

УДК 531.38

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ  
ТРЕХОСНОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПАРАМЕТРАХ УПРАВЛЕНИЯ

ГУЛЯЕВ В. И., КОШКИН В. Л., САВИЛОВА И. В.

Изменение ориентации твердого тела в пространстве может быть выполнено различными способами: посредством трех последовательных разворотов вокруг трех связанных осей [1], одним плоским разворотом вокруг эйлеровой оси [1-4], несколькими плоскими разворотами [5] либо одним пространственным разворотом. Вопросы оптимального управления эйлеровым, или экстенсивным [2], разворотом нашли в литературе наиболее полное отражение. Как отмечается в [5], этот способ особенно эффективен в тех случаях, когда эллипсоид инерции близок к сфере или управление осуществляется малыми по величине управляющими моментами. В публикуемой работе решение задачи оптимального управления ориентацией твердого тела строится в более общем классе пространственных поворотов без дополнительных ограничений на характер результирующего движения.

При использовании для описания положения тела какой-либо системы углов, в частности углов Эйлера, возникают трудности, обусловленные наличием в уравнениях движения особенностей, когда угол нутации становится кратным  $\pi$ . Переход от углов Эйлера к кватерниону позволяет устранить особенность в кинематических уравнениях, однако система оказывается управляемой лишь на интегральном многообразии, описываемом первым интегралом кинематических уравнений в параметрических переменных, что затрудняет решение задачи. В данной работе предлагается подход, при котором задача оптимизации управления формулируется в терминах физических переменных (углах Эйлера), а интегрирование системы уравнений движения и уравнений в вариациях осуществляется в параметрах Родрига-Гамильтона [6] с последующим использованием при построении оптимального управления регуляризирующих матриц перехода.

1. Введем две правые ортогональные системы координат: инерциальную  $X_1 X_2 X_3$  и жестко связанную с телом  $x_1 x_2 x_3$ , оси которой совпадают с главными центральными осями инерции твердого тела.

Движение тела относительно неподвижной точки описывается динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + M_2, \quad I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $I_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — главные моменты инерции тела,  $M_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — проекции управляющего момента на оси  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ . При этом предполагается, что влияющие возмущающих моментов на движение тела пренебрежимо мало.

Взаимное расположение базисов характеризуется углами Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ , изменение во времени которых подчиняется кинематическим уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) / \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= -(\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta + \omega_3 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Требуется построить оптимальное по быстродействию программное управление, переводящее тело из начального состояния

$$\omega_i(0) = 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad (1.3)$$

в положение

$$\omega_i(T) = 0 \quad (i=1, 2, 3), \quad \psi(T) = \psi_T, \quad \theta(T) = \theta_T, \quad \varphi(T) = \varphi_T \quad (1.4)$$

при ограничениях на компоненты управляющего момента

$$|M_i| \leq U_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.5)$$

2. Введем обозначения  $\mathbf{y}(t) = \|\omega_1, \omega_2, \omega_3, \psi, \theta, \varphi\|^T$  — вектор состояния размерностью  $n=6$ ;  $\mathbf{u}(t) = \|M_1, M_2, M_3\|^T$  — вектор управления размерностью  $r=3$  (верхний индекс означает транспонирование). Произведем замену независимой переменной  $t = \alpha\tau$  таким образом, чтобы новая независимая переменная  $\tau$  изменялась на фиксированном отрезке  $[0; T_0]$ . Время движения определим по формуле  $T = \alpha T_0$ , где  $\alpha$  — управляющий масштабный параметр. С учетом произведенной замены и принятых обозначений систему уравнений (1.1), (1.2) с краевыми условиями (1.3), (1.4) представим в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(T_0) = \mathbf{y}_T \quad (2.2)$$

Здесь и далее точкой над буквой обозначено дифференцирование по переменной  $\tau$ . Пусть  $\mathbf{u}_0(\tau)$  — некоторое допустимое управление, переводящее систему из состояния  $\mathbf{y}_0$  в состояние  $\mathbf{y}_T$  при изменении  $\tau$  от 0 до  $T_0$ , при значении управляющего параметра  $\alpha = \alpha_0$ .

Для построения улучшающих вариаций управления  $\delta \mathbf{u}(\tau)$  и управляющего параметра  $\delta \alpha$  линеаризуем (2.1) в окрестности состояния  $\mathbf{y}_0(\tau)$ ,  $\mathbf{u}_0(\tau)$ ,  $\alpha_0$ :

$$\frac{d(\delta \mathbf{y})}{d\tau} = \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \delta \mathbf{y} + \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \delta \alpha \quad (2.3)$$

С учетом (2.2) запишем краевые условия для системы уравнений в вариациях

$$\delta \mathbf{y}(0) = 0, \quad \delta \mathbf{y}(T_0) = 0 \quad (2.4)$$

Представим решение системы уравнений в вариациях в форме Коши

$$\delta \mathbf{y}(\tau) = \alpha_0 \int_0^\tau K(\tau, s) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}(s) ds + \int_0^\tau K(\tau, s) \mathbf{f}(s) ds \delta \alpha$$

Здесь  $K(\tau, s) = Y(\tau)Y^{-1}(s)$  — матрица Коши,  $Y(\tau)$  — решение однородного матричного уравнения в вариациях ( $E$  — единичная матрица)

$$Y' = \alpha_0 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} Y, \quad Y(0) = E \quad (2.5)$$

Краевые условия (2.4) приводят к соотношениям

$$\int_0^{T_0} A(T_0, \tau) \delta \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{g}(T_0) \delta \alpha_0 = 0 \quad (2.6)$$

$$A(T_0, \tau) = \alpha_0 K(T_0, \tau) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{g}(T_0) = \int_0^{T_0} K(T_0, \tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

где  $A(T_0, \tau)$  — матрица размера  $n \times r$ ;  $\mathbf{g}(T_0)$  — вектор размерности  $n$ .

Соотношения (2.6) наряду с (1.5) накладывают ограничения на вариации управления  $\delta \mathbf{u}(\tau)$  и параметра  $\delta \alpha$ .

Градиент целевого функционала  $T = \alpha T_0$  по управляющим переменным представим в виде

$$\text{grad } T = \|0, T_0\|^T \quad (2.7)$$

Проектируя градиент (2.7) на ограничения (2.6), придем к следующим соотношениям для определения искомых вариаций  $\delta \mathbf{u}(\tau)$ ,  $\delta \alpha$  [7, 8]:

$$\delta \mathbf{u}(\tau) = \mu A^T(T_0, \tau) \Gamma^{-1} \mathbf{g}(T_0), \quad \delta \alpha = -\mu [1 - \mathbf{g}^T(T_0) \Gamma^{-1} \mathbf{g}(T_0)]$$

$$\Gamma = \int_0^{T_0} A(T_0, \tau) A^T(T_0, \tau) d\tau + \mathbf{g}(T_0) \mathbf{g}^T(T_0) \quad (2.8)$$

Здесь  $\Gamma$  — матрица Грама системы уравнений в вариациях (2.3),  $\det \Gamma \neq 0$  — условие управляемости [9],  $\mu = \mu_0 T_0$ ,  $\mu_0$  — множитель, подбираемый из условия сходимости вычислительного процесса. Отметим, что при нарушении условия (1.5) к системе ограничений (2.6) непосредственно при проектировании добавляются соотношения типа

$$\delta u_j(\tau') = 0 \quad (2.9)$$

В (2.9)  $\tau'$  — момент времени, кратный заданному шагу дискретизации независимой переменной  $\tau$ , в который нарушается ограничение (1.5).

Снятие ограничений типа (2.9) при возвращении управления внутрь допустимой области осуществляется после анализа знаков соответствующих множителей Лагранжа условий Куна — Таккера [10, 11], вычисляемых при проектировании.

Использование при построении вариаций  $\delta u(\tau)$ ,  $\delta \alpha$  линеаризованных уравнений (2.3) приводит к тому, что при  $u(\tau) = u_0(\tau) + \delta u(\tau)$ ,  $\alpha = \alpha_0 + \delta \alpha$  терминальные условия (2.2) оказываются нарушенными ( $R$  — вектор невязок):  $y(T_0) = y_T + R$ .

Для восстановления нарушенных связей вычислим корректирующие вариации управления  $\delta u_R(\tau)$  и параметры  $\delta \alpha_R$  из условия минимума вспомогательного функционала

$$F = \int_0^{T_0} \delta u_R(\tau) \delta u_R^T(\tau) d\tau + (\delta \alpha_R)^2 \quad (2.10)$$

при ограничениях

$$\int_0^{T_0} A(T_0, \tau) \delta u_R(\tau) d\tau + g(T_0) \delta \alpha_R = -R \quad (2.11)$$

Решая методом множителей Лагранжа изопериметрическую задачу (2.10), (2.11), приходим к следующим соотношениям для определения корректирующих вариаций  $\delta u_R(\tau)$ ,  $\delta \alpha_R$ :

$$\delta u_R(\tau) = -1/2 A^T(T_0, \tau) \Gamma^{-1} R, \quad \delta \alpha_R = -1/2 g^T(T_0) \Gamma^{-1} R \quad (2.12)$$

Скорректированное с учётом (2.12) управление  $u_1(\tau) = u_0(\tau) + \delta u(\tau) + \delta u_R(\tau)$ , удовлетворяя ограничениям (1.5), переводит систему из состояния  $u_0$  в состояние  $u_T$  за меньшее время  $\alpha_1 T_0 = (\alpha_0 + \delta \alpha + \delta \alpha_R) T_0$ .

Принимая  $u_1(\tau)$  и  $\alpha_1$  в качестве порождающих решений и используя описанный подход, можно найти следующее приближение  $u_2(\tau)$ ,  $\alpha_2$  и т. д.

В точке локального минимума целевого функционала градиент (2.7) ортогонален касательной гиперплоскости ограничений, поэтому необходимые условия оптимальности имеют вид

$$A^T(T_0, \tau) \Gamma^{-1} g(T_0) = 0, \quad 1 - g^T(T_0) \Gamma^{-1} g(T_0) = 0 \quad (2.13)$$

и дополняются также условиями Куна — Таккера для ограничений (1.5).

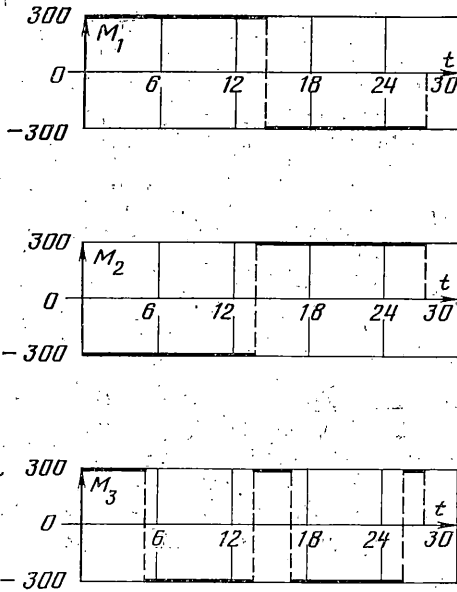
Сходимость описанной процедуры к локальному минимуму функционала  $T$  обеспечивается надлежащим выбором множителя  $\mu_0$  и может быть улучшена предварительным масштабированием переменных [10].

3. Для устранения особенности в кинематических уравнениях и соответствующих уравнениях в вариациях, связанной с вырождением системы отсчета углов Эйлера, введем кватернион  $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , где  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) — параметры Родрига — Гамильтона. Кинематические уравнения (1.2) заменим уравнениями [6].

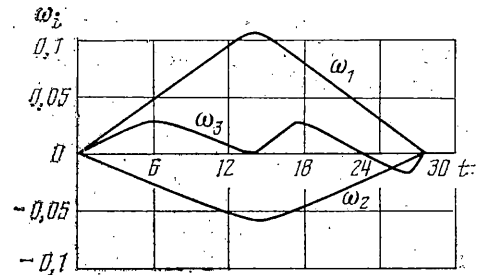
$$\begin{aligned} \lambda_0^* &= -1/2(\omega_1 \lambda_1 + \omega_2 \lambda_2 + \omega_3 \lambda_3), & \lambda_1^* &= 1/2(\omega_1 \lambda_0 + \omega_3 \lambda_2 - \omega_2 \lambda_3) \\ \lambda_2^* &= 1/2(\omega_2 \lambda_0 + \omega_1 \lambda_3 - \omega_3 \lambda_1), & \lambda_3^* &= 1/2(\omega_3 \lambda_0 + \omega_2 \lambda_1 - \omega_1 \lambda_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

с начальными условиями

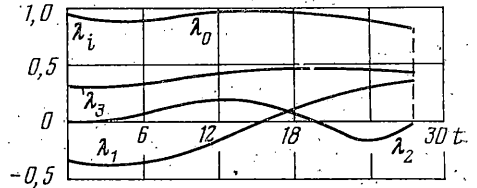
$$\begin{aligned} \lambda_0(0) &= \cos 1/2 \theta_0 \cos 1/2(\psi_0 + \varphi_0), & \lambda_1(0) &= \sin 1/2 \theta_0 \cos 1/2(\psi_0 - \varphi_0) \\ \lambda_2(0) &= \sin 1/2 \theta_0 \sin 1/2(\psi_0 - \varphi_0), & \lambda_3(0) &= \cos 1/2 \theta_0 \sin 1/2(\psi_0 + \varphi_0) \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Непосредственное использование уравнений (3.1) при решении задачи оптимального управления затруднено тем, что параметры Родрига — Гамильтона не являются независимыми, а связаны между собой первым интегралом:  $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ . Таким образом, система становится управляемой лишь на интегральном многообразии и матрица Грама соответствующей системы уравнений в вариациях является вырожденной ( $\det \Gamma = 0$ ).

Обозначив новый вектор состояния  $z(t) = \|\omega_1, \omega_2, \omega_3, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\|^T$ , систему уравнений (2.1) перепишем в виде

$$\dot{z} = \alpha \Phi(z, u) \quad (3.2)$$

Решение  $Y(\tau)$  однородного матричного уравнения (2.5) удовлетворяет соотношению

$$Y(\tau) = P(\tau)Z(\tau) \quad (3.3)$$

Здесь  $Z(\tau)$  — матрица размера  $7 \times 6$  решений системы однородных уравнений  $Z'(\tau) = \alpha_0 \partial \Phi / \partial z Z$  с начальными условиями  $Z(0) = \partial z / \partial y|_{\tau=0}$ ,  $P(\tau) = \partial y / \partial z$  — регуляризирующая матрица перехода размера  $6 \times 7$ . Матрицы перехода  $\partial z / \partial y|_{\tau=0}$ ,  $\partial y / \partial z$  имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & \partial \Lambda / \partial (\psi, \theta, \varphi)|_{\tau=0} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & \partial (\psi, \theta, \varphi) / \partial \Lambda \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial (\psi, \theta, \varphi)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -c_\theta \sin \gamma_1 & -s_\theta \cos \gamma_1 & -c_\theta \sin \gamma_1 \\ -s_\theta \sin \gamma_2 & c_\theta \cos \gamma_2 & s_\theta \sin \gamma_2 \\ s_\theta \cos \gamma_2 & c_\theta \sin \gamma_2 & -s_\theta \cos \gamma_2 \\ -c_\theta \cos \gamma_1 & -s_\theta \sin \gamma_1 & c_\theta \cos \gamma_1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial (\psi, \theta, \varphi)}{\partial \Lambda} = \begin{vmatrix} -\lambda_3/b & -\lambda_2/c & \lambda_1/c & \lambda_0/b \\ \mp 2\lambda_2/\sqrt{bc} & 0 & 0 & \mp 2\lambda_3/\sqrt{bc} \\ -\lambda_3/b & \lambda_2/c & -\lambda_1/c & \lambda_0/b \end{vmatrix}$$

$$c_\theta = \cos^2 \theta, \quad s_\theta = \sin^2 \theta, \quad \gamma_1 = (\psi_0 + \varphi_0)/2, \quad \gamma_2 = (\psi_0 - \varphi_0)/2$$

$$b = \lambda_0^2 + \lambda_3^2, \quad c = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

Таким образом, использование регуляризирующих матриц перехода позволяет соединить преимущества формулировки задачи управления в естественных физических переменных с преимуществами использования

регулярных переменных для численного интегрирования уравнений движения и уравнений в вариациях.

*Замечания.* При численной реализации число активных ограничений (2.9) может быть очень велико. Для их хранения в памяти ЭВМ используется списочно-индексная структура.

При выполнении операции проектирования (2.9) учитывается специальный вид матрицы Грама, что позволяет эффективно применять формулу Фробениуса для обращения клеточных матриц [11].

**4. Примеры.** 1. С использованием описанного подхода решена задача оптимального по быстрдействию управления пространственным разворотом твердого тела с трехосным эллипсоидом инерции из положения  $\omega_i(0)=0$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $\psi_0=\pi/10$ ,  $\theta_0=-\pi/4$ ,  $\varphi_0=\pi/10$  в положение  $\omega_i(T)=0$  ( $i=1, 2, 3$ ),  $\psi_T=\pi/6$ ,  $\theta_T=\pi/4$ ,  $\varphi_T=\pi/6$ .

Главные моменты инерции твердого тела:  $I_1=4 \cdot 10^4$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_2=8 \cdot 10^4$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_3=5 \cdot 10^4$  кг·м<sup>2</sup>. Ограничения на управляющие моменты  $|M_i| \leq 300$  Нм ( $i=1, 2, 3$ ). В качестве начального приближения принято время переориентации  $T_0=50$  с.

На фиг. 1–3 показаны оптимальные законы изменения управляющих моментов, угловых скоростей и параметров Родрига – Гамильтона, соответствующие  $T_{\min}=27,454$  с. Оптимальное управление оказалось релейным. При этом управляющие моменты  $M_1(t)$  и  $M_2(t)$  имеют по одному переключению при  $t=14,4$  и  $14,1$  с соответственно, а управляющий момент  $M_3(t)$  – четыре переключения при  $t_1=5,5$ ;  $t_2=13,5$ ;  $t_3=17,0$ ;  $t_4=25,7$  с. Функции угловых скоростей являются близкими к кусочно-линейным с точками излома в местах переключения управлений.

Полученная схема разворота является пространственной. Оптимальная программа управления в классе экстенсивных разворотов при тех же краевых условиях и ограничениях приводит к времени быстрогодействия  $T=38,52$  с [4]. При этом управляющие моменты имеют одно переключение в момент времени  $t=25,78$  с.

2. Задача отличается от рассматриваемой в первом примере краевыми условиями

$$\omega_i(0)=0 \quad (i=1, 2, 3), \quad \psi(0)=0, \quad \theta(0)=0, \quad \varphi(0)=0$$

$$\omega_i(T)=0 \quad (i=1, 2, 3), \quad \psi(T)=\pi/3, \quad \theta(T)=2\pi/5, \quad \varphi(T)=\pi/3$$

и ограничением на управляющие моменты  $(M_1^2+M_2^2+M_3^2)^{1/2} \leq 300$  Нм.

Время быстрогодействия оказалось  $T_{\min}=36,99$  с. Модуль управляющего момента имеет максимальное значение на интервалах  $(0; 17,57)$  и  $(18,80; 36,99)$  с и равен нулю на интервале  $(17,57; 18,80)$  с. Оптимальное решение в этой задаче близко к оптимальному плоскому развороту [3] по времени быстрогодействия ( $T_{\min}=37,7$  с) и характеру изменения угловых скоростей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром. – Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 6, с. 1235–1238.
3. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов В. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 380 с.
4. Алексеев К. Б. Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1977. 121 с.
5. Шкляр В. Н., Малышенко А. М. К задаче оптимального пространственного разворота космического аппарата относительно центра масс. – Космич. исслед., 1975, т. 8, № 4, с. 437–480.
6. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
7. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
8. Баженов В. А., Гуллев В. И., Марковская Е. О. Оптимальное управление нелинейными механическими системами. – В кн.: Математическая физика: Киев: Наук. думка, 1983, вып. 34, с. 8–13.
9. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
10. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
11. Ештушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.

Киев

Поступила в редакцию  
11.III.1985