

УДК 539.374

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ И МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

МАКСИМОВ С. Б., НЕМИРОВСКИЙ Ю. В.

Применительно к общему кусочно-гладкому условию текучести исследован тип систем уравнений плоских задач теории идеальной пластичности. Определены условия гиперболичности системы уравнений как в случае регулярных участков поверхности текучести, так и в случае сингулярных режимов для задач о плосконапряженном состоянии пластины с учетом изменения толщины в процессе пластического деформирования. Использование метода малого параметра в сочетании с методом характеристик позволяет построить эффективные численные алгоритмы. В качестве примера рассматривается задача о растяжении и изгибе моментами полосы, ослабленной симметричными вырезами. Показано, что использование кусочно-линейных аппроксимаций поверхности текучести в сочетании с экстремальными свойствами уровня мощности внешних сил позволяет получать эффективные приближенные решения. Результаты работы могут найти применение при расчетах конструкций из физически и конструктивно-анизотропных материалов и анализе технологических режимов обработки материалов.

Методы возмущений получили широкое распространение при анализе нелинейных уравнений, в частности при исследовании плоских задач жестко идеально пластического тела. Обзор работ по применению метода малого параметра, а также необходимые сведения содержатся в [1], но, несмотря на обилие работ в этом направлении, наблюдается определенный формализм в применении метода, отсутствует анализ общих свойств получаемых систем уравнений. В частности, остается открытым вопрос о типе получаемых для соответствующих приближений систем уравнений. Известно, что успех решения плоских задач идеальной пластичности и выбор метода приближенного решения обусловлен типом систем уравнений. Так, для гиперболических систем эффективным оказался метод характеристик или его численный аналог.

В [2] применение метода малого параметра в сочетании с методом характеристик позволило провести анализ шейкообразования в плоском образце при растяжении. Ряд технологических задач идеальной пластичности исследован в [3] на основе разработанного в [4] метода возмущений полей линий скольжения для плоскодеформированных задач при условии текучести Мизеса. В публикуемой работе исследуется тип системы уравнений применительно к общему кусочно-гладкому условию текучести жестко идеально пластического типа, анализ общих свойств систем уравнений для приближений при произвольном малом параметре, что позволяет в сочетании с методом характеристик построить эффективный численный алгоритм.

1. В случае плоской задачи компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) должны удовлетворять уравнениям равновесия и кусочно-гладкому в трехмерном пространстве напряжений  $\sigma_{ij}$  невогнутому условию текучести

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad F_n(\sigma_{ij}) = k_n \quad (n=1 \dots m) \quad (1.1)$$

Справедлив ассоциированный закон пластического течения (по  $i$  не суммировать):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \mu_n \partial F_n / \partial \sigma_{ii}, & 2\varepsilon_{12} &= \mu_n \partial F_n / \partial \sigma_{12} \\ 2\varepsilon_{ij} &= v_{i,j} + v_{j,i} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\mu_n = 0$ , если  $F_n < k_n$  или  $F_n = k_n$ ,  $dF_n < 0$ ;  $\mu_n > 0$ , если  $F_n = k_n$  и  $dF_n = 0$ ;  $F_n$  — однородная функция напряжений первой степени.

Анализ типа системы уравнений (1.1), (1.2) в случае регулярного режима для изотропного материала проведен в [5]. Для произвольных

материалов с кусочно-гладким условием пластичности для регулярного режима

$$F_n(\sigma_{ij}) = k_n \quad (1.3)$$

тип системы уравнений определяется в зависимости от знака выражения  $\Delta = a_{12n}^2 - 4a_{11n}a_{22n}$ , где  $a_{ijn} = \partial F_n / \partial \sigma_{ij}$ . Условия  $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$  определяют соответственно гиперболический, параболический и эллиптический типы как статической, так и кинематической задачи.

При  $\Delta > 0$  характеристики статической и кинематической задач совпадают, а соотношения на них имеют вид

$$dx_2/dx_1 = \lambda_m = \frac{1}{2}(-a_{12n} \pm \sqrt{\Delta})/a_{22n} \quad (m=1, 2)$$

$$d\eta_m = a_{11n}d\sigma_{11} - a_{22n}\lambda_m d\sigma_{12} = 0$$

$$dv_1 + \lambda_m dv_2 = 0$$

Таким образом, вдоль характеристической линии скорость относительного удлинения равна нулю. Выбирая  $\eta_m$  за новые независимые переменные, систему уравнений (1.1)–(1.3) можно привести к канонической линейной системе уравнений

$$\partial x_2 / \partial \eta_2 = \lambda_1 \partial x_1 / \partial \eta_2, \quad \partial x_2 / \partial \eta_1 = \lambda_2 \partial x_1 / \partial \eta_1$$

Преобразование возможно, если якобиан

$$J = \det \left\| \frac{\partial \eta_m}{\partial x_i} \right\| = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} (\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} (\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$$

Случай  $J=0$  образуют простые интегралы пластичности, когда одно из семейств характеристик (или оба) являются прямыми линиями. В случае плоской деформации для несжимаемого материала  $a_{11n} = -a_{22n}$  тип уравнений гиперболический и характеристики взаимно ортогональны.

При  $\Delta=0$  система уравнений (1.1)–(1.3) имеет параболический тип, характеристиками являются прямые линии, уравнения которых и соотношения на них определяются зависимостями

$$dx_2/dx_1 = \lambda_1 = -\frac{1}{2}a_{11n}/a_{22n}$$

$$a_{11n}d\sigma_{11} + a_{12n}d\sigma_{12} = 0, \quad a_{22n}d\sigma_{22} + a_{12n}d\sigma_{12} = 0$$

## 2. В случае сингулярного режима

$$F_1 - k_1 = 0, \quad F_2 - k_2 = 0 \quad (2.1)$$

решение статической задачи соответствует равномерному распределению напряжений  $\sigma_{ij} = \text{const}$ , а поле скоростей недоопределено, так как для определения двух компонент вектора скорости  $v_i$  имеем одно уравнение

$$2\Delta_1 \varepsilon_{12} = \Delta_2 \varepsilon_{11} + \Delta_3 \varepsilon_{22} \quad (2.2)$$

$$\Delta_1 = a_{111}a_{222} - a_{112}a_{221}, \quad \Delta_2 = a_{121}a_{222} - a_{122}a_{221}$$

$$\Delta_3 = a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121}$$

$$\mu_1 = (a_{222}\varepsilon_{11} - a_{112}\varepsilon_{22})/\Delta_1 \geq 0$$

$$\mu_2 = (a_{111}\varepsilon_{22} - a_{221}\varepsilon_{11})/\Delta_1 \geq 0$$

В задачах о плосконапряженном состоянии с учетом изменения толщины  $h$  в процессе деформирования такая неоднозначность в определении скоростей  $v_i$  устраняется, при этом сингулярному режиму может соответствовать более широкий класс напряжений. В этом случае уравнения равновесия и уравнение несжимаемости имеют вид [5]:

$$N_{ij,j} = 0 \quad (N_{ij} = h\sigma_{ij}) \quad (2.3)$$

$$\partial h / \partial t + (v_1 h)_{,1} + (v_2 h)_{,2} = 0 \quad (2.4)$$

Для сингулярного режима (2.1) получаем

$$F_1(N_{ij}) - \beta F_2(N_{ij}) = 0, \quad \beta = k_1/k_2 \quad (2.5)$$

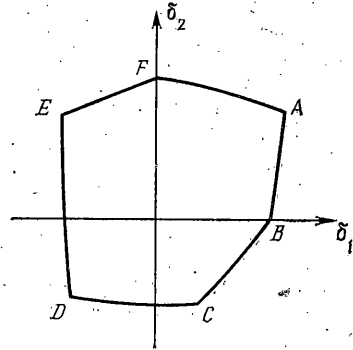
и конечное соотношение для толщины  $h = F_1(N_{ij})/k_1$ .

Задача в усилиях (2.3)–(2.5) в этом случае является статически определимой, а соотношение  $h = F_1(N_{ij})/k_1$  служит для определения толщины. Можно показать, что при известных напряжениях и толщине относительно скоростей получаем линейную систему уравнений (2.2), (2.3) гиперболического типа, а уравнения характеристик и соотношения на них имеют вид

$$\frac{dx_2/dx_1 = \lambda_m =}{=} \frac{1}{2} [(\Delta_2 - \Delta_3) \pm \sqrt{(\Delta_2 - \Delta_3)^2 + 4\Delta_1^2}] / \Delta_1$$

$$dv_1 + \lambda_m dv_2 + \varepsilon_{33}(1 + \Delta_2/\Delta_1) dx_1 = 0,$$

$$\varepsilon_{33} = 1/hdhd/dt$$



Фиг. 1

Тип уравнений в усилиях определяется в зависимости от знака выражения  $B = b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22}$ , где  $b_{ij} = a_{ij1} - \beta a_{ij2}$ ,  $a_{ijn} = \partial F_n / \partial N_{ij}$ .

Условия  $B > 0$ ,  $B = 0$ ,  $B < 0$  определяют соответственно гиперболический, параболический и эллиптический типы уравнений в усилиях (2.3)–(2.5).

Для изотропного материала  $F_n(\sigma_1, \sigma_2)$  являются функциями главных напряжений  $\sigma_i$  ( $i=1, 2$ ), при этом сингулярный режим представляется точкой на плоскости (фиг. 1)  $\sigma_1 = \sigma_1^*$ ,  $\sigma_2 = \sigma_2^*$ . Относительно усилий получаем  $N_1 - \beta N_2 = 0$  ( $\beta = \sigma_1^*/\sigma_2^*$ ). Введем функции  $p = 1/2(N_1 + N_2)$ ,  $t = 1/2(N_1 - N_2)$  и по обычным формулам выразим усилия  $N_{ij}$  через главные  $N_i$ :

$$\begin{cases} N_{11} \\ N_{22} \end{cases} = p \pm t \cos 2\varphi, \quad N_{12} = t \sin 2\varphi$$

$$p = \kappa t, \quad \kappa = (\sigma_1^* + \sigma_2^*)(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^{-1}$$

где  $\varphi$  — угол между направлением  $N_1$  и осью  $x_1$ .

Тип уравнений (2.3)–(2.5) относительно функций  $t, \varphi$  определяется в зависимости от знака  $B = \kappa^2 - 1$ . Если точка лежит в первом и третьем квадранте (фиг. 1), то тип уравнений гиперболический, уравнения характеристик и соотношения на них имеют вид

$$dx_2/dx_1 = \lambda_m = \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0), \quad \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) \quad (m=1, 2)$$

$$d\eta_m = \sqrt{\kappa^2 - 1} d \ln t \pm d\varphi = 0$$

Выбирая  $\eta_m$  за новые независимые переменные, получаем линейную систему уравнений в каноническом виде

$$\partial x_2 / \partial \eta_2 = \lambda_1 \partial x_1 / \partial \eta_2, \quad \partial x_2 / \partial \eta_1 = \lambda_2 \partial x_1 / \partial \eta_1$$

Преобразование возможно, если якобиан

$$J = \det \left\| \frac{\partial \eta_m}{\partial x_i} \right\| = \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} (\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Случай  $J=0$  образует простые интегралы пластичности, когда одно из семейств характеристик (или оба) являются прямыми линиями.

Если  $\eta_1 = \eta_{10} = \text{const}$ ,  $\eta_2 \neq \text{const}$ , решение выражается через две функции:

$$x_2 - \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0) x_1 = f_1(\varphi)$$

$$x_1 = \cos(\varphi - \varphi_0) \exp \varphi \operatorname{tg} 2\varphi_0 \left[ \int \frac{\exp(-\varphi \operatorname{tg}^2 \varphi_0) f_1' \cos(\varphi + \varphi_0)}{\sin 2\varphi_0} d\varphi \right]$$

Если сингулярный режим соответствует координатным линиям  $\sigma_1=0$  или  $\sigma_2=0$  (например, критерий Треска), то уравнения в усилиях (2.3) — (2.5) параболического типа, характеристика прямолинейна и совпадает с одной из линий главных напряжений, а решение выражается через две функции:

$$\begin{aligned} x_2 - \lambda_1 x_1 &= f_1(\varphi) \\ t &= f_2(\varphi) / [2x_1 + (1 - \kappa \cos 2\varphi) f_1'(\varphi)] \\ dx_2/dx_1 &= \lambda_1 = \operatorname{tg} \varphi \quad (\sigma_2=0), \quad \lambda_1 = -\operatorname{ctg} \varphi \quad (\sigma_1=0) \end{aligned}$$

Уравнения являются эллиптическими, если сингулярный режим лежит во втором и четвертом квадранте плоскости (фиг. 1). Отметим, что в случае  $\sigma_1 = -\sigma_2$  (например, критерий максимального приведенного напряжения) для функции усилий  $\Phi$  получаем уравнение Лапласа и усилия определяются по формулам  $N_{11} = \Phi_{,22}$ ,  $N_{22} = \Phi_{,11}$ ,  $N_{12} = -\Phi_{,12}$ ,  $\Phi = \operatorname{Re} f(z)$ ,  $z = x_1 + ix_2$ , где  $f$  — аналитическая функция.

Рассмотрим бесконечную пластинку с круговым отверстием и заданными на бесконечности усилиями  $N_{11}$ ,  $N_{22} = \pm kh_\infty$  (для критерия максимального приведенного напряжения). Пластинка будет находиться в напряженном состоянии, соответствующем сингулярному режиму, если на контуре заданы усилия, соответствующие решению уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} N_{rr} = -N_{\theta\theta} &= kh_\infty \left\{ \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{-n-2} \left\{ \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} \right\} \\ N_{r\theta} &= kh_\infty \left\{ \frac{\cos 2\theta}{-\sin 2\theta} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n (1-n)}{n} r^{-n-2} \left\{ \frac{\cos n\theta}{-\sin n\theta} \right\} \end{aligned}$$

т. е. сингулярному режиму отвечает широкое поле напряжений и распределение толщины  $h = [N_{11}^2 + N_{12}^2]^{1/2} / k$ . Относительно скоростей  $v_i$  отметим, что характеристики уравнений (2.2), (2.4) для изотропного материала совпадают с линиями максимальных касательных напряжений  $dx_2/dx_1 = \pm \lambda_m = \operatorname{tg}(\varphi + \pi/4)$ ,  $\operatorname{tg}(\varphi - \pi/4)$ .

Таким образом, после определения напряжений и толщины автоматически выстраивается поле характеристик кинематической задачи.

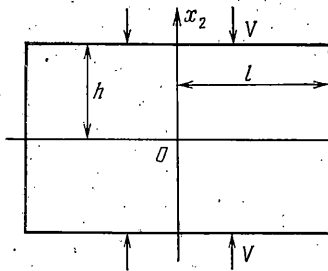
3. Допустим, что решение некоторой задачи регулярным образом зависит от малого параметра  $\delta$ . Согласно методу возмущений, решение ищем в виде ряда по степеням параметра  $\delta$ :

$$v_i = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n v_i^{(n)}, \quad \sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)} \quad (3.1)$$

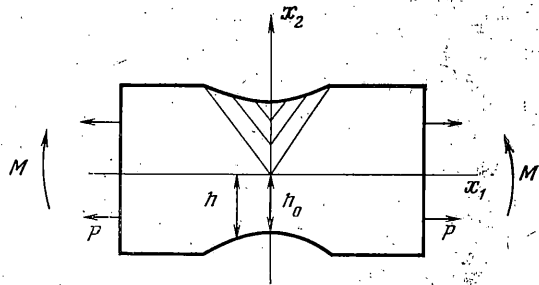
Подставляя (3.1) в уравнения (1.1), (1.2) и приравнивая выражения при одинаковых степенях параметра  $\delta$ , получаем последовательность линейных систем уравнений, тип которых совпадает с типом соответствующих систем нулевого приближения. Если  $\Delta^{(0)} = a_{12n}^{(0)} - 4a_{11n}^{(0)} a_{22n}^{(0)} > 0$ , то уравнения гиперболического типа, а из условия текучести следует  $a_{ijn}^{(0)} \sigma_{ij}^{(n)} = f_n^{(n)}$ , где  $f_n^{(n)}$  зависит от предыдущих приближений. Характеристики совпадают с характеристиками нулевого приближения, а соотношения на них имеют вид

$$\begin{aligned} dx_2/dx_1 = \lambda_m^{(0)} &= 1/2 (-a_{12n}^{(0)} \pm \sqrt{\Delta^{(0)}}) / a_{22n}^{(0)} \\ a_{11n}^{(0)} d\sigma_{11}^{(n)} - a_{22n}^{(0)} \lambda_m^{(0)} d\sigma_{12}^{(n)} - \lambda_m^{(0)} [\sigma_{11}^{(n)} (a_{11n}^{(0)} / a_{22n}^{(0)})_{,2} + \\ + \sigma_{12}^{(n)} (a_{12n}^{(0)} / a_{22n}^{(0)})_{,2} + (f_n^{(n)} / a_{22n}^{(0)})_{,2}] dx_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Свойство сохранения характеристик может быть использовано при построении численного алгоритма, так как не нужно для каждого по-



Фиг. 2



Фиг. 3

следующего приближения перестраивать поле характеристик. Этот метод эффективен при использовании кусочно-линейной поверхности текучести  $F_n = a_{ijn} \sigma_{ij}$ . В этом случае  $a_{ijn}^{(n)} = \text{const}$ ,  $f_n^{(n)} = 0$  и характеристиками являются прямые линии, а соотношения на них для любого приближения совпадают с соответствующими соотношениями нулевого приближения; при этом задача становится одновременно и статически, и кинематически определяемой.

Проблеме кусочно-линейной аппроксимации исходной поверхности текучести посвящены работы [3, 6, 7]. При этом основное внимание авторы обращали на геометрическую близость исходной поверхности и кусочно-линейной аппроксимации. Сущность предлагаемого в публикуемой работе подхода состоит в том, чтобы использовать кусочно-линейные аппроксимации для получения статически допустимого поля напряжений (вписанная в исходную поверхность кусочно-линейная аппроксимация) и кинематически возможного поля скоростей. При этом параметры  $a_{ijn}$  выбираются не из соображений геометрической близости поверхностей, а являются варьируемыми, соответственно, максимизирующими по напряжениям и минимизирующими по скоростям уровень мощности внешних сил для исходной поверхности текучести.

Используя уравнение неразрывности скоростей деформации, а также функцию напряжений  $\sigma_{11} = \Phi_{,22}$ ,  $\sigma_{12} = -\Phi_{,12}$ ,  $\sigma_{22} = \Phi_{,11}$ , решение кинематической задачи можно свести к интегрированию линейного уравнения второго порядка относительно одной из компонент тензора скоростей деформации (например,  $\epsilon_{11}$ ), а статической — к интегрированию соответствующего уравнения относительно функции напряжений  $\Phi$ :

$$a_{11n} \epsilon_{11,22} + a_{22n} \epsilon_{11,11} - a_{12n} \epsilon_{11,12} = 0 \quad (3.3)$$

$$a_{11n} \Phi_{,22} + a_{22n} \Phi_{,11} - a_{12n} \Phi_{,12} = k_n$$

В случае  $\Delta \geq 0$  решение уравнений (3.3) выражается через две функции:

$$\epsilon_{11} = \psi_1(x_2 - \lambda_1 x_1) + \psi_2(x_2 - \lambda_2 x_1)$$

$$\Phi = \Phi_1(x_2 - \lambda_1 x_1) + \Phi_2(x_2 - \lambda_2 x_1) + f \quad (\Delta > 0)$$

$$\epsilon_{11} = \psi_1(x_2 - \lambda_1 x_1) + (\lambda_1 x_2 + x_1) \psi_2(x_2 - \lambda_1 x_1)$$

$$\Phi = \Phi_1(x_2 - \lambda_1 x_1) + (\lambda_1 x_2 + x_1) \Phi_2(x_2 - \lambda_1 x_1) + f \quad (\Delta = 0)$$

$$\lambda_m = 1/2(-a_{12n} \pm \sqrt{\Delta})/a_{22n}, \quad f = k_n x_2^2 / 2a_{11n} \quad (a_{11n} \neq 0)$$

$$f = -k_n x_1 x_2 / a_{12n} \quad (a_{12n} \neq 0), \quad f = k_n x_1^2 / 2a_{22n} \quad (a_{22n} \neq 0)$$

где  $\Phi_i$ ,  $\psi_i$  определяются из граничных условий. В качестве простейшего примера рассмотрим линейную аппроксимацию  $F = \sigma_{11} - \sigma_{22} + \beta \sigma_{12}$  условия текучести Мизеса для задачи об осадке полосы (фиг. 2). Учитывая симметрию задачи, строим решение для первой четверти полосы с граничными условиями ( $\mu$  — коэффициент трения):

$$\sigma_{12} = -\mu \tau_s, \quad v_2 = -V \text{ при } x_2 = h$$

$$\sigma_{12}=0, \quad v_2=0 \quad \text{при } x_2=0 \quad (3.4)$$

$$\int_0^h v_1 dx_2 = 0 \quad \text{при } x_1=0$$

Поле скоростей, удовлетворяющее (3.4) и ассоциированному закону, будет кинематически возможным для исходной поверхности текучести Мизеса, а параметр  $\beta$  определяется из условия минимума мощности внешних сил

$$v_1 = Vx_1/h + V/2\beta(2x_2-h)/h, \quad v_2 = -Vx_2/h$$

$$\beta = 2\mu/\sqrt{4-\mu^2}$$

$$2P = 2 \int_0^l \sigma_{22} dx_1 = -\tau_s l [l/h + 2(4-\mu)/\sqrt{4-\mu^2}]$$

Как видно, параметр «наилучшей» кусочно-линейной аппроксимации зависит от величины коэффициента трения.

Отметим, что предлагаемый подход не предполагает использование обязательно кусочно-линейной аппроксимации исходной поверхности текучести. Выполненный общий анализ позволяет при наличии «неудобных» с точки зрения типа и соответствующего метода решения систем уравнений по отношению к исходной поверхности текучести построить параметрическое семейство аппроксимационных поверхностей текучести, гладкие части которых обеспечивают реализацию «удобного» (например, гиперболического) типа уравнений. Дальнейшее решение задачи можно осуществлять, используя стандартные методы решения задач данного типа с одновременным определением свободных параметров аппроксимационных поверхностей по указанному принципу поиска наилучшей аппроксимации. При этом следует иметь в виду, что в случае произвольной поверхности текучести [8, 9]  $f_n^{(n)} \neq 0$  ( $n > 1$ ).

Это обстоятельство затрудняет использование соотношений на характеристиках из-за необходимости хранить в машинной памяти все предыдущие приближения. Поэтому возможна следующая процедура. Если нулевое приближение известно и, следовательно, построено поле характеристик, то, используя соотношения на них, определяются  $\sigma_{ij}^{(1)}$ , затем с учетом первого приближения находим поле напряжений. Это поле принимается за исходное нулевое приближение, характеристики подправляются и процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

В качестве простейшего примера рассмотрим растяжение или изгиб моментами полосы, ослабленной симметричными вырезами (фиг. 3)  $h = h_0 + \delta h_1(x_1)$ ,  $h_1(0) = 0$ , при гладкой поверхности текучести. В силу симметрии при растяжении и антисимметрии при изгибе рассматривается область  $x_2 \geq 0$ . Тогда в нулевом приближении будет  $\sigma_{11}^{(0)} = p = \text{const}$ ,  $\sigma_{12}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} = 0$ ,  $F(p, 0, 0) = k$ ,  $a_{jin}^{(0)} = \text{const}$ .

Предполагается, что  $\Delta^{(0)} > 0$  и  $a_{11}^{(0)} \neq 0$  (иначе полоса была бы бесконечно жесткой при растяжении). Тогда  $\sigma_{11}^{(1)} = -(a_{12n}^{(0)}\sigma_{12}^{(1)} + a_{22n}^{(0)}\sigma_{22}^{(1)})/a_{11n}^{(0)}$  и характеристиками являются прямые  $x_2 - \lambda_m^{(0)} x_1 = \text{const}$ , на которых выполняются соотношения (3.2).

Учитывая, что на невозмущенном контуре  $x_2 = h_0$  выполняются линеаризованные граничные условия  $\sigma_{22}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{12}^{(1)} = p \partial h_1 / \partial x_1$ , определяем компоненты тензора напряжений в любой точке полосы

$$\sigma_{12}^{(1)} = \frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} \sigma_{12}^{(1)} \left( x_1 - \frac{x_2 - h_0}{\lambda_1^{(0)}}, h_0 \right) - \frac{\lambda_2^{(0)}}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} \sigma_{12}^{(1)} \left( x_1 - \frac{x_2 - h_0}{\lambda_2^{(0)}}, h_0 \right)$$

$$\sigma_{22}^{(1)} = \frac{\lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)}}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} \sigma_{12}^{(1)} \left( x_1 - \frac{x_2 - h_0}{\lambda_1^{(0)}}, h_0 \right) - \frac{\lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)}}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} \sigma_{12}^{(1)} \left( x_1 - \frac{x_2 - h_0}{\lambda_2^{(0)}}, h_0 \right)$$

после чего в сечении  $x_1=0$  с учетом первого приближения можно уточнить растягивающую силу и изгибающий момент

$$P = 2 \int_0^{h_0} (p + \delta \sigma_{11}^{(1)}) dx_2, \quad M = 2 \int_0^{h_0} (p + \delta \sigma_{11}^{(1)}) x_2 dx_2$$

Коэффициент усиления  $K_1 = P / (2ph_0)$ ,  $K_2 = M / (ph_0^2)$ . При условии текучести Хилла [10] для ортотропного материала (оси ортотропии совпадают с осями координат):

$$F = [H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + E\sigma_{22}^2 + G\sigma_{11}^2 + 2N\sigma_{12}^2]^{1/2} - 1$$

$$p = 1 / \sqrt{H+G}, \quad \lambda_m^{(0)} = \pm \sqrt{H/(H+G)}. \quad (3.5)$$

С учетом первого приближения на оси симметрии  $x_1=0$  определяется  $\sigma_{11}$  и коэффициент усиления

$$\sigma_{11} = p \left[ 1 + \delta \lambda_1^{(0)2} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \left( \frac{x_1 - h_0}{\lambda^{(0)}} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$K_1 = [1 + \delta \lambda_1^{(0)3} / h_1 (h_0 / \lambda_1^{(0)})]$$

Для изотропного материала (3.6) совпадает с условием Мизеса. В этом случае для углового выреза  $h = h_0 + \text{tg } \delta \cdot x_1$  получаем  $K_1 = 1 + \delta$  для плоской деформации (что совпадает с точным решением [11],  $K^* = 1 + \sqrt{2}\delta$  для обобщенного плосконапряженного состояния).

Для параболического выреза  $h = h_0 + \delta x_1^2$ ,  $K_1 = 1 + \delta h_0$ , что совпадает с результатом [2]  $K_1^* = 1 + 2\delta h_0$ . Рассмотрим также растяжение полосы из спеченного порошкового материала [12]:

$$F = [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 - \sin \psi (\sigma_{11} + \sigma_{22} + 2k \text{ctg } \psi)]^{1/2}$$

где  $\psi$  — угол внутреннего трения,  $k$  — когезия материала. Условие гиперболичности будет  $|\psi| \neq \pi/2$ ,  $\lambda_m^{(0)} = \pm \cos \psi / (1 + \sin \psi)$ ,  $p = 2k \sin \psi / (1 - \sin \psi)$ . Коэффициент усиления совпадает с (3.6).

Таким образом, для общего кусочно-гладкого условия текучести исследован тип систем уравнений, получаемых в плоских задачах теории жестко идеально пластического тела, что позволяет выбрать надлежащий метод решения задач для физически и конструктивно-анизотропных, а также порошковых материалов. Показано, что в случае гиперболичности систем уравнений метод малого параметра в сочетании с методом характеристик может служить основой эффективного алгоритма решения плоских задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца. — Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит., 1955, № 4, с. 93–97.
3. Сегал В. М. Технологические задачи теории пластичности. Минск: Наука и техника, 1977. 254 с.
4. Spenser A. J. M. Perturbation methods in plasticity. I, II. — Mech. and Phys. of Solids, 1961, v. 9, No. 4, p. 279–288; 1962, v. 10; No. 1, p. 17–26.
5. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
6. Shoemaker E. M., Shin W. P. A complimentary linear theory of plasticity for plane strain. — Arch. Mech. Stosow., 1966, v. 18, No. 6, p. 731–747.
7. Унксов Е. П. Линеаризация плоской задачи теории пластичности. — Кузнечно-штамп. произ-во, 1967, № 1, с. 4–6.
8. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191 с.
9. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев: Наук. думка, 1981. 493 с.
10. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
11. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Вышш. шк., 1969. 608 с.
12. Соколовский В. В. Статика сыгучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 243 с.

Красноярск, Новосибирск

Поступила в редакцию  
12.VIII.1983