МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

ЛУЩИК О. Н.

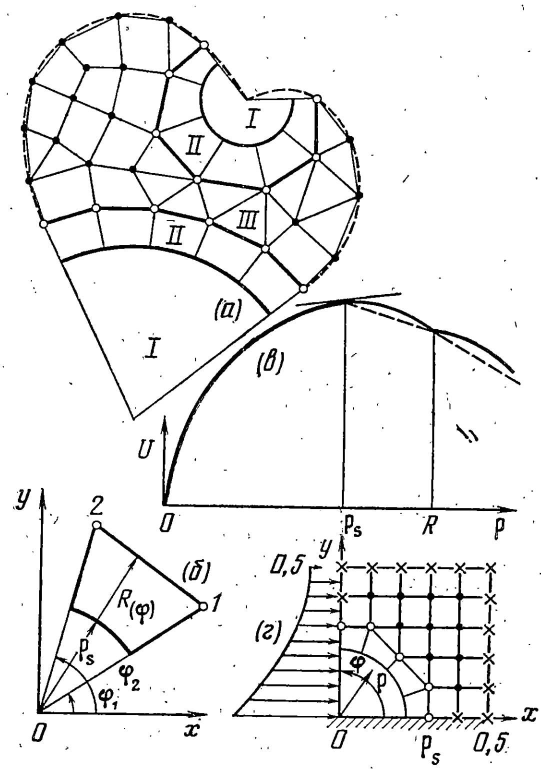
Предлагается модификация метода конечных элементов в перемещениях для областей с особыми точками, которая заключается в совместном использовании элементов трех типов: стандартных, сингулярных и буферных. Первый тип работает только с обычными функциями формы, второй – с асимптотическими, а последний обеспечивает, как минимум, непрерывную стыковку между ними. На конкретном примере исследуется сходимость этой модификации, определяется радиус действия асимптотики в чистом виде, анализируется поведение напряжений в окрестности особой точки в зависимости от величины сингулярного элемента и шага сетки.

1. При решении методом конечных элементов задач теории упругости для областей с особыми точками обычно используют сгущение сетки в окрестности таких точек. Если же вычисления проводятся на равномерной сетке, то или в элементе, содержащем особую точку, соответствующим образом подбирают порядок функций формы [1], или в достаточном количестве элементов, окружающих эту точку, аппроксимацию берут в виде суммы стандартной и сингулярной частей [2]. Исследуем, может ли асимптотика [3, 4] работать самостоятельно в окрестности особой точки и как далеко простирается эта окрестность в зависимости от числа членов асимптотики.

Разобьем всю область на три зоны: сингулярную, буферную и стандартную (первые две включают в себя столько подзон, сколько имеется особых точек). На фиг. 1, *а* эти зоны отделены друг от друга жирными сплошными линиями и пронумерованы соответственно I, II, III.

Стандартная зона III состоит из стандартных элементов с обычной аппроксимацией перемещений [2, 5]; узлы элементов на фиг. 1, *а* показаны темными и светлыми точками (последнее – в случае, когда узел находится на границе с буферной подзоной). Каждая сингулярная подзона образует один сингулярный элемент, имеющий вид сектора с центром в особой точке; перемещения в нем будем аппроксимировать усеченной асимптотикой с неизвестными коэффициентами. Каждая буферная подзона, содержащая несколько буферных элементов, располагается между сингулярной подзоной и стандартной зоной. Ее назначение – стыковка сингулярной и стандартной аппроксимаций таким образом, чтобы порядок последней в какой-то мере сказывался на порядке стыковки.

Буферные элементы (фиг. 1, *б*) имеют форму криволинейного четырехугольника, у которого обязательно две стороны радиальные ($\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$), а одна – трансверсальная ($\rho=\rho_s$) координатные линии местной полярной системы координат с центром в особой точке (ρ_s – радиус соответствующего сингулярного элемента). Четвертая сторона $\rho=R(\varphi)$ является границей (прямолинейной или криволинейной) соседнего стандартного элемента, и поэтому на ней располагаются, как минимум, два узла, которые будем называть буферными (на фиг. 1, *а* и *б* они показаны светлыми точками). Аппроксимация перемещений на этой стороне определяется известными функциями формы стандартного элемента [2, 5] (с неизвестными узловыми значениями); в то время как на противоположной стороне, граничащей с сингулярным элементом, она пред-



Фиг. 1

ставляет собой усеченную асимптотику при $\rho=\rho_s$ (с неизвестными коэффициентами).

Таким образом, аппроксимацию перемещений внутри буферного элемента (при каждом фиксированном полярном угле φ) можно взять по ρ того же порядка, что и в стандартном элементе: в линейном случае она определяется сингулярными и стандартными перемещениями на границах, в более высоком — требуется совпадение необходимого количества пограничных производных по ρ (на фиг. 1, *в* линейный вариант показан штриховыми линиями, квадратичный — сплошными; жирная сплошная линия соответствует перемещениям в сингулярном элементе). В результате неизвестными, от которых зависит аппроксимация перемещений внутри буферного элемента, являются как коэффициенты асимптотики, так и те из узловых значений соседнего стандартного элемента, что формируют его аппроксимацию на их общей границе.

Рассмотрим подробнее сингулярный элемент. На его внешних границах $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$ могут быть заданы перемещения или напряжения. Согласно [4], аппроксимацию перемещений в таком элементе следует представить в виде

$$\{U\}=[N]\{A\}+\{U^{\sim}\},\quad N_{ij}=\rho^{\lambda_j}F_{ij}\quad (i=1,\ 2;\ j=1,\dots,\ m)\tag{1.1}$$

$$F_{1j}=\frac{\lambda_j-3+4\nu}{\nu}\left[d_{1j}\cos(\lambda_j-1)\varphi+d_{2j}\sin(\lambda_j-1)\varphi\right]+$$
$$+d_{3j}\cos(\lambda_j+1)\varphi+d_{4j}\sin(\lambda_j+1)\varphi$$

$$F_{2j}=\frac{\lambda_j+3-4\nu}{\nu}\left[-d_{1j}\sin(\lambda_j-1)\varphi+d_{2j}\cos(\lambda_j-1)\varphi\right]-$$
$$-d_{3j}\sin(\lambda_j+1)\varphi+d_{4j}\cos(\lambda_j+1)\varphi$$

Здесь A_i — неизвестные коэффициенты асимптотики; их число m, как и радиус сингулярного элемента ρ_s, подбираются в процессе решения конкретной краевой задачи; $[N]$ — матрица функций формы сингулярного элемента; ν — коэффициент Пуассона; константы λ_j и d_{1j}, d_{2j}, d_{3j}, d_{4j} определяются из нулевых условий на внешних границах [4], причем нумерация λ_j идет в порядке возрастания положительной реальной части; $\{U^{\smile}\}$ — свободное слагаемое, которое представляет собой частное решение приближенных уравнений равновесия в окрестности особой точки [4] для ненулевых граничных условий на сторонах $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$.

Используя (1.1), можно вычислить диагональные и недиагональные члены матрицы жесткости сингулярного элемента $[k^{(s)}]$ размера $m\times m$ (G — модуль сдвига):

$$k_{ii}^{(s)}=2G\lambda_i\rho_s^{2\lambda_i}\left\{\left[\frac{(\lambda_i-1)^2+2(1-2\nu)}{\nu^2}(d_{1i}^2+d_{2i}^2)+d_{3i}^2+d_{4i}^2\right]\alpha+\right.$$

$$+\frac{\lambda_i-1}{\nu}\left[(d_{1i}d_{3i}+d_{2i}d_{4i})\sin 2\alpha+(d_{1i}d_{4i}-d_{2i}d_{3i})(1-\cos 2\alpha)\right]+$$

$$\left.+\frac{1-2\nu}{(\lambda_i-1)\nu^2}\left[(d_{1i}^2-d_{2i}^2)\sin 2(\lambda_i-1)\alpha+2d_{1i}d_{2i}(1-\cos 2(\lambda_i-1)\alpha)\right]\right\}$$

$$k_{ij}^{(s)}=4G\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\rho_s^{\lambda_i+\lambda_j}\left\{\left[\frac{(\lambda_i-1)(\lambda_j-1)+2(1-2\nu)}{\nu^2}(d_{1i}d_{1j}+d_{2i}d_{2j})+\right.\right.$$

$$\left.+(d_{3i}d_{3j}+d_{4i}d_{4j})\right]\frac{\sin(\lambda_i-\lambda_j)\alpha}{\lambda_i-\lambda_j}-$$

$$-\left[\frac{(\lambda_i-1)(\lambda_j-1)+2(1-2\nu)}{\nu^2}(d_{1i}d_{2j}-d_{2i}d_{1j})+d_{3i}d_{4j}-d_{4i}d_{3j}\right]\times$$

$$\times\frac{1-\cos(\lambda_i-\lambda_j)\alpha}{\lambda_i-\lambda_j}+\frac{\lambda_i-1}{(\lambda_i-\lambda_j-2)\nu}\left[(d_{1i}d_{3j}+d_{2i}d_{4j})\sin(\lambda_i-\lambda_j-2)\alpha-\right.$$

$$\left.-(d_{1i}d_{4j}-d_{2i}d_{3j})(1-\cos(\lambda_i-\lambda_j-2)\alpha)\right]+$$

$$+\frac{\lambda_j-1}{(\lambda_i-\lambda_j+2)\nu}\left[(d_{3i}d_{1j}+d_{4i}d_{2j})\sin(\lambda_i-\lambda_j+2)\alpha-\right.$$

$$\left.-(d_{3i}d_{2j}-d_{4i}d_{1j})(1-\cos(\lambda_i-\lambda_j+2)\alpha)\right]+$$

$$+\frac{2(1-2\nu)}{(\lambda_i+\lambda_j-2)\nu^2}\left[(d_{1i}d_{1j}-d_{2i}d_{2j})\sin(\lambda_i+\lambda_j-2)\alpha+\right.$$

$$\left.\left.+(d_{1i}d_{2j}+d_{2i}d_{1j})(1-\cos(\lambda_i+\lambda_j-2)\alpha)\right]\right\}\qquad (i\neq j)$$

Рассмотрим буферный элемент описанной формы (фиг. 1, *б*). Считая аппроксимацию перемещений в нем линейной по ρ, получим следующее соотношение:

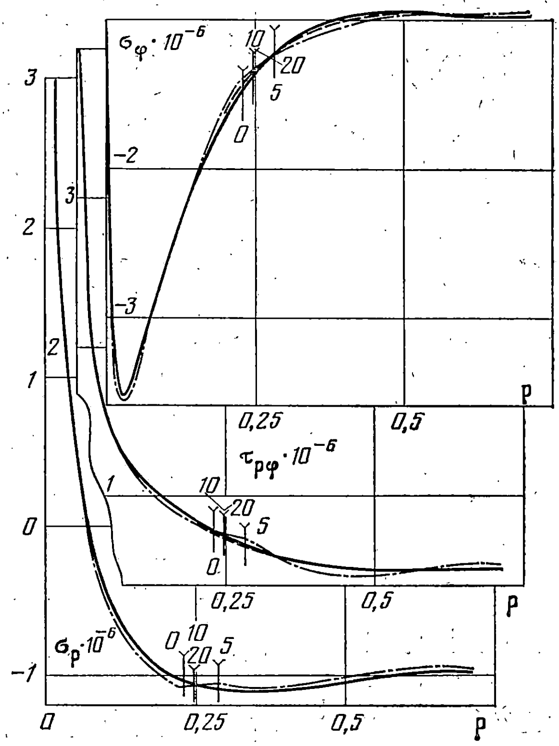
$$\{U\}=[N]\{X\}+\{U^{\smile}\}=(\rho_s M-\rho L)(\{U_s^0\}+\{U_s^{\smile}\})+(\rho-\rho_s)L\{U_c\}\qquad(1.2)$$

$$L=1/(R-\rho_s),\qquad M=R/(\rho_s(R-\rho_s))$$

Сумма векторов $\{U_s^0\}$ и $\{U_s^{\smile}\}$ представляет собой сингулярные перемещения (1.1), вычисленные при $\rho=\rho_s$, причем $\{U_s^0\}$ содержит m неизвестных коэффициентов A_i, а $\{U_s^{\smile}\}$ — свободное слагаемое. Вектор $\{U_c\}$ — это перемещения в стандартном элементе [5] на стороне, граничащей с буферным элементом; в случае линейной аппроксимации в $\{U_c\}$ входят четыре неизвестных узловых перемещения. Таким образом, выражение (1.2) состоит из двух частей, одна из которых, $\{U^{\smile}\}$, — свободная, а другая, содержащая матрицу функций формы буферного элемента $[N]$ (ее компоненты расписываются на основе (1.1) и (1.2)), зависит от $m+4$ неизвестных $\{X\}$.

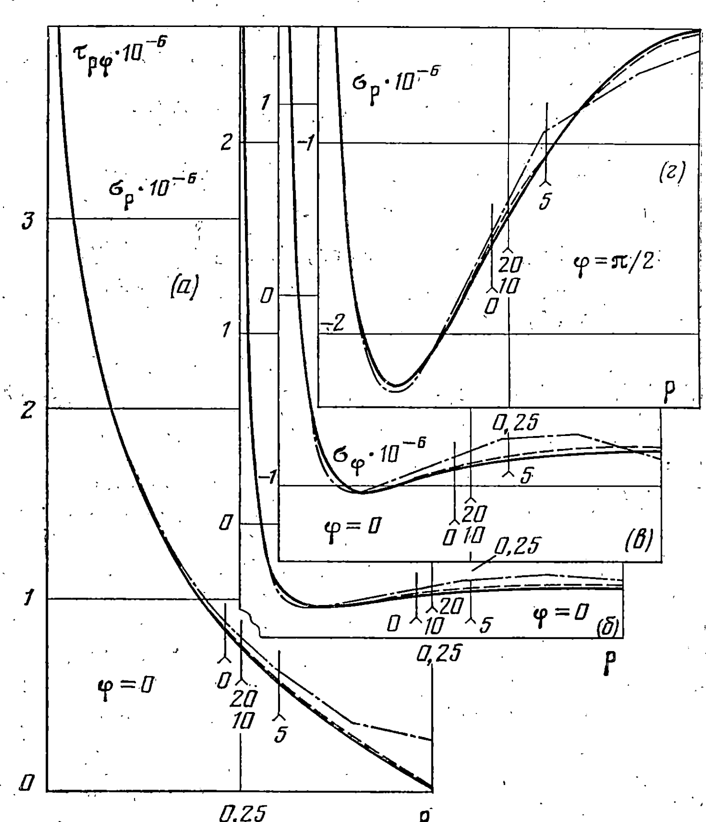
В полярной системе координат после интегрирования по ρ от ρ_s до R матрица жесткости буферного элемента с линейной аппроксимацией перемещений принимает вид

$$[k^{(b)}]=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}([B_1]^T[D](\rho_s^2(\ln R-\ln\rho_s)[B_1]+\rho_s(R-\rho_s)[B_2])+$$



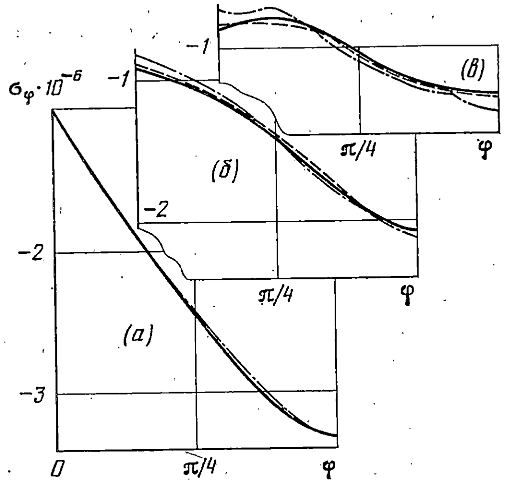
$\sigma_\varphi \cdot 10^{-6}$
$\tau_{\rho\varphi} \cdot 10^{-6}$
$\sigma_\rho \cdot 10^{-6}$
0,25
0,5
ρ

Фиг. 2



$\tau_{\rho\varphi} \cdot 10^{-6}$
$\sigma_\rho \cdot 10^{-6}$
$\sigma_\varphi \cdot 10^{-6}$
(а)
(б)
(в)
(г)
$\varphi = 0$
$\varphi = \pi/2$
0,25
ρ

Фиг. 3



Фиг. 4

$$+[B_2]^T[D](\rho_s(R-\rho_s)[B_1]+0{,}5(R^2-\rho_s^2)[B_2]))d\varphi$$

где матрица $[D]$ определяется законом Гука [5], а матрицы $[B_1]$ и $[B_2]$ имеют размер $3\times(m+4)$, причем первая строка первой из них — нулевая. Если неизвестные перемещения буферных узлов 1 и 2 (фиг. 1, *б*) искать в декартовой системе координат ($X_{m+1}=U_{1x}$, $X_{m+2}=U_{1y}$, $X_{m+3}=U_{2x}$, $X_{m+4}=U_{2y}$), то вторая и третья строки для $[B_1]$ записываются так:

$$\rho_s^{\lambda_1}(MV_1-KF_{21}),\ldots,\rho_s^{\lambda_m}(MV_m-KF_{2m})$$

$$H_1\sin\varphi,\quad -H_1\cos\varphi,\quad H_2\sin\varphi,\quad -H_2\cos\varphi$$

$$\rho_s^{\lambda_1}(MW_1-KF_{11}),\ldots,\rho_s^{\lambda_m}(MW_m-KF_{1m})$$

$$-H_1\cos\varphi,\quad -H_1\sin\varphi,\quad -H_2\cos\varphi,\quad -H_2\sin\varphi$$

Для $[B_2]$ первая, вторая и третья строки имеют вид

$$-\rho_s^{\lambda_1}LF_{11},\ldots,\quad -\rho_s^{\lambda_m}LF_{1m},\quad LP_1\cos\varphi,\quad LP_1\sin\varphi,\quad LP_2\cos\varphi,\quad LP_2\sin\varphi$$

$$\rho_s^{\lambda_1}(-LV_1+KF_{21}),\ldots,\rho_s^{\lambda_m}(-LV_m+KF_{2m})$$

$$-H_1\sin\varphi,\ H_1\cos\varphi,\ -H_2\sin\varphi,\ H_2\cos\varphi$$

$$\rho_s^{\lambda_1}(-LF_{11}'+KF_{11}),\ldots,\rho_s^{\lambda_m}(-LF_{1m}'+KF_{1m})$$

$$H_1\cos\varphi-LP_1\sin\varphi,\quad H_1\sin\varphi+LP_1\cos\varphi$$

$$H_2\cos\varphi-LP_2\sin\varphi,\quad H_2\sin\varphi+LP_2\cos\varphi$$

где P_1 и P_2 — линейные функции формы буферных узлов соседнего стандартного элемента [5] при $\rho=R(\varphi)$, а $K=R'/(R-\rho_s)^2$, $V_i=F_{2i}'+F_{1i}$, $W_i=F_{1i}'-F_{2i}$, $H_1=LP_1'-KP_1$, $H_2=LP_2'-KP_2$.

2. Перейдем к численной иллюстрации сингулярно-буферной модификации метода конечных элементов. Рассмотрим квадратную плиту размера 1×1, жестко закрепленную с двух противоположных сторон, к двум другим ее сторонам приложена одинаковая нормальная параболическая нагрузка. Ввиду двойной симметрии задачи рассчитаем четверть квадрата с одной особой точкой в начале координат. Как известно [3, 4], бесконечные напряжения в такой точке могут появиться лишь за счет первого слагаемого асимптотики.

Покроем эту область сеткой по типу, изображенному на фиг. 1, *г*. Шаг сетки в стандартной зоне $h=1/(2n)$, как и радиус сингулярного элемента ρ_s, будем менять в процессе решения (на фиг. 1, *г* $n=5$, $\rho_s=0{,}23$). Аппроксимацию перемещений в стандартных элементах, треугольных и квадратных, возьмем соответственно линейную и билинейную [2, 5], а в буферных — описанную выше линейную по ρ.

Пусть $n=20$. Определим сначала необходимое число членов асимптотики m: если для некоторого ρ_s увеличение m на 2 (все используемые λ_i, кроме λ_1, комплексно-сопряженные) вызывает расхождения в перемещениях, не превышающие 1%, то значит для этого радиуса достаточно оставить m членов. После численной проверки оказалось, что для $\rho_s<0{,}02$, $m=1$; для $\rho_s<0{,}15$, $m=3$; для $\rho_s<0{,}35$, $m=5$; дальнейший рост сингулярного элемента требует сохранения еще большего числа членов асимптотики.

Ограничившись указанными размерами радиуса и положив для единообразия $m=5$, сравним перемещения и напряжения, вычисленные при одном и том же $n=20$, но с различными сингулярными элементами $(0<\rho_s<0{,}35)$. Установив таким образом допустимые пределы изменения ρ_s и зафиксировав в них среднее значение, исследуем затем сходимость по перемещениям и напряжениям ($n=5$, $n=10$, $n=20$). И, наконец, сопоставим рассматриваемую модификацию с обычным методом конечных элементов со сгущающейся в окрестности особой точки сеткой.

На основе полученных результатов сделаем выводы. Сингулярно-буферная модификация метода конечных элементов позволяет полностью избежать сгущения сетки вблизи особой точки. Размеры буферных элементов соответствуют шагу сетки в стандартной зоне. Выбор же радиуса сингулярного элемента довольно широк: нижняя граница определяется так, чтобы не пришлось сгущать сетку (слишком маленький сингулярный элемент нуждается в дополнительном дроблении шага в своей окрестности), а верхняя зависит от числа членов асимптотики, с которыми предполагается работать. Например, в иллюстрационной задаче для $m=5$ при изменении ρ_s от 0,1 до 0,35 расхождения в перемещениях не превышают 1% ($n=20$).

Радиус действия асимптотики в чистом виде может быть очень значительным: для трех членов ряда составляет около 1/3 характерного размера области, для пяти – около 2/3. Столь глубокое проникновение асимптотики вызывает существенное сокращение общего числа неизвестных. Но с другой стороны, такое сокращение иногда сопровождается увеличением ширины полосы глобальной матрицы жесткости, что в свою очередь может свести на нет преимущества, даваемые уменьшением числа неизвестных. Поэтому порядок нумерации последних (как узловых, так и асимптотических) является важным моментом в сингулярно-буферной модификации метода конечных элементов (в публикуемой работе он не рассматривается).

Следует особо оговорить расчет напряжений в узлах, внутренних, буферных и пограничных, обозначенных на фиг. 1, *г* соответственно темными и светлыми точками и крестами. Численно проверено, что для внутренних узлов подходит обычное усреднение по площади стыкующихся элементов. Если аналогично искать напряжения в буферных узлах, то получаются резкие «всплески», которые, однако, сглаживаются решениями для больших значений ρ_s (потому что для них «всплески» перемещаются дальше по ρ). А так как верхний предел ρ_s при одном и том же m достаточно велик, то естественно определять напряжения в буферных узлах по формулам сингулярного элемента. За основной критерий выбора метода вычисления напряжений в пограничных узлах предлагается принять их хорошую стыковку с асимптотической частью (во внутренних узлах, а так же для перемещений во всей области, такая стыковка обеспечивается автоматически). В иллюстрационной задаче для этой цели используется параболическая экстраполяция трех соседних с пограничными и расположенных по нормали к границе узловых напряжений. В результате расхождения в напряжениях при изменении ρ_s от 0,1 до 0,35 не превышают 2% ($n=20$), причем максимальны они в примыкающих к буферной зоне стандартных элементах.

Что касается сходимости сингулярно-буферной модификации метода конечных элементов, то вызываемая сгущением сетки ($n=5$, $n=10$, $n=20$) наибольшая погрешность в перемещениях имеет место в стандартной зоне: $\Delta U(5,10)=4\%$, $\Delta U(10,20)=1\%$, т. е. при уменьшении шага сетки в два раза погрешность уменьшается в четыре. Такая скорость сходимости у перемещений сохраняется и в остальных зонах, в то время как величина погрешности резко убывает по мере приближения к особой точке.

Однако главный интерес представляет сходимость напряжений. Их поведение для сравниваемых сеток с $\rho_s=0{,}23$ показано на фиг. 2–4 сплошными ($n=20$), штриховыми ($n=10$) и штрихпунктирными ($n=5$) линиями. Причем из-за малости масштаба две последние появляются, только когда расхождение больше 1%; в остальных случаях они сливаются со сплошной кривой. По этой же причине на указанных фигурах почти незаметно излома кривых при переходе от элемента к элементу. Фиг. 2 соответствует $\varphi=\pi/4$, фиг. 3 – $\varphi=0$ и $\varphi=\pi/2$, фиг. 4, *а*, *б*, *в* – $\rho=0{,}12$; 0,24; 0,36. (На фиг. 3 для $\varphi=\pi/2$ изображено лишь незаданное напряжение σ_ρ, а на фиг. 4 – σ_φ). Вертикальными линиями с цифрами на фиг. 2 и 3 указаны границы зон: нулевая линия располагается между сингулярной и буферной зонами, а n-я ($n=20$, 10 или 5 в зависимости от того, какая сетка рассматривается) – между буферной и стандартной. Численные значения напряжений на фиг. 2–4 получены для $\nu=0{,}3$, $G=0{,}813\cdot10^{10}$, $\sigma_\varphi|_{\varphi=\pi/2}=-0{,}16\,\rho^2+0{,}16\cdot10^4\,\rho-0{,}5\cdot10^7$.

Отметим, что и параболическая экстраполяция в пограничных узлах стандартной зоны, и расчет находящихся на границе буферных узлов по формулам сингулярного элемента работают только в случае достаточно густых сеток ($n=10$ и $n=20$). Поэтому при сравнении стандартных и буферных участков границ на фиг. 3 и 4, *б*, *в* не следует учитывать сетку с $n=5$.

Численно установлено, что в сингулярной и буферной зонах скорость сходимости у напряжений такая же, как и у перемещений, и величина их расхождения между сравниваемыми сетками также резко убывает с приближением к особой точке. Наибольшую погрешность в напряжениях дает стандартная зона $\Delta\sigma(10,20)=3\%$, причем это значение достигается не только на границе, но и внутри области (фиг. 4, *в*, $n=10$ и $n=20$). Будем считать подобное распределение характерным и для негустых сеток (при более удачном выборе способа расчета узлов на границе), поэтому за наибольшее $\Delta\sigma(5, 10)$ примем те 6%, которые имеют место в стандартной зоне, исключая приграничные элементы. Следовательно, скорость сходимости у напряжений в стандартной зоне в два раза меньше, чем в остальных.

Сингулярно-буферная модификация метода конечных элементов имеет ряд преимуществ по сравнению с обычным методом, использующим сгущающуюся в окрестности особой точки сетку. К ним относится устойчивость как по ρ_s, так и по h при $\rho\to0$; обычный метод при малых ρ очень чувствителен к шагу сетки и характеру ее сгущения. Эта устойчивость — следствие высокой точности вычисления коэффициента при первом слагаемом асимптотики, которое в иллюстрационной задаче дает бесконечные напряжения,— $\Delta A_1(5, 10) = 0{,}16\%$, $\Delta A_1(10, 20) = 0{,}04\%$. Остальные коэффициенты находятся с большей погрешностью (максимальная — соответственно 3,2 и 0,8%). Таким образом очень точно определяются коэффициенты интенсивности напряжений, играющие существенную роль в механике разрушения. И, наконец, для одинаковых h наибольшая погрешность в напряжениях у предлагаемой модификации меньше, чем у обычного метода со сгущением, так как хотя максимальные значения их погрешностей в районе стандартной зоны и совпадают, но в первом случае это значение является наибольшим для всей области, а во втором оно уступает погрешности, приходящейся на ближайшую окрестность особой точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Akin J. E.* The generation of elements with singularities.— Internat. J. Numer. Meth. Engng., 1976, v. 10, No. 6, p. 1249—1259.
2. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л.: Изд-во АН СССР. 1963. 367 с.
4. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178—186.
5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
15.VIII.1984