda \kappa} \left[ \left( 1 + \frac{4\lambda \kappa (l_* - l_0)}{l_0 (\lambda + \kappa)^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/(1-\beta)} \quad (2.49)$$

Для случая  $\nu = \text{const}$ ,  $\lambda = \kappa$  и  $t_0 = [\kappa^{-1} (\sqrt{l_*/l_0} - 1)]^{1/(1-\beta)}$ .

Для получения более точных оценок поступим следующим образом: упростим систему уравнений (2.22) и (2.24), используя малость параметра  $\alpha$ , (2.32) и соотношения (2.33), где следует положить  $l(t) = l_0$ . Уравнение (2.24) с точностью до  $\alpha^2$  принимает вид

$$\sigma(t_0) + \int_0^{t_0} \Lambda(t_0 - \tau) \sigma(\tau) d\tau = \frac{l_*}{l_0} \sigma^2(t_0) \quad (2.50)$$

Будем считать, что в уравнении (2.22) ядро  $\Omega(t)$  регулярно, тогда, проинтегрировав (2.22) по времени и исключив интегральный член с функцией  $\arctg$ , получим

$$\sigma'(t) + (\lambda + \beta) \sigma(t) - \frac{2\lambda}{\pi} l_0 c'(t) \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sigma(\tau) d\tau}{\sqrt{c^2(t) - l_0^2} \sqrt{c^2(t) - c^2(\tau)}} = \beta \quad (2.51)$$

Используя условия (2.33), имеем

$$\sigma'(t) + (\lambda + \beta) \sigma(t) + \frac{2\lambda}{\pi} \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{\sigma^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\sigma^2(\tau) - \sigma^2(t)}} = \beta \quad (2.52)$$



Введем безразмерные величины следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda^{\sim} &= \lambda t_0, \quad \beta^{\sim} = \beta t_0, \quad \sigma^{\sim}(t^{\sim}) = \sigma(t), \quad t^{\sim} = t/t_0 \\ \sigma^{\sim\prime}(t^{\sim}) &= d\sigma^{\sim}(t^{\sim})/dt^{\sim} = t_0 \sigma'(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

В безразмерных величинах интегральное уравнение (2.52) примет вид

$$\begin{aligned} \sigma^{\sim\prime}(t^{\sim}) + (\lambda^{\sim} + \beta^{\sim}) \sigma^{\sim}(t^{\sim}) - \frac{2\lambda^{\sim} \sigma^{\sim\prime}(t^{\sim})}{\pi \sigma^{\sim}(t^{\sim})} \times \\ \times \int_0^{t^{\sim}} e^{-\beta^{\sim}(t^{\sim}-\tau^{\sim})} \frac{\sigma^{\sim 2}(\tau^{\sim}) d\tau^{\sim}}{\sqrt{\sigma^{\sim 2}(\tau^{\sim}) - \sigma^{\sim 2}(t^{\sim})}} = \beta^{\sim} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Для преобразования интегрального члена используем разложение (2.37), записанное в безразмерных величинах, учитывая при этом, что  $\sigma^{\sim}(t^{\sim})$  уменьшается и, следовательно,  $\sigma^{\sim\prime}(t^{\sim}) < 0$ . Учтем также, что в силу сделанного выше предположения величина  $\sigma^{\sim}(t^{\sim})$  меняется мало. Тогда, обозначая  $\xi = \sqrt{1 - \sigma^{\sim}(t^{\sim})}$ , из (2.54) получим следующее квадратное уравнение относительно  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \xi^2 + 2a^{\sim}(t^{\sim}) \sigma^{\sim 1/2} \xi - (\lambda^{\sim} + \beta^{\sim}) \sigma + \beta^{\sim} &= 0 \\ a^{\sim}(t^{\sim}) &= (\lambda^{\sim} / \sqrt{2\pi\beta^{\sim}}) \operatorname{erf} \sqrt{\beta^{\sim} t^{\sim}} \end{aligned}$$

Отсюда для функции  $\sigma^{\sim}(t^{\sim})$  имеем следующую задачу Коши на интервале времени  $[0; 1]$ :

$$\sigma^{\sim\prime}(t^{\sim}) = -[-a^{\sim}(t^{\sim}) \sigma^{\sim 1/2} + \sqrt{a^{\sim 2}(t^{\sim}) \sigma^{\sim} + (m^{\sim} + \beta^{\sim}) \sigma^{\sim} - \beta^{\sim}}]^2, \quad \sigma(0) = 1 \quad (2.55)$$

В случае, когда  $\Omega = \text{const}$  (из (2.53) следует, что это будет при  $\beta^{\sim} = 0$ ,  $\lambda^{\sim} = \Omega^{\sim} = \Omega t_0$ ), задача Коши легко решается до конца. При малых  $\beta^{\sim} t^{\sim}$  для  $a^{\sim}(t^{\sim})$  приближенно можно принять оценку  $a^{\sim}(t^{\sim}) \cong \Omega^{\sim} \sqrt{2t^{\sim}}/\pi$ . Тогда (2.55) примет вид

$$\sigma^{\sim\prime}(t^{\sim}) = -\Omega^{\sim} \sigma^{\sim} (1 + \Omega^{\sim} t^{\sim} / \pi^2 - \sqrt{2\Omega^{\sim} t^{\sim}} / \pi), \quad \sigma(0) = 1 \quad (2.56)$$

Решение (2.56) будет

$$\sigma = \exp(-\Omega^{\sim} g^{\sim}(t^{\sim})) \quad (2.57)$$

$$g^{\sim}(t^{\sim}) \cong t^{\sim - 4/3} \sqrt{2\Omega^{\sim 1/2} t^{\sim 1/2}} / \pi \quad (2.58)$$

где, учитывая сделанное ранее предположение о малом изменении  $\sigma^{\sim}(t^{\sim})$ , а также то, что для инкубационного периода  $t \leq t_0$ , т. е.  $t^{\sim} \leq 1$ , из (2.56) и (2.57) получим, что  $\Omega^{\sim} \ll 1$ . Напряжение  $\sigma(t_0)$  будет равно

$$\sigma(t_0) = \sigma^{\sim}(1) = \exp(-\Omega^{\sim} g^{\sim}(1)) \quad (2.59)$$

Для приближенного определения времени инкубационного периода  $t_0$  возьмем  $g^{\sim}(t^{\sim}) \cong t^{\sim}$ . Тогда  $\sigma^{\sim} \cong \exp(-\Omega^{\sim} t^{\sim})$  или в размерных величинах  $\sigma = \exp(-\Omega t)$ . Подставив это выражение в интегральное уравнение (2.50), определим

$$t_0 = -\frac{1}{\Omega} \ln \left[ \frac{l_0}{2l_*} \left( 1 - \frac{\Lambda}{\Omega} \right) + \sqrt{\frac{l_0^2}{4l_*^2} \left( 1 - \frac{\Lambda}{\Omega} \right)^2 + \frac{l_* \Lambda}{l_0 \Omega}} \right] \quad (2.60)$$

Можно проверить, что при  $l_0 < l_*$  подлогарифмическое выражение положительно и меньше единицы и потому  $t_0 > 0$ , а также, что при малых  $\Omega = \Omega t_0$  напряжение  $\sigma(t_0)$  и время  $t_0$ , определенное по (2.59), (2.60) и (2.45), (2.46), отличаются только множителем и будут совпадать, если в аппроксимации (2.39) принять  $k=1$ .

Вводя в рассмотрение характерное время  $T = \Omega^{-1}$ , определяющее интенсивность процесса накопления повреждений, приходим к выводу, что наши рассуждения справедливы в том случае, когда продолжительность инкубационного периода значительно меньше характерного времени  $T$ .

Для постоянного коэффициента Пуассона ( $\Lambda = \Omega$ ):

$$t_0 = \frac{1}{2\Omega} \ln \frac{l_*}{l_0} = \frac{1}{2\Omega} \ln \frac{8\mu_0 \delta_{cr} \sigma_s}{\pi^2 l_0 (1 + \kappa_0) \sigma_\infty^2}$$

Перейдем к определению напряжения в зоне частичного разрушения на начальной стадии и протяженности этой зоны. Для этого упростим систему интегральных уравнений (2.25), (2.26), пользуясь вновь малостью параметра  $\alpha$ , формулами (2.33) и аппроксимацией (2.39). Тогда получим

$$1 + k \int_0^t \Omega(t-\tau) d\tau = \frac{1}{\sigma(t)}, \quad 1 + k \int_0^{t_1} \Lambda(t_1-\tau) d\tau = \frac{l_*}{l_0} \sigma(t_1) \quad (2.61)$$

Из сравнения этой системы уравнений с (2.40) следует, что изменение напряжения во времени в зоне частичного разрушения на начальной стадии такое же, как и в инкубационном периоде. Значение же времени завершения начальной стадии  $t_1$  получается из значения  $t_0$  продолжительности инкубационного периода заменой  $l_0$  на  $c_0$ . Так как согласно (2.33),  $l_0 \cong l_0(1 - \alpha^2/2)$ , то продолжительность начальной стадии  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$  имеет порядок  $\alpha^2 T$  и, таким образом, мала по сравнению с характерным временем накопления повреждений  $T$ .

Перейдем теперь к анализу основного этапа развития трещины, предшествующего полному разрушению пластины. Разберем случай  $\Omega = \text{const}$ ,  $\Lambda = \text{const}$ . Упростим интегральное уравнение (2.30), используя (2.33), (2.38) и малость  $\alpha$ . С точностью до  $\alpha^2$  (2.30) примет вид

$$1 + \frac{\Lambda}{6} \frac{\alpha^2 c(t)}{\sigma^2(t) c'(t)} = \frac{l_*}{c(t)} \sigma(t) \quad (2.62)$$

Ввиду немалости основного периода развития трещины использование разложений (2.34), (2.37) неправомерно, вследствие чего первое интегральное уравнение (2.29) эффективному упрощению не поддается. Для получения приближенной оценки допустим, что напряжение в зоне частичного разрушения меняется по такому же закону, как и в инкубационный и начальный периоды, т. е. согласно формуле (2.57), а в соотношении (2.62) вместо  $\sigma(t)$  возьмем его среднее значение  $\sigma^\circ$  на всем интервале времени движения трещины. Тогда, разрешая (2.62) относительно  $c'(t)$ , получим

$$(l_* \sigma^\circ / c(t) - 1) c'(t) / c(t) = \Lambda \alpha^2 / (6 \sigma^2) \quad (2.63)$$

Считая протяженность инкубационного и начального периодов пренебрежительно малыми по сравнению со временем до полного разрушения, проинтегрируем (2.63) от начального момента времени  $t=0$ , когда  $c=c_0$ , до времени полного разрушения  $t_r$ , когда  $c=c_{cr}$ . Критическую длину  $c_{cr}$  можно непосредственно определить из формулы (2.63), так как левая часть ее должна быть конечной, когда скорость движения трещины становится бесконечно большой  $c' = \infty$ . Тогда

$$c_{cr} = l_* \sigma^\circ \quad (2.64)$$

Таким образом, решением дифференциального уравнения (2.63) будет

$$t_r = \frac{6\sigma^{\circ 2}}{\Lambda \alpha^2} \left( -1 + \frac{l_* \sigma^\circ}{c_0} - \ln \frac{l_* \sigma^\circ}{c_0} \right) \quad (2.65)$$

$$\sigma^\circ = \frac{1}{t_r} \int_0^{t_r} e^{-\Omega \tau} d\tau = \frac{1}{\Omega t_r} (1 - e^{-\Omega t_r}) \quad (2.66)$$

Далее рассмотрим два случая, позволяющие получить явное выражение для времени разрушения  $t_r$ .

1.  $t_r \gg T = \Omega^{-1}$ . Тогда из (2.66) следует  $\sigma^\circ \cong (\Omega t_r)^{-1}$ . Разлагая в ряд логарифм в (2.65) и принимая, что  $c_0 \ll c_{cr} = l_* / \Omega t_r$ , получим с учетом вве-

денных ранее обозначений

$$t_r \cong \frac{2}{\sigma_\infty} \left[ \frac{12\mu_0 \delta_{cr} \sigma_s^3}{(1+\kappa_0) \pi^3 \Lambda \Omega^3 c_0} \right]^{1/4} \quad (2.67)$$

Согласно этой зависимости, время полного разрушения обратно пропорционально первой степени приложенной нагрузки и корню четвертой степени из начальной длины трещины. При  $v = \text{const}$  ( $\Lambda^* = \Omega^*$ ):

$$t_r = \frac{2}{\Omega \sigma_\infty} \left[ \frac{12\mu_0 \delta_{cr} \sigma_s^3}{(1+\kappa_0) \pi^3 c_0} \right]^{1/4}$$

2.  $t_r \ll T = \Omega^{-1}$ . Тогда  $\sigma^0 \cong 1 - 1/2 \Omega t_r$  и из формулы (2.65) получим с учетом (2.42) с точностью до  $\alpha^2$ :

$$t_r \cong 2/3 \Omega^{-1} \quad (2.68)$$

В этом случае время разрушения мало зависит от внешней нагрузки и начальной длины трещины.

Таким образом, в результате решения поставленной задачи удалось связать между собой два различных процесса разрушения, возникающих вследствие накопления рассеянных повреждений и распространения магистральной трещины. При этом если интенсивность процесса накопления повреждений невелика, то можно проследить за движением трещины и определить долговечность работы материала (формула (2.67)), зависящую от приложенной нагрузки и начальных размеров макротрещины. Если интенсивность накопления повреждений очень большая, то магистральная трещина не успевает развиться, поэтому долговечность материала в этом случае будет зависеть в основном от параметров процесса рассеянного разрушения (формула (2.68)).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. Ильющин А. А. Об одной теории длительной прочности. — Инж. ж. МТТ, 1967, № 3, с. 21–35.
4. Москвитин В. В. Об одной модели нелинейно вязкоупругой среды, учитывающей влияние накопления повреждений. — Механика полимеров, 1972, № 2, с. 241–246.
5. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
6. Janson J., Hult J. Fracture mechanics and damage mechanics — a combined approach. — J. Mec. Appl., 1977, v. 1, N 1, p. 69–84.
7. Janson J. Damage model of crack growth and instability. — Eng. Fract. Mech., 1978, v. 10, N 4, p. 795–806.
8. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. — Прикл. механика, 1959, т. 5, вып. 4, с. 391–401.
9. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел. Киев: Наук. думка, 1980. 159 с.
10. Ромалис Н. Б., Тамуж В. П. Распространение магистральной трещины в теле с распределенными микротрещинами. — Механика композит. материалов, 1984, № 1, с. 42–51.
11. Зобнин А. И. Распространение трещины в полимерном материале. — Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 53–56.
12. Суворова Ю. В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред. — Механика полимеров, 1977, № 6, с. 976–980.
13. Суворова Ю. В. О критерии прочности, основанном на накоплении повреждений и его приложении к композитам. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 107–111.
14. Suvorova J. V. Delayed failure of inelastic composites. — Proc. IV-th Intern. Conf. on Mech. Behaviour of Materials. Oxford: Pergamon press, 1983, v. 2, p. 1043–1049.
15. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
16. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Распространение трещин в упруго-вязких телах. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970, № 7, с. 20–35.

Москва, Баку

Поступила в редакцию  
24.VII.1985