МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3.01

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ГРАНИЧНОГО ВЛИЯНИЯ ДЛЯ НЕСВЯЗАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

ГОРШКОВ А. Г., КОЛЕСНИКОВ И. Ю.

В [1] А. А. Ильюшиным сформулирован общий методологический принцип расчета составных тел, получивший название метода блоков. Одной из центральных проблем метода блоков является построение операторов граничного влияния, устанавливающих связь искомого решения в произвольной точке выделенного блока с его значениями на границе. Имеющиеся эффективные реализации метода блоков [2, 3] связаны в основном с построением матриц влияния – числового представления операторов граничного влияния на выбранном конечном граничном базисе.

Настоящая статья посвящена явному аналитическому построению общего решения в форме функций граничного точечного влияния для несвязанной динамической нестационарной задачи линейной теории термоупругости в прямоугольном параллелепипеде. Существенным здесь является учет угловых точек и ребер параллелепипеда, производимый явным аналитическим образом, а также обеспечение необходимого произвола для удовлетворения произвольным граничным условиям.

Методы решения задач, связанных с упругим параллелепипедом, отражены в [4–6].

1. Несвязанная динамическая нестационарная задача линейной теории термоупругости для изотропного однородного прямоугольного параллелепипеда Ω, ограниченного поверхностью Γ, заключается в интегрировании уравнений движения и теплопроводности [7]:

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i(P,t)=\rho F_i(P,t)+L_{ij}^\circ u_j(P,t)\qquad (i=1,2,3;\ P\in\Omega)\tag{1.1}$$

$$\rho C_p\frac{\partial}{\partial t}T(P,t)=\lambda^T\Delta T(P,t)+\rho q(P,t)\qquad (P\in\Omega)\tag{1.2}$$

при соответствующих начальных и граничных условиях

$$u_i(P,t=0)=u_i^{(0)}(P),\qquad \frac{\partial}{\partial t}u_i(P,t=0)=u_i^{(1)}(P)\qquad (i=1,2,3;\ P\in\Omega)$$

$$T(P,t=0)=T^{(0)}(P)\qquad (P\in\Omega)\tag{1.3}$$

$$L_{ij}(Q)u_j(Q,\ t)=f_i(Q,\ t)\ \ (i=1,\ 2,\ 3;\ Q\in\Gamma)\tag{1.4}$$

$$L^{(T)}(Q)T(Q,t)=f^{(T)}(Q,t)\ \ (Q\in\Gamma)$$

Здесь L_{ij}° – оператор Ламе, Δ – оператор Лапласа, $L_{ij}(Q\in\Gamma)$, $L^{(T)}(Q\in\Gamma)$ – операторы граничных условий для уравнений (1.1) и (1.2), F_i, q, $u_i^{(k)}$, $T^{(0)}$, f_i, $f^{(T)}$ – заданные функции; остальные обозначения совпадают с [7].

Воспользовавшись теоремой Гельмгольца, разобьем поле перемещений u на два слагаемых

$$u=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\psi,\quad \operatorname{div}\psi=0\tag{1.5}$$

Подстановка (1.5) в (1.1) приводит (при соответствующем представлении массовых сил) к неоднородным волновым уравнениям [7] относительно скалярного потенциала φ и векторного потенциала ψ.

В результате исходная начально-краевая задача для уравнений (1.1) и (1.2) свелась к начально-краевой задаче для параболического уравнения (1.2) и волновых уравнений относительно φ и ψ. Перейдем к построению общих решений этих уравнений.

2. Рассмотрим в параллелепипеде $\Omega=\{(x,\ y,\ z):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$, ограниченном поверхностью Γ, следующее определяющее уравнение относительно некоторой функции φ:

$$(\Delta-a\partial^2/\partial t^2-b\partial/\partial t)\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=q(x,\ y,\ z,\ t) \tag{2.1}$$

$$\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$$

при начальных условиях

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t=0)=\varphi_1(x,\ y,\ z),\ \partial/\partial t\varphi(x,\ y,\ z,\ t=0)=\varphi_2(x,\ y,\ z) \tag{2.2}$$

Здесь q, φ_i — заданные функции; параметры a и b принимают одно из двух значений: 0 и 1 (соответственно для параболического и волнового уравнений).

Применяя к (2.1) преобразование Лапласа [8] по времени t, получим с учетом (2.2) уравнение в изображениях

$$\begin{gathered}(\Delta-a\delta^2-b\delta)\varphi^{\vee}(x,y,z;\delta)=q^{\vee}(x,y,z;\delta)-\\ -a\delta\varphi_1(x,\ y,\ z)-a\varphi_2(x,\ y,\ z)-b\varphi_1(x,\ y,\ z)\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\varphi^{\vee}$ и $q^{\vee}$ — изображения по Лапласу искомой функции φ и заданной q, δ — переменная преобразования Лапласа.

Чтобы избежать неоднородности в уравнении (2.3), положим

$$\varphi^{\vee}=w_*+w \tag{2.4}$$

Частное решение w_* найдем из краевой задачи

$$\begin{gathered}(\Delta-a\delta^2-b\delta)w_*=q^{\vee}(x,y,z;\delta)-\\ -a\delta\varphi_1(x,y,z)-a\varphi_2(x,y,z)-\\ -b\varphi_1(x,\ y,\ z),\quad w_*(\Gamma;\ \delta)=0\end{gathered} \tag{2.5}$$

Точное решение задачи (2.5) запишется так:

$$w_*=\sum_{m,n,k}\overset{*}{W}_{mnk}(\delta)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\sin(k\pi z)$$

$$\begin{gathered}\overset{*}{W}_{mnk}(\delta)=-[Q^{(0)}_{mnk}(\delta)-a\delta Q^{(1)}_{mnk}-aQ^{(2)}_{mnk}-bQ^{(1)}_{mnk}]\times\\ \times[(m\pi)^2+(n\pi)^2+(k\pi)^2+a\delta^2+b\delta]^{-1}\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$Q^{(0)}_{mnk}(\delta)=8\int_0^1\int_0^1\int_0^1 q^{\vee}(x,y,z;\ \delta)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\sin(k\pi z)\,dx\,dy\,dz$$

$$Q^{(i)}_{mnk}=8\int_0^1\int_0^1\int_0^1\varphi_i(x,y,z)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\sin(k\pi z)\,dx\,dy\,dz\qquad(i=1,2)$$

Оставшееся слагаемое в (2.4) удовлетворяет уже однородному уравнению

$$(\Delta-a\delta^2-b\delta)w(x,\ y,\ z)=0 \tag{2.7}$$

Представим множество точек границы параллелепипеда в виде суммы (объединения) следующих множеств: угловых точек S, точек ребер R и точек граней G:

$$\Gamma=S+R+G \tag{2.8}$$

Будем конструировать общее решение уравнения (2.7) последовательной суперпозицией частных решений в соответствии с представлением (2.8)

$$w=w_s+w_R+w_G \tag{2.9}$$

Представим функцию w_s, связанную с угловыми точками параллелепипеда, в виде комбинации (w_s° — трилинейная гармоническая функция)

$$w_s = w_s^\circ + w_s^* \tag{2.10}$$

$$\begin{gathered} w_s^\circ = w(A_0;\ \delta)(1-x)(1-y)(1-z) + \\ +w(B_0;\ \delta)\,y(1-x)(1-z) + w(C_0;\ \delta)\,xy(1-z) + \\ +w(D_0;\ \delta)\,x(1-y)(1-z) + w(A_1;\ \delta)(1-x)(1-y)z + \\ +w(B_1;\ \delta)\,y(1-x)z + w(C_1;\ \delta)\,xyz + \\ +w(D_1;\ \delta)\,x(1-y)z \end{gathered} \tag{2.11}$$

где $A_i(0,\ 0,\ i)$, $B_i(0,\ 1,\ i)$, $C_i(1,\ 1,\ i)$, $D_i(1,\ 0,\ i)$ $(i=0,\ 1)$ — угловые точки.

Для того чтобы w_s удовлетворяла уравнению (2.7) и совпадала с w в угловых точках, необходимо w_s^* определить из краевой задачи

$$(\Delta - a\delta^2 - b\delta)\,w_s^* = a\delta^2 w_s^\circ + b\delta w_s^\circ, \quad w_s^*(\Gamma;\ \delta) = 0 \tag{2.12}$$

Точное решение задачи (2.12) запишется в виде

$$w_s^* = \sum_{m,n,k} W_{mnk}(\delta)\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)\sin(k\pi z) \tag{2.13}$$

$$\begin{gathered} W_{mnk}(\delta) = w(A_0;\ \delta)\,v_{mnk}^{(0,1)}(\delta) + w(B_0;\ \delta)\,v_{mnk}^{(0,2)}(\delta) + w(C_0;\ \delta)\,v_{mnk}^{(0,3)}(\delta) + \\ + w(D_0;\ \delta)\,v_{mnk}^{(0,4)}(\delta) + w(A_1;\ \delta)\,v_{mnk}^{(1,1)}(\delta) + w(B_1;\ \delta)\,v_{mnk}^{(1,2)}(\delta) + \\ + w(C_1;\ \delta)\,v_{mnk}^{(1,3)} + w(D_1;\ \delta)\,v_{mnk}^{(1,4)}(\delta) \end{gathered}$$

$$v_{mnk}^{(0,1)} = -\frac{8(a\delta^2+b\delta)}{\pi^3 mnk[(m\pi)^2+(n\pi)^2+(k\pi)^2+a\delta^2+b\delta]}$$

$$v_{mnk}^{(0,2)} = (-1)^{n+1}v_{mnk}^{(0,1)}, \qquad v_{mnk}^{(0,3)} = (-1)^{m+1}(-1)^{n+1}v_{mnk}^{(0,1)}$$

$$v_{mnk}^{(0,4)} = (-1)^{m+1}v_{mnk}^{(0,1)}, \qquad v_{mnk}^{(1,1)} = (-1)^{k+1}v^{(0,1)}, \qquad v_{mnk}^{(1,2)} = (-1)^{n+1}(-1)^{k+1}v_{mnk}^{(0,1)}$$

$$v_{mnk}^{(1,3)} = (-1)^{m+1}(-1)^{n+1}(-1)^{k+1}v_{mnk}^{(0,1)}, \qquad v_{mnk}^{(1,4)} = (-1)^{m+1}(-1)^{k+1}v_{mnk}^{(0,1)}$$

Переходя к построению частного решения w_R, связанного с точками ребер, подчиним его условию

$$w_R(P \in S;\ \delta) = 0 \tag{2.14}$$

Найдем предварительно решение одной частной задачи. Проведем плоскости $z = z_k = k/M$ $(k = \overline{0,\ M})$. Система дифференциально-разностных уравнений для (2.7) запишется в виде [9]:

$$\begin{gathered} \nabla^2 w_k(x,\ y;\ \delta) + [w_{k+1}(x,\ y;\ \delta) - \\ -2w_k(x,\ y;\ \delta) + w_{k+1}(x,\ y;\ \delta)]/h^2 - \\ -(a\delta^2+b\delta)\,w_k(x,\ y;\ \delta) = 0 \ (h=1/M) \\ \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad w_k(x,\ y;\ \delta) = w_R^*(x,\ y,\ z_k;\ \delta) \end{gathered} \tag{2.15}$$

где звездочка обозначает частный характер решения.

Не нарушая условия (2.14), примем

$$w_0(x,\ y;\ \delta) = w_M(x,\ y;\ \delta) = 0 \tag{2.16}$$

Будем искать решение (2.15), (2.16) в виде конечного (дискретного) ряда [9]:

$$w_R^*(x, y, z_k; \delta) = \sum u_m(x, y; \delta)\sin(\pi m z_k) \qquad (m=1, 2, \ldots, M-1) \tag{2.17}$$

Подстановка (2.17) в (2.15) даст независимые уравнения

$$(\nabla^2 - \alpha_m^2)\,u_m(x,\ y;\ \delta) = 0, \quad \alpha_m^2 = \gamma_m^2 + a\delta^2 + b\delta \tag{2.18}$$

$$\gamma_m=2M\sin({}^1/_2\pi m/M)$$

Подставим решение уравнений (2.18) в виде комбинации функций

$$u_m(x,\ y;\ \delta)=u_m{}^\circ(x,\ y;\ \delta)+u_m{}^*(x,\ y;\ \delta) \tag{2.19}$$

$$u_m{}^\circ(x,\ y;\ \delta)=u_m(A;\ \delta)(1-x)(1-y)+u_m(B;\ \delta)y(1-x)+$$
$$+u_m(C;\ \delta)xy+u_m(D;\ \delta)x(1-y) \tag{2.20}$$

Здесь $u_m{}^\circ$ — билинейная функция, аналогичная [10]; точки $A,\ B,\ C,D$ совпадают с точками $A_0,\ B_0,\ C_0,\ D_0$ единичного квадрата Γ_0 в плоскости $z=0$.

Для того чтобы u_m удовлетворяла уравнению (2.18), функцию $u_m{}^*$ следует определить из краевой задачи

$$(\nabla^2-\alpha_m{}^2)u_m{}^*(x,\ y;\ \delta)=\alpha_m{}^2u_m{}^\circ(x,\ y;\ \delta),\quad u_m{}^*(\Gamma_0;\ \delta)=0 \tag{2.21}$$

Задача (2.21) допускает точное решение в двойных рядах Фурье. В результате точное решение уравнений (2.18) запишется так:

$$u_m(x,\ y;\ \delta)=u_m(A;\ \delta)[(1-x)(1-y)+v_{1m}(x,\ y;\ \delta)]+$$
$$+u_m(B;\ \delta)[y(1-x)+v_{2m}(x,\ y;\ \delta)]+u_m(C;\ \delta)[xy+$$
$$+v_{3m}(x,\ y;\ \delta)]+u_m(D;\ \delta)[x(1-y)+v_{4m}(x,\ y;\ \delta)] \tag{2.22}$$

$$v_{im}(x,y;\delta)=\sum_{k,n}V_{kn}^{im}\sin(k\pi x)\sin(n\pi y)$$

$$V_{kn}^{1m}=-\frac{4(\gamma_m{}^2+a\delta^2+b\delta)}{\pi^2kn[(k\pi)^2+(n\pi)^2+\gamma_m{}^2+a\delta^2+b\delta]}$$

$$V_{kn}{}^{2m}=(-1)^{n+1}V_{kn}{}^{1m},\quad V_{kn}{}^{3m}=(-1)^{k+1}(-1)^{n+1}V_{kn}{}^{1m},\quad V_{kn}{}^{4m}=(-1)^{k+1}V_{kn}{}^{1m}$$

Подстановка (2.22) в (2.17) даст точное решение уравнений (2.15). Заменяя в (2.17) дискретную координату z_k на континуальную z, т. е. производя интерполяцию, получим приближенное решение уравнения (2.7), связанное с точками ребер, параллельных оси z. Используя принцип суперпозиции и проводя плоскости, параллельные другим граням параллелепипеда, совершенно аналогично найдем решения, связанные с оставшимися ребрами. Складывая их, получим (после несложных алгебраических преобразований) w_R в форме функции влияния

$$w_R(x,\ y,\ z;\ \delta)=f_R[(x,\ y,\ z;\ \delta),\ w_R(P\in R;\ \delta)] \tag{2.23}$$

Переходя к построению частного решения w_G, связанному с точками граней, подчиним его условию

$$w_G(P\in R;\ \delta)=0 \tag{2.24}$$

Как и ранее, предварительно найдем решение одной частной задачи. Проведем плоскости $z=z_k=k/M$ $(k=\overline{0,\ M})$. Систему дифференциально-разностных уравнений для (2.7) запишем в следующей форме:

$$\nabla^2w_k(x,\ y;\ \delta)+[w_{k-1}(x,\ y;\ \delta)-$$
$$-2w_k(x,\ y;\ \delta)+w_{k+1}(x,\ y;\ \delta)]/h^2-$$
$$-(a\delta^2+b\delta)w_k(x,\ y;\ \delta)=$$
$$=q_{0k}w_G{}^*(x,\ y,\ 0;\ \delta)+q_{1k}w_G{}^*(x,\ y,\ 1;\ \delta)\quad(k=1,\ M-1) \tag{2.25}$$

$$w_k(x,\ y;\ \delta)=w_G{}^*(x,\ y,\ z_k;\ \delta)$$

$$q_{0k}=-1/h^2\ (k=1),\ q_{0k}=0\ (k\neq1)$$

$$q_{1k}=-1/h^2\ (k=M-1),\ q_{1k}=0\ (k\neq M-1)$$

Граничные условия для (2.25) зададим следующим образом:

$$w_0(x,\ y;\ \delta)=w_M(x,\ y;\ \delta)=0,\ w_k(P\in\Gamma_0;\ \delta)=0\ (k=\overline{1,\ M-1}) \tag{2.26}$$

Разложим q_{ik} в дискретный ряд Фурье [9]:

$$q_{ik}=\sum_{m=1}^{M-1}Q_m^{(i)}\sin\frac{\pi mk}{M},\qquad Q_m^{(0)}=-2M\sin\frac{\pi m}{M}$$
$$Q_m^{(1)}=Q_m^{(0)}\quad(m=1,3,\ldots),\qquad Q_m^{(1)}=-Q_m^{(0)}\quad(m=2,4,\ldots)\tag{2.27}$$

Решение задачи (2.25), (2.26) будем искать в виде

$$w_G^*(x,y,z_k;\delta)=\sum u_m(x,y;\delta)\sin(\pi m z_k)\quad(m=1,2,\ldots,M-1)\tag{2.28}$$

Подстановка (2.28), (2.27) в (2.25) даст независимые уравнения

$$(\nabla^2-\alpha_m^2)u_m(x,y;\delta)=Q_m^{(0)}\,w_G^*(x,y,0;\delta)+Q_m^{(1)}\,w_G^*(x,y,1;\delta)\tag{2.29}$$

Введем сетку: $x=x_i=i/(n+1)$, $y=y_j=j/(n+1)$ $(i,\ j=0,\ n+1)$. Система метода сеток для (2.29) запишется

$$\frac{u_{i-1,j}^{(m)}-2u_{i,j}^{(m)}+u_{i+1,j}^{(m)}}{h_1^2}+\frac{u_{i,j-1}^{(m)}-2u_{i,j}^{(m)}+u_{i,j+1}^{(m)}}{h_1^2}-$$
$$-\alpha_m^2u_{i,j}^{(m)}=Q_m^{(0)}w_{ij}^{(0)}+Q_m^{(1)}\,w_{ij}^{(1)}\tag{2.30}$$
$$h_1=1/(n+1),\qquad u_{i,j}^{(m)}=u_m(x_i,y_j;\delta)$$
$$w_{ij}^{(r)}=w_G^*(x_i,y_j,r;\delta)\qquad(r=0,1)$$

Разложим $w_{ij}^{(r)}$ в двойные дискретные ряды Фурье

$$w_{ij}^{(r)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}W_{kl}^{(r)}\sin\frac{k\pi i}{n+1}\sin\frac{l\pi j}{n+1}\qquad(r=0,1)\tag{2.31}$$

Обратное двойное дискретное преобразование Фурье дает

$$W_{kl}^{(r)}=\frac{4}{(n+1)^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}w_{st}^{(r)}\sin\frac{k\pi s}{n+1}\sin\frac{l\pi t}{n+1}\qquad(r=0,1)\tag{2.32}$$

Точное решение сеточных уравнений (2.30) при условиях (2.26) имеет вид

$$u_{ij}^{(m)}=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\beta_k^2+\beta_l^2+\gamma_m^2+a\delta^2+b\delta)^{-1}(Q_m^{(0)}\,W_{kl}^{(0)}+$$
$$+Q_m^{(1)}\,W_{kl}^{(1)}\sin\frac{k\pi i}{n+1}\sin\frac{l\pi j}{n+1},\qquad\beta_k=2(n+1)\sin\frac{\pi k}{2(n+1)}\tag{2.33}$$

Подстановка (2.32) в (2.33) дает

$$u_m(x_i,y_j)=-\frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\beta_k^2+\beta_l^2+\gamma_m^2+a\delta^2+b\delta)^{-1}\times$$
$$\times\sin(k\pi x_i)\sin(l\pi y_j)\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}[Q_m^{(0)}\,w_G^*(x_s,y_t,0;\delta)+\tag{2.34}$$
$$+Q_m^{(1)}\,w_G^*(x_s,y_t,1;\delta)\,\sin(k\pi x_s)\sin(l\pi y_t)$$

Проводя, как и ранее, интерполяцию для (2.28), (2.34) и используя суперпозиции, аналогично предыдущему получим w_G в форме функции граничного влияния

$$w_G(x, y, z; \delta)=f_G[(x, y, z; \delta), w_G(P\in G; \delta)] \tag{2.35}$$

Подставляя построенные частные решения в (2.9) и приводя подобные члены, отвечающие одним и тем же точкам границы, получим аналогично [10, 11] общее решение уравнения (2.7) в форме функции граничного точечного влияния

$$w(P\in\Omega; \delta)=\sum_i w(Q_i\in S; \delta) f_i^s(P\in\Omega; \delta)+$$
$$+\sum_j w(Q_j\in R; \delta) f_j^R(P\in\Omega; \delta)+\sum_k w(Q_k\in G; \delta) f_k^G(P\in\Omega; \delta) \tag{2.36}$$

или сокращенно

$$w(P\in\Omega; \delta)=F[(P\in\Omega; \delta), w(Q\in\Gamma; \delta)] \tag{2.37}$$

Если $P\in\Gamma$, то из (2.37) получаем граничное операторное уравнение (тождество)

$$w(P\in\Gamma; \delta)-F[(P\in\Gamma; \delta), \quad w(Q\in\Gamma; \delta)]=0 \tag{2.38}$$

имеющее структуру операторного уравнения второго рода [12].

3. При построении общего решения уравнения (2.7) использовались частные решения, которые находились приближенно с привлечением конечно-разностных дискретизаций. Целью данного раздела является получение точных представлений для уравнения (2.7) на основе предельного перехода, осуществляемого явным аналитическим образом.

Переходя к пределу при M, $n\to\infty$, получим

$$\lim_{M\to\infty}\gamma_m=\pi m, \qquad \lim_{M\to\infty}Q_m^{(0)}=-2\pi m, \qquad \lim_{n\to\infty}\beta_k=\pi k \tag{3.1}$$

При этом ряд (2.17), (2.22), связанный с точками ребер (параллельных оси z), и ряд (2.28), (2.33), связанный с точками граней ($z=0$ и $z=1$), будут удовлетворять уравнению (2.7) точно. Причем для ряда, связанного с гранями ($z=0$ и $z=1$), после суммирования получим выражение

$$\begin{aligned}
w_G^*(x, y, z; \delta) &= (1-z)\, w_G^*(x, y, 0; \delta)-\\
&-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(a\delta^2+b\delta)}{\pi k[(\pi i)^2+(\pi j)^2+(\pi k)^2+a\delta^2+b\delta]}\times\\
&\times W_{ij}^{(0)}\sin(i\pi x)\sin(j\pi y)\sin(k\pi z)-\\
&-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2[(\pi i)^2+(\pi j)^2]}{\pi k[(\pi i)^2+(\pi j)^2+(\pi k)^2+a\delta^2+b\delta]}\times\\
&\times W_{ij}^{(0)}\sin(i\pi x)\sin(j\pi y)\sin(k\pi z)+z w_G^*(x, y, 1; \delta)+\\
&+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(a\delta^2+b\delta)\cos\pi k}{\pi k[(\pi i)^2+(\pi j)^2+(\pi k)^2+a\delta^2+b\delta]}\times\\
&\times W_{ij}^{(1)}\sin(i\pi x)\sin(j\pi y)\sin(k\pi z)+\\
&+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2[(\pi i)^2+(\pi j)^2]\cos\pi k}{\pi k[(\pi i)^2+(\pi j)^2+(\pi k)^2+a\delta^2+b\delta]}\times\\
&\times W_{ii}^{(1)}\sin(i\pi x)\sin(j\pi y)\sin(k\pi z).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Подобные точные решения аналогичным образом выписываются и для других граней и ребер. Суперпозиция частных решений приводит, как и ранее, к общему решению вида (2.37) и граничному операторному уравнению (тождеству) (2.38), которые уже (M, $n\to\infty$) будут точными.

4. В результате обращения преобразования Лапласа получим общее решение нестационарного уравнения (2.1) в форме функции граничного влияния:

$$\varphi(P\in\Omega,t)=\Phi[(P\in\Omega;t),\quad \varphi(Q\in\Gamma,t),\quad a\int_0^t \sin[\varepsilon_a(t-t_1)]\times$$
$$\times\varphi(Q\in\Gamma,t_1)\,dt_1,\quad b\int_0^t \exp[-\varepsilon_b(t-t_1)]\varphi(Q\in\Gamma,t_1)\,dt_1] \tag{4.1}$$

где $\varepsilon_a=\varepsilon_a(Q\in\Gamma)$ и $\varepsilon_b=\varepsilon_b(Q\in\Gamma)$ — построенные функции точки Q, зависящие от ее положения на граничной поверхности Γ.

Специфической особенностью общего решения в форме (4.1) является то, что в нем в качестве произвольных констант фигурируют граничные значения искомой функции (и ее сверток), что для задачи Дирихле приводит к решению в явном виде (при M, $n\to\infty$ оно будет точным).

При $P\in\Gamma$ из (4.1) получим граничное операторное уравнение (тождество), связывающее значения искомого решения на границе.

Подстановка построенных решений (с использованием (1.5)) в граничные условия (1.4) приводит к системе линейных операторных уравнений, которые после дискретизации сверток по времени сводятся к системам линейных алгебраических уравнений (начальные условия учтены автоматически). В случае, если на поверхности параллелепипеда задается температура (оператор $L^{(T)}$ — тождественный), формула (4.1) дает решение нестационарной задачи теплопроводности ($a=0$, $b=1$) в явном виде.

Отметим, что при $a=b=0$ формула (2.37) дает общее решение гармонических уравнений, к которым сводится статическая задача теории упругости для параллелепипеда [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Загадки механики твердых деформируемых тел.— В кн.: Нерешенные проблемы механики и прикладной математики. М.: Изд-во МГУ, 1977, с. 68—73.
2. *Победря Б. Е., Шешенин С. В.* О матрице влияния.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1979, № 6, с. 76—81.
3. *Васин Р. А., Киликовская О. А., Рязанцева М. Ю., Тринчер В. К.* О связи тензор-функции Грина с матрицей жесткости Ильюшина.— В кн.: Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы 6-й Всесоюз. конф. Новосибирск: Изд-е Ин-та теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1980, ч. 2, с. 26—32.
4. *Суслова Н. Н.* Метод решения пространственной задачи теории упругости для тела в форме параллелепипеда.— В кн.: Итоги науки и техники: Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1980, т. 13, с. 187—296.
5. *Победря Б. Е., Шешенин С. В.* Некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 1, с. 74—86.
6. *Победря Б. Е., Шешенин С. В.* Численное решение задачи Ламе об упругом параллелепипеде.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, № 5, с. 61—71.
7. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981. 343 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
9. *Колесников И. Ю.* Метод конечных рядов Фурье и его применение к расчету трехслойных пластин со сложными граничными условиями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 1, с. 169—175.
10. *Колесников И. Ю.* Применение модульного подхода к расчету пластин.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 5, с. 136—141.
11. *Горшков А. Г., Колесников И. Ю.* Об одной методике приближенного решения задач колебаний пластин.— Прикл. механика, 1985, т. 21, № 2, с. 86—91.
12. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 488 с.

Москва

Поступила в редакцию 26.XII.1985