МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1986

УДК 539.37

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ПЛОСКОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОЙ СТАРЕЮЩЕЙ СРЕДЫ

МИХАЙЛОВ С. Е., ОСОКИН А. Е.

В последние годы широкое распространение получили численные методы решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, основанные на использовании фундаментальных решений, т. е. решений, описывающих реакцию на сосредоточенное усилие бесконечного пространства (или плоскости), занятых рассматриваемой средой. Таковыми являются метод упругих потенциалов [1, 2], метод граничных интегральных уравнений, к которым приводит использование формул Бетти [3—6], а также метод источников, в котором решение краевой задачи строится путем суперпозиции сосредоточенных сил в пространстве, располагаемых на некоторой поверхности, охватывающей исследуемое тело (см., например, [7]).

В изотропной упругой среде фундаментальное решение дается матрицей Кельвина — Сомильяны и выписывается в явном виде. При наличии в упругой среде произвольной анизотропии фундаментальное решение, построенное в [8], приводится к интегралу по единичной окружности, ориентированной в пространстве специальным образом [2, 9, 10]. Аналогичные решения для наследственной упругости без старения [11] даны в изотропном случае в [4], а в анизотропном — в [12, 13]. В [14] представлено фундаментальное решение для однородной прямолинейно-анизотропной стареющей среды [15] в трехмерном случае для конечных времен.

В публикуемой работе приведено трехмерное фундаментальное решение в анизотропной стареющей среде, подробно проанализирован случай стареющей изотропной наследственной среды. Из пространственного фундаментального решения получены фундаментальные решения задач обобщенной плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния для анизотропной стареющей среды, а также исследовано поведение двумерных и трехмерных фундаментальных решений при малых и больших временах, когда в пределе приложенная нагрузка стабилизируется или становится гармонической во времени.

1. Пусть x_k, $k=1, 2, 3$ — декартовы координаты. Будем считать, если особо не оговорено противное, латинские индексы изменяющимися от 1 до 3, а греческие — от 1 до 2. В этих пределах будем полагать, что по повторяющимся индексам происходит суммирование.

Рассмотрим анизотропную однородную наследственно-упругую среду, в которой напряжения σ_{ij} и деформации ε_{kl} связаны уравнением [15]:

$$\sigma_{ij}(t)=[\mathbf{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl}](t),\qquad \mathbf{C}_{ijkl}=C^{\mathrm{I}}_{ijkl}+\mathbf{C}^{\mathrm{II}}_{ijkl} \tag{1.1}$$

Здесь t — время, $C^{\mathrm{I}}_{ijkl}(t)$ — тензор модулей мгновенной упругости, $\mathbf{C}^{\mathrm{II}}_{ijkl}$ — интегральный оператор вида

$$[\mathbf{C}^{\mathrm{II}}_{ijkl}\varepsilon_{kl}](t)=\int\limits_0^t C_{ijkl}(t,\tau)\,\varepsilon_{kl}(\tau)\,d\tau$$

Оператор $\mathbf{C}_{ijkl}$ удовлетворяет условиям симметрии $\mathbf{C}_{ijkl}=\mathbf{C}_{jikl}=\mathbf{C}_{ijkl}=\mathbf{C}_{klij}$.

Пусть зависимость компонент сосредоточенного усилия, приложенного в начале координат, от времени определяется функциями $f_i(t)$. Искомое решение удовлетворяет уравнению равновесия.

$$\sigma_{ij,\,j}(x,t)=-\delta_{(3)}(x)f_i(t). \tag{1.2}$$

где $\delta_{(3)}=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ — дельта-функция Дирака. Подставляя (1.1) в (1.2) и учитывая $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$, приходим к уравнениям Ламе относительно смещений

$$[\mathbf{C}_{ijkl}u_{k,jl}](x,t)=-\delta_{(3)}(x)f_i(t) \tag{1.3}$$

Введем обычным образом прямое и обратное преобразования Фурье, обозначая галочкой трансформанты и параметры преобразования

$$u^{\vee}(x^{\vee},t)=(2\pi)^{-3/2}\int\limits_V u(x,t)\exp(ix_p{}^{\vee}x_p)\,dV \tag{1.4}$$

$$u(x,t)=(2\pi)^{-3/2}\int\limits_V u^{\vee}(x^{\vee},t)\exp(-ix_p{}^{\vee}x_p)\,dV^{\vee}$$

$$dV=dx_1dx_2dx_3 \quad dV^{\vee}=dx_1{}^{\vee}dx_2{}^{\vee}dx_3{}^{\vee}$$

Применяя преобразование Фурье к левой и правой частям уравнения (1.3), получим

$$[\mathbf{C}_{ik}{}^{\vee}u_k{}^{\vee}](x^{\vee},t)=(2\pi)^{-3/2}f_i(t), \quad \mathbf{C}_{ik}{}^{\vee}=x_j{}^{\vee}x_l{}^{\vee}\mathbf{C}_{ijkl} \tag{1.5}$$

Решение системы линейных интегральных уравнений Вольтерра (1.5) имеет вид [14]

$$u_k{}^{\vee}(x^{\vee},t)=(2\pi)^{-3/2}[\mathbf{C}_{ki}^{\vee-1}f_i](\eta^{\vee},t)\,r^{\vee\,-2}, \quad r^{\vee 2}=x_i{}^{\vee}x_i{}^{\vee}, \quad \eta_i{}^{\vee}=x_i{}^{\vee}/r^{\vee} \tag{1.6}$$

Пусть $C[0,\ T]$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[0,\ T]$, а $L_\infty[0,\ T]$ — пространство функций $f(t)$, таких, что $\operatorname{ess\,sup}|f(t)|<\infty$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Будем рассматривать среды с такими мгновенными модулями $C^{\mathrm{I}}_{ijkl}(t)$, принадлежащими $C[0,\ T]$ (или $L_\infty[0,\ T]$), что энергия мгновенного деформирования $C^{\mathrm{I}}_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}/2>0$ для любых $\varepsilon_{ij}\neq 0$. Полагаем также, что операторы $\mathbf{C}^{\mathrm{II}}_{ijkl}$ вполне непрерывны в пространстве $C[0,\ T]$ (или $L_\infty[0,\ T]$). Достаточные для этого условия, которые следует наложить на ядра $C_{ijkl}(t,\tau)$, приведены, например, в [16].

В частности, функции C_{ijkl} могут иметь вид $C_{ijkl}(t,\tau)=\overset{\circ}{C}_{ijkl}(t,\tau)\times(t-\tau)^{-\alpha}$, где функции $\overset{\circ}{C}_{ijkl}(t,\tau)$ непрерывны при $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$, а $\alpha<1$. При этих условиях в $C[0,\ T]$ (или в $L_\infty[,\ T]$) существует непрерывный обратный оператор $\mathbf{C}_{ki}^{\vee-1}(\eta^{\vee})$, который удобно представить в виде равномерно сходящегося относительно $\eta^{\vee}$ ($|\eta^{\vee}|=1$) ряда Неймана [14]:

$$\mathbf{C}_{ki}^{\vee-1}=(C^{\vee\mathrm{I}})^{-1}_{ki}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\mathbf{C}^{\vee\mathrm{III}})^n_{kq}(\mathbf{C}^{\vee\mathrm{I}})^{-1}_{qi} \tag{1.7}$$

где $(\mathbf{C}^{\vee\mathrm{III}})_{kq}{}^n$ есть n-я степень оператора $\mathbf{C}_{kq}{}^{\vee\mathrm{III}}$, т.е. $(\mathbf{C}^{\vee\mathrm{III}})_{kq}{}^n=\mathbf{C}_{ks}{}^{\vee\mathrm{III}}(\mathbf{C}^{\vee\mathrm{III}})_{sq}{}^{n-1}$, $\mathbf{C}_{kq}{}^{\vee\mathrm{III}}=(\mathbf{C}^{\vee\mathrm{I}})_{ks}{}^{-1}\mathbf{C}_{sq}{}^{\mathrm{II}}$.

Для ядра $C_{kq}{}^{\vee\mathrm{III}}$ интегрального оператора $\mathbf{C}_{kq}{}^{\vee\mathrm{III}}$ имеем $C_{kq}{}^{\vee\mathrm{III}}(t,\tau,\eta)=(C^{\vee\mathrm{I}})'_{ks}{}^{-1}(t,\eta)C_{sq}{}^{\vee}(t,\tau,\eta)$.

Осуществляя обратное преобразование Фурье (1.6) аналогично тому, как это было сделано для анизотропного тела без наследственности [9], и понимая при этом под $\mathbf{C}_{ki}{}^{\vee-1}$ ряд (1.7), получим [14]:

$$u_k(x,t)=\frac{1}{8\pi^2|x|}\oint\limits_{\zeta\in\Pi(x)}[\mathbf{C}_{ki}^{\vee-1}(\zeta)f_i](t)\,|d\zeta| \tag{1.8}$$

Частным случаем (1.8) является фундаментальное решение для сред с ядрами, зависящими от разности аргументов, которое приведено в [12, 13].

Следуя [14], перейдем в (1.8) с помощью дельта-функции Дирака к интегрированию по единичной сфере. После этого нетрудно вычислить производные этого выражения по пространственным координатам, а затем, подставляя результат в обобщенный закон Гука (1.1), получить напряжения

$$\sigma_{ij}(x,t)=\frac{C_{ijkl}}{8\pi^2|x|^3}\Big\{-x_l\oint\limits_{\zeta\in\Pi(x)}[C_{kq}^{\check{}-1}(\zeta)f_q](t)|d\zeta|+$$

$$+x_m\oint\limits_{\zeta\in\Pi(x)}[C_{ks}^{\check{}-1}(\zeta)C_{sp,m}^{\check{}}(\zeta)C_{pq}^{\check{}-1}(\zeta)f_q](t)\zeta_l|d\zeta|\Big\} \tag{1.9}$$

В (1.8), (1.9) $\Pi(x)$ — плоскость, ортогональная вектору x. Вектор ζ удовлетворяет условию $|\zeta|=1$, и, таким образом, интеграл вычисляется вдоль единичной окружности, лежащей в плоскости $\Pi(x)$:

$$C_{sp,m}(\eta^{\check{}})=(\delta_{jm}\eta_l^{\check{}}+\delta_{lm}\eta_j^{\check{}})C_{sjpl}$$

Рассмотрим более подробно случай стареющей изотропной наследственно-упругой среды, для которой

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.10}$$

где λ и μ — операторы Вольтерра общего вида, описывающие процесс старения

$$[\lambda\varepsilon](t)=\lambda^{\mathrm{I}}(t)\varepsilon(t)+\int\limits_0^t\lambda(t,\tau)\varepsilon(\tau)d\tau$$

Функции $\lambda^{\mathrm{I}}(t)$ и $\lambda(t,\tau)$ — характеристики среды. Аналогично определяется оператор μ. В этом случае решение уравнения (1.5) можно явно выразить через операторы λ и μ:

$$u_k^{\check{}}(x^{\check{}},t)=[(\lambda+2\mu)^{-1}\{-(\lambda+\mu)\eta_i^{\check{}}\eta_k^{\check{}}+(\lambda+2\mu)\delta_{ik}\}\mu^{-1}f_i](t)r^{\check{}-2}(2\pi)^{-3/2} \tag{1.11}$$

В явном виде можно также провести обращение Фурье выражения (1.11)

$$u_k(x,t)=\left[\frac{(\lambda+2\mu)^{-1}}{8\pi|x|}\left\{(\lambda+\mu)\frac{x_ix_k}{|x|^2}+(\lambda+3\mu)\delta_{ik}\right\}\mu^{-1}f_i(t)\right](t) \tag{1.12}$$

Дифференцируя (1.12), получим $u_{k,l}$, после подстановки которых в (1.1) для напряжений имеем

$$\sigma_{pj}=-\frac{1}{|x|^3}\left[(x_p\delta_{ij}+x_j\delta_{ip}-x_i\delta_{pj})\mathrm{m}+\frac{x_ix_px_j}{|x|^2}\mathrm{n}\right]f_i \tag{1.13}$$

$$\mathrm{m}=\mu(\lambda+2\mu)^{-1}/(4\pi)=(1-\nu)^{-1}(1-2\nu)/(8\pi)$$

$$\mathrm{n}=3(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)^{-1}/(4\pi)=3(1-\nu)^{-1}/(8\pi),\quad \nu=\lambda(\lambda+\mu)^{-1}/2$$

Здесь ν — правый оператор Пуассона [17, 18], и в его определении существен данный порядок действия операторов λ и $(\lambda+\mu)^{-1}$.

Если в (1.10) под λ и μ понимать модули Ламе изотропной упругой среды (без наследственности), то (1.12), (1.13) дают решение Кельвина — Сомильяны [1, 2]. Решение (1.12), (1.13) для изотропной среды можно также получить и с помощью принципа Вольтерра для стареющих наследственно-упругих тел [17, 18] из решения Кельвина — Сомильяны.

Таким образом, для вычисления фундаментального решения в стареющей наследственно-упругой изотропной среде для всех ориентаций вектора x необходимо иметь лишь два обратных оператора $(\lambda+2\mu)^{-1}$ и μ^{-1}, которые, если они не выражаются явно, можно найти, суммируя соответствующие ряды Неймана. В случае общей анизотропии для этого необходимо иметь обратный оператор $C_{ik}^{-1}(\zeta)$ для всех значений ζ, лежащих на поверхности единичной сферы $|\zeta|=1$, т. е. суммировать ряды Неймана для каждой точки ζ на поверхности этой сферы.

2. Получим теперь фундаментальные решения для двумерной задачи обобщенной плоской деформации, т. е. для бесконечного пространства, нагруженного сосредоточенными силами с компонентами f_i $(i=1,2,3)$,

равномерно распределенными вдоль некоторой прямой, которую без ограничения общности можно считать совпадающей с осью x_3. Для среды без наследственности такие решения были получены при помощи комплексных потенциалов [19]. Они зависят от значений корней характеристического уравнения. В случае наследственной среды эти корни будут наследственными операторами, но явное выражение их через исходные наследственные операторы $\mathbf{C}_{ijkl}$, особенно для стареющей среды, в общем случае затруднительно.

Фундаментальное решение двумерной задачи обобщенной плоской деформации может быть найдено из приведенного выше фундаментального решения трехмерной задачи путем интегрирования полученных выражений для смещений $u_i(x-y,\ t)$ и напряжений $\sigma_{ij}(x-y,\ t)$ по y_3 при условии $y_1=y_2=0$ (здесь y — точка приложения сосредоточенной силы). Однако при построении фундаментального решения для трехмерной задачи неявно предполагалось, что смещения на бесконечности равны нулю. Другими словами, выражения (1.8) дают значения смещений относительно их значений на бесконечности. Известно, что в фундаментальных решениях для двумерных задач теории упругости смещения на бесконечности имеют логарифмическую особенность. Таким образом, при попытке определить смещения в конечной точке относительно смещений на бесконечности они окажутся неограниченными. Поэтому будем вычислять смещения $w_k(x,\ t)$ в двумерной задаче относительно некоторой конечной точки с координатами a_i. Тогда

$$w_k(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}[u_k(x-y,t)-u_k(a-y,t)]dy_3,\quad y_1=y_2=0$$

Учитывая выражение (1.4), получим

$$w_k=(2\pi)^{-3/2}\lim_{z\to\infty}\int_{-z}^{z}dy_3\int_{V^\vee}u_k{}^\vee(x^\vee,t)\{\exp[-ix_p{}^\vee(x_p-y_p)]-$$

$$-\exp[-ix_p{}^\vee(a_p-y_p)]\}\,dV^\vee=(2\pi)^{-3/2}\lim_{z\to\infty}\int dx_3{}^\vee 2\,\frac{\sin(x_3{}^\vee z)}{x_3{}^\vee}\times$$

$$\times\int_{S^\vee}u_k{}^\vee(x^\vee,t)\{\exp(-ix_\alpha{}^\vee x_\alpha)\exp(-ix_3{}^\vee x_3)-$$

$$-\exp(-ix_\alpha{}^\vee a_\alpha)\exp(-ix_3{}^\vee a_3)\}\,dS^\vee$$

Здесь $S^\vee$ — двумерная плоскость в пространстве параметров преобразования Фурье, $dS^\vee=dx_1{}^\vee dx_2{}^\vee$. Принимая во внимание (см., например, [2]), что

$$\lim_{z\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x_3{}^\vee)\frac{\sin(x_3{}^\vee z)}{x_3{}^\vee}dx_3{}^\vee=\frac{\pi}{2}[\psi(+0)+\psi(-0)]$$

имеем

$$w_k=(2\pi)^{-1/2}\int_{S^\vee}w_k{}^\vee(x^\vee,t)[\exp(-ix_\alpha{}^\vee x_\alpha)-\exp(-ix_\alpha{}^\vee a_\alpha)]\,dS^\vee$$

$$w_k{}^\vee(x^\vee,t)=u_k{}^\vee(x^\vee,t)|_{x_3{}^\vee=0}=(2\pi)^{-3/2}[C_{ki}^{\vee-1}(x^\vee)|_{x_3{}^\vee=0}f_i](t)$$

Введем на плоскости $(x_1{}^\vee,\ x_2{}^\vee)$ полярную систему координат $(r^\vee,\ \varphi^\vee)$, где угол $\varphi^\vee$ отсчитывается от направления x. Тогда $x_\alpha{}^\vee=r^\vee\eta_\alpha{}^\vee$, $\eta_\alpha{}^\vee\eta_\alpha{}^\vee=1$, $x_\alpha{}^\vee x_\alpha=r^\vee r\cos\varphi^\vee$, $dS^\vee=r^\vee dr^\vee d\varphi^\vee$, $r^2=x_\alpha x_\alpha$, $r_a{}^2=a_\alpha a_\alpha$, $\cos\varphi_a=a_\alpha x_\alpha/(r_a r)$. Учитывая $w_k{}^\vee(\eta^\vee,\ t)=w_k{}^\vee(-\eta^\vee,\ t)$, получим [20]:

$$w_k=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi}d\varphi^\vee w_k{}^\vee(\eta^\vee,t)\int_0^{\infty}[\cos(r^\vee r\cos\varphi^\vee)-\cos(r^\vee r_a\cos\varphi_a)]\frac{dr^\vee}{r^\vee}=$$

$$=-(2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi}d\varphi^\vee w_k{}^\vee(\eta^\vee,t)\lim_{R^\vee\to 0}[\mathrm{Ci}(R^\vee r|\cos\varphi|)-\mathrm{Ci}(R^\vee r_a|\cos\varphi_a|)]$$

где $\mathrm{Ci}(\psi)$ — интегральный косинус, а C — постоянная Эйлера — Маскерони:

$$\mathrm{Ci}(\psi) = C + \ln\psi + g(\psi), \quad g(\psi) = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\psi^{2p}}{(2p)!\,2p}$$

Принимая во внимание, что $g(0)=0$, имеем

$$w_k = -(2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} w_k\check{\ } (\eta\check{\ }(\varphi\check{\ }), t) \ln \frac{r\,|\cos\varphi\check{\ }|}{r_a\,|\cos\varphi_a\check{\ }|}\, d\varphi\check{\ } =$$

$$= -(2\pi)^{-1/2} \oint_{\eta_\alpha\check{\ }\eta_\alpha\check{\ }=1} w_k\check{\ }(\eta\check{\ }, t) \ln|x_\alpha \eta_\alpha\check{\ }|\,|d\eta\check{\ }| + B \qquad (2.1)$$

Через B обозначена постоянная, не зависящая от x, которую можно опустить.

Для напряжений после дифференцирования выражения (2.1) получим

$$\sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijk\beta} w_{k,\beta} = -(2\pi)^{-1/2} \mathbf{C}_{ijk\beta} \int_{\eta_\alpha\check{\ }\eta_\alpha\check{\ }=1} w_k\check{\ }(\eta\check{\ }, t) \frac{\eta_\beta\,|d\eta\check{\ }|}{x_\alpha \eta_\alpha\check{\ }} \qquad (2.2)$$

Подставляя (1.7) в (2.2), переходя к комплексной переменной $\eta^\circ = \eta_1\check{\ } + i\eta_2\check{\ }$ и оценивая контурный интеграл с помощью теории вычетов, можно получить аналог решения [19] для сосредоточенной силы в бесконечной плоскости в виде временного ряда.

При наличии в рассматриваемой среде плоскости упругой симметрии, совпадающей с плоскостью (x_1, x_2), часть компонент тензора $C_{\alpha\beta\gamma\omega}$ равна нулю, а именно $\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma3} = \mathbf{C}_{33\gamma3} = 0$. Равны нулю также компоненты, которые совпадают с приведенными в силу условий симметрии. Тогда из (1.5) имеем $\mathbf{C}_{\alpha3}|_{\hat{x}_3=0} = \mathbf{C}_{3\alpha}|_{\hat{x}_3=0} = 0$. Следовательно

$$w_\alpha(x\check{\ }, t) = (2\pi)^{-3/2} [\mathbf{C}_{\alpha\beta}\check{\ }^{-1}|_{x_3\check{\ }=0} f_\beta](x\check{\ }, t)$$

$$w_3\check{\ }(x\check{\ }, t) = (2\pi)^{-3/2} [\mathbf{C}_{33}\check{\ }^{-1}|_{x_3\check{\ }=0} f_3](x\check{\ }, t) \qquad (2.3)$$

Подстановка соотношений (2.3) в (2.1), (2.2) показывает, что в этом случае смещения u_α и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}$, σ_{33} зависят только от двух компонент силы f_α, а смещение u_3 и напряжения $\sigma_{3\alpha}$ — только от третьей компоненты f_3, т. е. решение разделилось на плоскую и антиплоскую деформацию.

Если $f_3=0$, то эти же результаты можно получить подставляя в (1.3) условие $u_3=0$ и используя эти уравнения для $i=1, 2$. При этом, если существует плоскость упругой симметрии, вместо (1.2) получим

$$\mathbf{C}_{\alpha\beta\gamma\omega} u_{\gamma,\alpha\omega} = -\delta_{(2)}(x) f_\alpha(t), \quad \delta_{(2)}(x) = \delta(x_1)\delta(x_2) \qquad (2.4)$$

Применяя преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 и разрешая полученную систему интегральных уравнений, после обратного преобразования Фурье придем к искомому результату — соотношениям (2.1)—(2.3) для смещений и напряжений.

Рассмотрим задачу обобщенного плоского напряженного состояния. В пластине, нагруженной в ее плоскости сосредоточенной силой и имеющей свободные от усилий поверхности, будем вычислять средние по толщине пластины напряжения и смещения. Полагаем, что срединная плоскость пластины (x_1, x_2) является плоскостью симметрии. Тогда при $\langle\sigma_{33}\rangle = 0$ получим

$$\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle = \mathbf{b}_{\alpha\beta\gamma\omega} \langle\sigma_{\alpha\omega}\rangle \qquad (2.5)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по толщине, а $\mathbf{b}_{\alpha\beta\gamma\omega}$ — тензор закона Гука, обратный тензору $\mathbf{C}_{ijkl}$, т. е. решение системы (1.1) линейных уравнений Вольтерра (по времени) относительно деформаций. Рассматривая (2.5) как систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных $\langle\sigma_{\alpha\omega}\rangle$ (если учесть симметрию тензоров, то трех уравнений относительно трех неизвестных) и разрешая ее, получим

$$\sigma_{\alpha\beta}=\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}\varepsilon_{\gamma\omega} \tag{2.6}$$

Здесь и далее угловые скобки опускаются. Можно показать, что при наличии плоскости упругой симметрии

$$\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}=C_{\alpha\beta\gamma\omega}-C_{\alpha\beta33}(C_{3333})^{-1}C_{33\gamma\omega} \tag{2.7}$$

Усредняя уравнения равновесия (1.2) для $i=1$, 2 (при этом вследствие условий $\sigma_{i3}=0$ на поверхностях пластины в них пропадают производные по координате x_3) и подставляя туда (2.6), получаем

$$\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}u_{\gamma,\alpha\omega}=-\delta_2(x)f_\alpha(t) \tag{2.8}$$

Сравнивая (2.8) и (2.4), видим, что эти уравнения идентичны с точностью до замены тензора $\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}$ на $C_{\alpha\beta\gamma\omega}$. Следовательно, соотношения (2.1)—(2.3) дают решения соответствующей задачи плоского напряженного состояния, если в них заменить $C_{\alpha\beta\gamma\omega}$ на $\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}$, т. е.

$$\begin{gathered}
w_\varkappa=-(2\pi)^{-2}\oint\limits_{\eta_\alpha^\vee\eta_\alpha^\vee=1}[C_{\varkappa\beta}^{\vee *-1}(\eta^\vee)f_\beta](t)\ln|x_\alpha\eta_\alpha^\vee|\,|d\eta^\vee| \\
\sigma_{\varkappa\omega}=-(2\pi)^{-2}\overset{*}{C}_{\varkappa\omega\gamma\beta}\oint\limits_{\eta_\alpha^\vee\eta_\alpha^\vee=1}[C_{\gamma\delta}^{\vee *-1}(\eta^\vee)f_\delta](t)\frac{\eta_\beta^\vee}{x_\alpha\eta_\alpha^\vee}|d\eta^\vee|, \\
C_{\gamma\delta}^{\vee *}=\overset{*}{C}_{\gamma\alpha\delta\beta}\eta_\alpha^\vee\eta_\beta^\vee
\end{gathered} \tag{2.9}$$

В случае, когда плоскости упругой симметрии нет, принятая постановка задач обобщенного напряженного состояния отсутствует и различные постановки будут зависеть от вводимых дополнительных гипотез. Если считать, что кроме $\langle\sigma_{33}\rangle=0$ также и $\langle\sigma_{\alpha3}\rangle=0$, то выражения для деформаций опять будут иметь вид (2.5). Сохранятся и остальные формулы, за исключением (2.7), так как тензор $\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}$, являющийся обратной матрицей для системы (2.5), будет выражаться через C_{ijkl} несколько сложнее. Однако соотношения для смещений и напряжений будут иметь тот же вид (2.9).

В задаче обобщенной плоской деформации для изотропной стареющей наследственно-упругой среды после подстановки (1.11) в (2.1) получим

$$w_k=-(2\pi)^{-2}\int\limits_0^{2\pi}[(\lambda+2\mu)^{-1}\{-(\lambda+\mu)\eta_i^\vee(\varphi)\eta_k^\vee(\varphi)+(\lambda+2\mu)\delta_{ik}\}\mu^{-1}f_i]\times$$

$$\times[\ln r+\ln|\cos\varphi^\vee|]d\varphi^\vee$$

Учитывая, что $\eta_1^\vee=\cos(\varphi^\vee+\psi)$, $\eta_2^\vee=\sin(\varphi^\vee+\psi)$, $\eta_3^\vee=0$, где ψ — угол между вектором x и осью x_1, и используя соотношения [20]:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\ln(\cos\varphi)\,d\varphi=-\frac{\pi}{8}(1+2\ln 2)$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\ln(\cos\varphi)\,d\varphi=-\frac{\pi}{8}(-1+2\ln 2)$$

после отбрасывания членов, не зависящих от x, получим

$$\begin{gathered}
w_\alpha=\frac{1}{4\pi}(\lambda+2\mu)^{-1}\left\{-(\lambda+3\mu)\delta_{\alpha\beta}\ln r+(\lambda+\mu)\frac{x_\alpha x_\beta}{r^2}\right\}\mu^{-1}f_\beta \\
w_3=-{}^1/_2\ln r\mu^{-1}f_3/\pi
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Решение здесь также распалось на решения для плоской и антиплоской деформации. Дифференцирование (2.10) дает

$$w_{\alpha,\gamma}=\frac{1}{4\pi r}(\lambda+2\mu)^{-1}\left\{-(\lambda+3\mu)\delta_{\alpha\beta}\frac{x_\gamma}{r}+(\lambda+\mu)\times\right.$$

$$\times\left(\delta_{\alpha\gamma}\frac{x_\beta}{r}+\delta_{\beta\gamma}\frac{x_\alpha}{r}-2\frac{x_\alpha x_\beta x_\gamma}{r^3}\right)\Big\}\mu^{-1}f_\beta,\qquad w_{3,\gamma}=-\frac{1}{2\pi}\frac{x_\gamma}{r^2}\mu^{-1}f_3$$

а использование (1.1), (1.10) позволяет определить напряжения

$$\sigma_{\alpha\gamma}=-\frac{1}{r}\left[2\left(\frac{x_\alpha}{r}\delta_{\beta\gamma}+\frac{x_\gamma}{r}\delta_{\beta\alpha}-\frac{x_\beta}{r}\delta_{\alpha\gamma}\right)\mathbf{m}+\frac{4}{3}\frac{x_\alpha x_\beta x_\gamma}{r^3}\mathbf{n}\right]f_\beta$$

$$\sigma_{33}=-\frac{1}{2\pi r}\frac{x_\beta}{r}\nu(1-\nu)^{-1}f_\beta,\qquad \sigma_{\alpha 3}=-\frac{1}{2\pi r}\frac{x_\alpha}{r}f_3 \tag{2.11}$$

В случае плоского напряженного состояния из (2.7), (1.10) имеем

$$\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}=[\lambda-\lambda(\lambda+2\mu)^{-1}\lambda]\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\omega}+\mu(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\omega}+\delta_{\alpha\omega}\delta_{\beta\gamma})$$

Сравнивая это выражение с (1.10), получим, что $C^*_{\alpha\beta\gamma\omega}$ из $C_{\alpha\beta\gamma\omega}$ образуется заменой λ на $\lambda^*=2\lambda(\lambda+2\mu)^{-1}\mu$. Учитывая, как было показано, что все соотношения плоского напряженного состояния получаются из соответствующих соотношений плоского деформированного состояния заменой $C_{\alpha\beta\gamma\omega}$ на $C^*_{\alpha\beta\gamma\omega}$, видим, что выражения для смещений ω_α и напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ при плоском напряженном состоянии получаются из (2.10), (2.11) после замены λ на λ^*.

3. Рассмотрим несколько предельных случаев. Полагаем, что нагрузка приложена в момент $t=0$, т. е. $f_i(t)=0$ при $t<0$. Будем далее пользоваться двумя функциональными пространствами на полуоси: $C[0,\infty]$ — пространство функций, непрерывных на полуоси и имеющих конечный предел на бесконечности, и $C[0,\infty)$ — пространство функций непрерывных и равномерно ограниченных на полуоси, которые, однако, могут не иметь определенного предела на бесконечности. В обоих пространствах определим норму $\|g\|=\sup|g(t)|$, $0\leqslant t<\infty$.

3.1. Пусть $t\to+0$; тогда, как можно видеть из (1.1), приходим к задаче для анизотропной среды без наследственности с модулями упругости, совпадающими с начальными мгновенными модулями $C^{\mathrm{I}}_{ijkl}(0)$. Из (1.6) получим $u_k^\vee(x^\vee,0)=(2\pi)^{-3/2}(C^{\vee\mathrm{I}})_{ki}^{-1}(\eta^\vee,0)f_i(0)r^{\vee-2}$ и для напряжений и смещений приходим к соотношениям (1.8), (1.9), (2.1), (2.2), (2.9) с заменой операторов C_{ijkl}, $\overset{*}{C}_{\alpha\beta\gamma\omega}$, $C_{ij}^{\vee-1}$, $C_{\alpha\beta}^{\vee*-1}$ на матрицы $C^{\mathrm{I}}_{ijkl}(0)$, $C^{\mathrm{I}*}_{\alpha\beta\gamma\omega}(0)$ $(C^{\vee\mathrm{I}})_{ij}^{-1}(\eta^\vee,0)$, $(C^{\vee\mathrm{I}*})_{\alpha\beta}^{-1}(\eta^\vee,0)$ соответственно.

В изотропном случае будут верны выражения (1.12), (1.13), (2.10), (2.11), если вместо операторов λ и μ подставить константы $\lambda^{\mathrm{I}}(0)$, $\mu^{\mathrm{I}}(0)$.

3.2. Рассмотрим поведение фундаментального решения при $t\to\infty$ для случая, когда $f_i(t)\in C[0,\infty]$. Пусть далее операторы C_{ijkl} действуют и ограничены в $C[0,\infty]$. Условия на ядра $C_{ijkl}(t,\tau)$, достаточные для этого, получены в лемме [21]. К этому классу будут также относиться операторы, на которые наложены несколько более жесткие условия (§ 4, гл. I [15]). Тогда и оператор $C_{qk}^{\vee\mathrm{III}}(\eta)$, $|\eta|=1$ будет ограниченным в $C[0,\infty]$. Будем далее в этом и следующем пункте рассматривать материалы, для которых оператор $C_{qk}^\vee(\eta^\vee)$, $|\eta^\vee|=1$ имеет ограниченный обратный в $C[0,\infty]$; тогда, как следует из (1.8), при $t\to\infty$ $u_i(x,t)\to u_i(x,\infty)\neq\pm\infty$. Это заведомо имеет место, если нормы интегральных операторов C^{II}_{ijkl} достаточно малы. Более точные утверждения приведены в [22].

В том случае, когда спектральный радиус ρ оператора $C^{\vee\mathrm{III}}$ меньше единицы, величины $u_i(x,\infty)$, $\sigma_{ij}(x,\infty)$ можно получить, подставляя в выражения (1.8), (1.9), (2.1), (2.2), (1.6) оператор $C_{ki}^{\vee-1}$ в виде ряда Неймана (1.7). При этом он будет и на полуоси сходиться равномерно по η, $|\eta|=1$. Для $\rho(C^{\vee\mathrm{III}})$ можно воспользоваться оценкой [22]:

$$\rho(C^{\vee\mathrm{III}})\leqslant\lim_{t^*\to\infty}\sup_{t^*\leqslant t<\infty}\int_{t^*}^{t}\|C^{\vee\mathrm{III}}(t,\tau,\eta^\vee)\|_E\,d\tau,\qquad \|C^{\vee\mathrm{III}}\|_E\leqslant\|(C^{\vee\mathrm{I}})^{-1}\|_E\cdot\|C^\vee\|_E$$

$$\|C^\vee\|_E=\|C_{ijkl}\eta_j{}^\vee\eta_l{}^\vee\|=\sup_{|\xi|=1}\{C_{ijkl}\eta_j{}^\vee\eta_i{}^\vee\xi_k C_{ipqr}\xi_r\eta_p{}^\vee\eta_q{}^\vee\}^{1/2}$$

Это будет иметь место и для плоского напряженного состояния, если $\rho(\mathbf{C}^{\vee\text{III}*})<1$.

Пусть далее $\mathbf{C}_{ijkl}$ — ограниченные операторы с затухающей памятью, т. е. $C^{\text{I}}_{ijkl}(t)\in C[0, \infty)$:

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t C_{ijkl}(t,\tau)\,d\tau=C^{1\infty}_{ijkl}\neq\pm\infty, \qquad \lim_{t\to\infty}\int\limits_0^a |C_{ijkl}(t,\tau)|\,d\tau=0$$

для любого $a\in[0, \infty)$. К этому классу относятся все ограниченные операторы с ядрами, зависящими лишь от разности аргументов. Таковы, в частности, операторные модули нестареющей наследственно-упругой среды. Принимая во внимание, что вследствие предполагаемой непрерывной обратимости в $C[0, \infty)$ оператора $\mathbf{C}^{\vee}$ решение задачи при $t\to\infty$ существует, получим [21], что при $t\to\infty$ в соотношениях (1.1), (1.2) и так далее необходимо заменить операторы $\mathbf{C}_{ijkl}$ на постоянные $C^{\infty}_{ijkl}=C^{\text{I}}_{ijkl}(\infty)+C^{1\infty}_{ijkl}$.

Таким образом, для $u_i(x, \infty)$ переходим к задачам в ненаследственной анизотропной упругой среде, решение которых дается выражениями (1.8), (1.9), (2.1), (2.2), (2.9), где оператор $\mathbf{C}^{\vee-1}_{ki}$ необходимо заменить на матрицу $(C^{\vee\infty})_{ki}^{-1}$, $C^{\vee\infty}_{ij}=C^{\infty}_{ijkl}\eta_j{}^{\vee}\eta_l{}^{\vee}$.

В изотропных материалах для получения $u_i(x, \infty)$ необходимо в (1.12), (1.13), (2.10), (2.11) заменить λ, μ на λ^{∞}, μ^{∞}, а λ^{-1}, μ^{-1} на $1/\lambda^{\infty}$, $1/\mu^{\infty}$.

3.3 Рассмотрим случай установившихся колебаний, когда воздействие $f_i(t)=0$ при $t<0$ $f_i(t)\in C[0, \infty)$ и при $t\to\infty$ $f(t)\to f_0\cos(\omega t+\alpha)$, а постоянная $f_0\neq\pm\infty$. Пусть $\mathbf{K}$ — оператор Вольтерра, такой, что

$$(\mathbf{K}g)(t)=K^{\text{I}}(t)g(t)+\int\limits_0^t K(t,\tau)g(\tau)\,d\tau$$

действует и ограничен в пространствах $C[0, \infty]$ и $C[0, \infty)$:

$$K^{\text{I}}(t)\in C[0,\infty]; \quad \int\limits_0^t K(t,\tau)\,d\tau\to K^{1\infty}\neq\pm\infty, \quad \int\limits_0^a K(t,\tau)\,d\tau\to 0$$

при $t\to\infty$ для любого $a\in[0, \infty)$, т. е. $\mathbf{K}$ является оператором с затухающей памятью. При $t\to\infty$ функция $K(t, \tau)$ стремится к $K^{\circ}(t-\tau)$ в том смысле [15], что

$$\lim_{t^*\to\infty}\ \sup_{t^*\leqslant t<\infty}\int\limits_{t^*}^t |K(t,\tau)-K^{\circ}(t-\tau)|\,d\tau=0$$

а функция $g(t)\in C[0, \infty)$ и при $t\to\infty$ $g(t)\to g_0e^{i\omega t}$, где константа $g_0\neq\pm\infty$. Можно показать, что при этих условиях $[\mathbf{K}g](t)\to K^c g_0 e^{i\omega t}$ при $t\to\infty$:

$$K^c=K^{\text{I}}(\infty)+\int\limits_0^{\infty} K^{\circ}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

Если, кроме того, оператор $\mathbf{K}$ непрерывно обратим в $C[0, \infty]$ и $C[0, \infty)$, то $[\mathbf{K}^{-1}g](t)\to g_0e^{i\omega t}/K^c$ при $t\to\infty$.

Отсюда видно, что если $\mathbf{C}_{ijkl}$ — ограниченные в $C[0, \infty]$, $C[0, \infty)$ операторы с затухающей памятью, при $t\to\infty$ переходящие в операторы с ядрами $C^{\circ}_{ijkl}(t-\tau)$, и, кроме того, оператор $\mathbf{C}_{ik}{}^{\vee}(\eta^{\vee})$ непрерывно обратим в $C[0, \infty]$ и $C[0, \infty)$ при $|\eta^{\vee}|=1$, а силы $f_i(t)\to f_i\cos(\omega t+\alpha)$ при $t\to\infty$, то $u_j\to\to\mathrm{Re}[u_j{}^c e^{i(\omega t+\alpha)}]$, $\sigma_{ij}=\mathrm{Re}[\sigma_{ij}{}^c e^{i(\omega t+\alpha)}]$ при $t\to\infty$.

Здесь $u_j{}^c$ и $\sigma_{ij}{}^c$ — решения соответствующих задач для анизотропно-упругой среды (без наследственности) с модулями упругости

$$C^{c}_{ijkl}=C^{\text{I}}_{ijkl}(\infty)+\int\limits_0^{\infty} C^{\circ}_{ijkl}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau.$$

которые даются выражениями (1.8), (1.9), (2.1), (2.2), (2.9), если заменить в них оператор $C_{ki}^{\smile -1}$ на матрицу $(C^{\smile c})_{ki}^{-1}$. В изотропных материалах u_i^c и σ_{ij}^c даются выражениями (1.12), (1.13), (2.10), (2.11), в которых λ и μ необходимо заменить на λ^c, μ^c, а λ^{-1}, μ^{-1} на $1/\lambda^c$, $1/\mu^c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Под ред. В. Д. Купрадзе. М.: Наука, 1976, 662 с.
2. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
3. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и их приложения в механике. Под ред. Т. Круз, Ф. Риццо. М.: Мир, 1978. 210 с.
4. *Хуторянский Н. М.* Применение методов потенциала в задачах упругости и вязкоупругости.– В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1979, № 10, с. 122–135.
5. *Vogel S. M., Rizzo F. J.* An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems.– J. Elast., vol. 3, N 3, 1973, p. 203–216.
6. *Wilson R. B., Cruse T. A.* Efficient implementation of anisotropic three dimentional boundary – integral equation stress analysis.– Intern. J. Numer. Methods. Eng., vol. 12, N 10, 1978, p. 1383–1397.
7. *Patterson C., Sheikh M. A.* A modified Trefftz method for three dimensional elasticity.– In: Boundary Elem. Proc. 5th Intern. Conf., Hiroshima, 1983.– Berlin. Springer, 1983, p. 427–437.
8. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* О построении тензора Грина для основного уравнения теории упругости в случае неограниченной упруго-анизотропной среды.– Ж. эксперим. и теорет. физики, 1947, т. 17, вып. 9, с. 783–791.
9. *Synge J. L.* The Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge, 1957, 424 p.
10. *Осокин А. Е., Перлин П. И.* О численном решении задач теории упругости анизотропной среды методом потенциала.– В кн.: Аэрофизика и прикладная математика. М.: МФТИ, 1980, с. 14–18.
11. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
12. *Осокин А. Е.* О применении метода потенциала к некоторым граничным задачам для наследственно-упругой анизотропной среды.– В кн.: Аэрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1982, с. 61–62.
13. *Осокин А. Е.* О вычислении функции Грина наследственно-упругой анизотропной среды с дробно-экспоненциальным ядром.– В кн.: Аэрофизика и прикладная математика. М.: МФТИ, 1981, с. 67–68.
14. *Михайлов С. Е., Осокин А. Е.* Построение фундаментального решения для анизотропной стареющей среды наследственного типа.– Докл. АН СССР, 1984, т. 274, № 2, с. 292–295.
15. *Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.* Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983. 336 с.
16. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
17. *Ефимов А. Б., Малый В. И.* Метод аналитического продолжения в линейной вязкоупругости стареющих материалов.– Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1, с. 5–13.
18. *Ефимов А. Б., Малый В. И.* О принципе Вольтерра и методе аналитического продолжения в линейной вязкоупругости.– Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 5, с. 1039–1042.
19. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
20. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
21. *Михайлов С. Е.* Сингулярность напряжений в плоском наследственно упругом стареющем теле с угловыми точками.– Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 2, с. 125–138.
22. *Гольденгершель Э. И.* Спектр вольтеррова оператора на полуоси и экспоненциальный рост решений систем интегральных уравнений типа Вольтерра.– Мат. сборник, 1964, т. 64, № 1, с. 115–139.

Москва

Поступила в редакцию
28.VI.1984