МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1986

УДК 539.376

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КАК СРЕДСТВО КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА РАВНОВЕСНЫХ ДВИЖЕНИЙ НАСЛЕДСТВЕННО ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

ГРОМОВ В. Г.

Динамическая теория длительной устойчивости на бесконечном отрезке времени равновесных движений наследственно деформируемых тел основывается на следующих априорных допущениях: однозначной непрерывной продолжимости основного движения и «упругой» невырожденности задачи возмущений на любом конечном интервале времени [1, 2]. Если хотя бы одно из этих условий нарушено, то движение следует считать длительно неустойчивым. Качественные особенности таких движений не исследованы. В данной работе изучаются свойства на конечных интервалах времени неустойчивых в классическом смысле движений.

Перенос концепций и методов исследования динамической устойчивости на конечные отрезки времени невозможен, так как для динамической задачи возмущений справедлив [1, 2] принцип непрерывной зависимости от начальных данных и внешних сил. Далее для исследования осуществляется переход от динамического анализа возмущений к квазистатическому, поскольку для квазистатических систем в противоположность динамическим принцип непрерывной зависимости не всегда выполняется. Это позволяет естественным образом определить неустойчивость квазистатических движений на конечном интервале времени. Такой способ расширения понятия устойчивости полезен и весьма эффективен практически, так как дает возможность выделять опасные явления, реально происходящие в движениях на конечных отрезках времени.

1. Пусть $u^0(t)$ — основное равновесное движение общего наследственно деформируемого тела, не обладающее длительной устойчивостью. В недеформированном состоянии тело занимает область V, ограниченную достаточно гладкой поверхностью S. Движение $u^0(t)$ динамически устойчиво на любом конечном отрезке времени. Введем квазистатические постоянно действующие возмущения внешних сил. Для вектора возмущений перемещений $u(t)$ получаем квазистатическую нестационарную граничную задачу в виде интегрального тождества

$$-\int\limits_V L_t^{\vee} u\cdot\delta u\,dV+\int\limits_{S_2}\Lambda_t^{\vee} u\cdot\delta u\,dS=\int\limits_V f\cdot\delta u\,dV+\int\limits_{S_2} p\cdot\delta u\,dS-\int\limits_V N^{\vee}(u):\nabla\delta u\,dV$$

$$L_t^{\vee}=L_t-\int\limits_0^t L(t,\tau)(\cdot)\,d\tau,\qquad \Lambda_t^{\vee}=\Lambda_t-\int\limits_0^t \Lambda(t,\tau)(\cdot)\,d\tau \tag{1.1}$$

и линейные операторы L_t, Λ_t, $L(t,\tau)$, $\Lambda(t,\tau)$ и нелинейный оператор $N^{\vee}$ приведены в [3], f — объемные, p — поверхностные на части S_2 поверхности S тела постоянно действующие возмущения. На остальной ее части заданы перемещения.

Тождество (1.1) сводим к нелинейному операторному уравнению

$$t\geqslant 0,\quad A_t u(t)-B_0^t(t,u)=Gf+\Gamma p-M^{\vee}(u) \tag{1.2}$$

$$B_0^t(t,u)=\int\limits_0^t B(t,\tau)u(\tau)\,d\tau$$

которое является следствием представления линейных по δu функционалов в тождестве (1.1) посредством скалярного произведения

$$[u,v]=\int\limits_V L_t u\cdot L_t v\,dV+\int\limits_{S_2}\Lambda_t u\cdot\Lambda_t v\,dS \tag{1.3}$$

Теперь свойства квазистатических возмущений $u(t)$ полностью определяются свойствами решений операторного уравнения (1.2). Оператор главной линейной части (1.2) разделяется на два — мгновенный A_t и наследственный $B_0^t(t,(\cdot))$. Поведение решений на конечном интервале времени определяется оператором A_t.

Пусть A_t непрерывно обратим при всех $t\geqslant 0$. Заменой $A_t u=g$, $u=A_t^{-1}g$, $t\geqslant 0$ уравнение (1.2) приводится к операторному уравнению Вольтерра второго рода

$$t\geqslant 0,\ g(t)-B_0^t(t,A_\tau^{-1}g)=Gf+\Gamma p-M^\smile(A_t^{-1}g) \tag{1.4}$$

для решений которого справедлив принцип непрерывной зависимости от правой части на любом конечном отрезке времени. Последнее означает квазистатическую устойчивость основного движения на любом конечном интервале при достаточно малых постоянно действующих возмущениях.

Предположим, что найдется точка t_*, в которой нарушено свойство непрерывной обратимости оператора A_t, хотя при всех $0\leqslant t<t_*$ он остается регулярным. Поскольку A_t — «упругий» оператор, его вырождение означает, что нуль становится собственным значением (вообще говоря, n-кратным), т. е. при $t=t_*$ имеем

$$t=t_*,\ A_{t_*}\varphi_i=0,\ \varphi_i\neq 0\ (i=1,2,\ldots,n) \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что при всех $0\leqslant t<t_*$ уравнение (1.2), так же как и в предыдущем случае, обладает свойством непрерывной зависимости решений от правой части. При $t=t_*$ это свойство теряется. Действительно, достаточно положить $u_i=a(t)\varphi_i$, как в силу (1.5) уравнение (1.2) приводится к операторному уравнению Фредгольма первого рода

$$t=t_*,\ B_0^{t_*}(t_*,a(\tau),\varphi_i)=G_*f+\Gamma_*p-M_*^\smile(a\varphi_i) \tag{1.6}$$

Можно показать, что для (1.6) свойство непрерывной обратимости не выполняется [4].

Итак, если t_* — точка вырождения мгновенной части A_t главного линейного оператора квазистатической задачи возмущений, что основное движение квазистатически неустойчиво на конечном интервале времени $[0,t_*]$. Выявляется важное свойство длительно неустойчивых равновесных движений, которые всегда устойчивы в динамическом смысле и могут быть неустойчивыми квазистатически на конечном отрезке времени. Критерием последнего служит условие (1.5), которое выделяет критическую точку t_*.

2. Точкой нарушения однозначного непрерывного продолжения основного движения $u^0(t)$ назовем момент времени t_0, в который поле скоростей $v^0(t)$ этого движения не имеет однозначных конечных значений. Для определения поля скоростей необходимо сформулировать граничную задачу, которую [3] можно представить в виде

$$-\int\limits_V L_t v^0\cdot\delta u\,dV+\int\limits_{S_2}\Lambda_t v^0\cdot\delta u\,dS=$$
$$=\int\limits_V (f_0^\bullet+F^\smile(u^0))\cdot\delta u\,dV+\int\limits_{S_2}(p_0^\bullet+P^\smile(u^0))\cdot\delta u\,dS \tag{2.1}$$

где L_t, Λ_t — те же упругие операторы, что и в (1.1), $f_0^\bullet$, $p_0^\bullet$ — скорости внешних сил в основном движении, $F^\smile$, $P^\smile$ — некоторые операторы над вектором смещений u^0. Подобно (1.1), тождество (2.1) эквивалентно операторному уравнению

$$0\leqslant t\leqslant t_0,\quad A_t v^0=G(f_0^\bullet+F^\smile(u^0))+\Gamma(p_0^\bullet+P^\smile(u^0)) \tag{2.2}$$

Получаем, что задача определения скоростей всегда линейна. Линейный оператор A_t тождествен мгновенной части линейного оператора (1.2) задачи возмущений. Отсюда следует, что задача возмущений и задача для скоростей основного движения вырождаются одновременно, т. е. критическая точка t_* и особая точка t_0 тождественны ($t_*=t_0$). Это указывает на тесную связь свойств квазистатической устойчивости и продолжимости по времени равновесных движений.

Пусть t_0 — точка нарушения однозначного непрерывного продолжения движения. Задача для скоростей (2.2) в этой точке будет вырожденной. Однородное уравнение (2.2) имеет нетривиальные решения φ_i из (1.5), в то время как неоднородное разрешимо только тогда, когда выполняются следующие условия разрешимости:

$$[G(f_0^{\cdot}+F^{\vee}(u^0))+\Gamma(p_0^{\cdot}+P^{\vee}(u^0)),\psi_i]\equiv$$

$$\equiv\int\limits_V(f_0^{\cdot}+F^{\vee}(u^0))\cdot\psi_i\,dV+\int\limits_{S_2}(p_0^{\cdot}+P^{\vee}(u^0))\cdot\psi_i\,dS=0 \qquad (2.3)$$

Здесь ψ_i — собственные элементы сопряженного к A_t оператора A_t^*, который определяется так: $[A_tu,\ v]=[u,\ A_t^*v]$. Возможны два взаимно исключающих случая: условия разрешимости (2.3) выполняются либо не выполняются в особой точке t_0. В первом случае задача (2.2) неоднозначно разрешима: $v^0=c_i\varphi_i+v$, где v — частное решение неоднородного уравнения, c_i — произвольные постоянные. Такую точку t_0 назовем точкой неоднозначного продолжения. Если условия (2.3) не выполняются, то задача (2.2) неразрешима. Тогда особая точка есть точка непродолжимости движения.

3. Рассмотрим задачу о продолжении основного движения за интервал устойчивости, чтобы выяснить смысл неоднозначного продолжения или непродолжимости движения и дать более детальную классификацию особой точки. Постановка задачи существенно зависит от того, является ли граница интервала устойчивости точкой неоднозначного продолжения или точкой непродолжимости основного движения.

Пусть t_0 — точка неоднозначного продолжения. Основное движение u^0 определено и непрерывно за интервалом устойчивости ($t>t_0$), что позволяет отыскивать продолжения движений при $t\geqslant t_0$ в виде возмущений, но при невозмущенных внешних силах

$$t\geqslant t_0,\ u(t)=u^0(t)+u^+(t),\ f(t)=f^0(t),\ p(t)=p^0(t) \qquad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что уравнение для продолжений $u^+(t)$ получается из уравнения (1.2) для возмущений и имеет вид

$$t\geqslant t_0,\ A_t^{\vee}u^+(t)-B_{t_0}{}^t(t,\ u^+)=-M^{\vee}(u^+) \qquad (3.2)$$

Здесь учтено, что $u^+(u)\equiv0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$. Задачу (3.2) назовем задачей разветвления. Помимо нелинейного выпишем линеаризованное уравнение разветвлений

$$t\geqslant t_0,\ A_t^{\vee}u^+=A_tu^+-B_{t_0}{}^t(t,\ u^+)=0 \qquad (3.3)$$

Дальнейшее определяется тем, разрешимо или нет это уравнение. Поскольку A_{t_0} вырожден, то уравнение (3.3) может иметь нетривиальные решения $A_t^{\vee}u_i^+=0$, $u_i^+\neq0$. В этом случае нелинейное уравнение (3.2) имеет несколько решений, которые могут быть построены либо в рядах по дробным степеням $(t-t_0)$:

$$u^+=(t-t_0)^{k+\alpha(1+l)}u_{kl}\ (k,\ l=0,\ 1,\ 2,\ldots) \qquad (3.4)$$

либо посредством подходящей модификации метода Ляпунова — Шмидта. Причем, параметр α находится из условий разрешимости типа

$$\alpha=-1+[B_{00}\varphi,\ \psi][A_1\varphi,\ \psi]^{-1}\ (n=1) \qquad (3.5)$$

где A_1, B_{00} — коэффициенты при первой и нулевой степенях в разложениях по $(t-t_*)$ операторов A_t и B. Такая особая точка называется точкой бифуркации. В зависимости от значений параметра α бифуркации могут быть непрерывными ($\alpha>0$), разрывными ($\alpha=0$), сингулярными ($\alpha<0$).

Если линеаризованное уравнение (3.3) не имеет нетривиальных решений, то основное движение не допускает квазистатических разветвлений.

Послекритические режимы носят динамический характер. Соответствующую особую точку уместно назвать точкой динамического разветвления. Однако динамические режимы могут стремиться при консервативном нагружении к некоторому квазистатическому режиму, который находится в результате прямого решения нелинейного уравнения (3.2) по методике, излагаемой выше.

Рассмотрим точку непродолжимости. В отличие от точки разветвлений здесь основное решение $u^0(t)$ не определено при $t>t_0$. Поэтому продолжение движения отыскивается в виде

$$t\geqslant t_0,\ u(t)=u_*+u^+(t),\ u_*=u^0(t_0),\ f=f^0,\ p=p^0 \tag{3.6}$$

Операторное уравнение для продолжений u^+ запишем так:

$$t\geqslant t_0,\quad A_{t_0}u^+(t)-B_{*t_0}{}^t(t,u^+)-C(t)u^+(t)=D(t)-M_*{}^{\vee}(u^+) \tag{3.7}$$

где A_{t_0}, B_*, $M_*{}^{\vee}$ — операторы из (1.2), но построенные на критическом состоянии u_*, а $C(t)$, $D(t)$ определены на основе (1.3). При $t=t_0$ $(C(t_0)=D(t_0)=0)$ приходим к нелинейной стационарной задаче для начальных значений (задача скачков):

$$t=t_0,\quad A_{t_0}u^+(t_0)=-M_*{}^{\vee}(u^+(t_0)) \tag{3.8}$$

Всякое нетривиальное решение задачи скачков указывает на возможность квазистатического разрывного при $t=t_0$ продолжения основного движения. При $t>t_0$ решение уравнения (3.7) может быть найдено в виде

$$u^+=(t-t_0)^k u_k\quad (k=0,1,2,\ldots) \tag{3.9}$$

Здесь $u_0=u(t_0)$, а для определения остальных коэффициентов в (3.9) получаем последовательность линейных задач

$$A_{t_0}{}^{H}u_k=M_k(u_0,u_1,\ldots,u_{k-1})\quad (k=1,2,\ldots) \tag{3.10}$$

Оператор $A_{t_0}{}^{H}$ в отличие от A_{t_0} невырожден и имеет ограниченный обратный, так что уравнения (3.10) однозначно разрешимы.

Таким образом, вскрывается природа «упругого» вырождения на конечном отрезке времени, заключающаяся в квазистатической неустойчивости равновесных движений, а также неразрывность связи их свойств устойчивости и продолжимости. Однозначно продолжимы только устойчивые движения. Напротив, неоднозначно продолжимые либо непродолжимые движения неустойчивы. Последнее очерчивает и обосновывает метод исследования особых точек движения как способ изучения его устойчивости. Кроме того, на основе изложенного возможен качественный анализ послекритического поведения реальных тел без прямого решения задачи продолжений: (исследование расположения и структуры множеств критических состояний, проверка условий продолжимости, изучение условий и характера бифуркаций, динамических разветвлений, катастроф). Обратим внимание, что в отличие от технической неустойчивости на конечном интервале времени, рассматриваемой, например, в [5], квазистатическая неустойчивость имеет математическую природу и более содержательна в механическом плане.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Громов В. Г.* Динамический критерий устойчивости и закритическое поведение гибких вязкоупругих тел при термосиловом загружении.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1975, т. 220, № 4, с. 805—808.
2. *Громов В. Г.* Первый метод Ляпунова в динамической устойчивости гибких термовязкоупругих тел.— Докл. АН СССР (ДАН СССР), 1975, т. 223, № 4, с. 819—822.
3. *Громов В. Г.* Вырожденный случай задачи устойчивости вязкоупругих тел.— Прикл. механика, 1980, т. 16, вып. 6, с. 21—29.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 224 с.
5. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.

Тула

Поступила в редакцию
26.III.1985