

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЫ ПРИ ПОГРУЖЕНИИ В МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

КОВАЛЬЧУК В. Ф., УЛИТКО А. Ф.

Изучается характер движения и напряженно-деформированное состояние проводящей неферромагнитной сферы, которая погружается в магнитное поле, описываемое функцией Хевисайда. Определяются демпфирующие силы, действующие на сферу со стороны магнитного поля. Предлагается новый подход к решению задачи деформирования проводящих тел импульсными электромагнитными полями, состоящий в том, что исходную задачу разбивают на две существенно более простые.

1. Рассмотрим проводящее неферромагнитное упругое тело, которое взаимодействует с импульсным электромагнитным полем.

При рассмотрении задач деформирования упругих тел импульсными электромагнитными полями можно пренебречь связностью упругих и электромагнитных полей при кратковременных взаимодействиях [1]. Поэтому будем исходить из нелинейной несвязанной системы уравнений магнитоупругости (предполагается отсутствие свободных зарядов $\rho_e = 0$):

$$2(m-1)(m-2)^{-1} \text{grad div } u - \text{rot rot } u + G^{-1}F = G^{-1}\rho \partial^2 u / \partial t^2 \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Исследование проводится для неферромагнитных хорошо проводящих материалов, таких, как медь, алюминий и т. п. Для них будем пренебрегать влиянием процессов поляризации и намагничивания, т. е. положим $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Тогда в случае задания на поверхности тела S вектора внешних усилий с компонентами Φ_i электрические и механические граничные условия на S имеют вид [2]:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \sigma_{ij} n_j = \Phi_i \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{u} , \mathbf{F} , \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{j} — векторы упругих перемещений, пондеромоторной силы, электрической и магнитной напряженности поля, электрической и магнитной индукции поля, плотности тока соответственно, \mathbf{n} — внешняя нормаль к S , m — число Пуассона, ε_0 , μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, σ — проводимость, G — модуль сдвига, ρ — плотность материала.

Отметим, что при моделировании процессов магнитной штамповки, как правило, пренебрегают термоупругими напряжениями [3], поскольку их повышение вследствие динамических эффектов, вообще говоря, не имеет практического значения [4].

Таким образом, для определения напряженно-деформированного состояния тела под действием импульсного электромагнитного поля необходимо сначала определить электромагнитное поле в нем, а затем разрешить уравнения Ламе с пондеромоторной силой, выступающей в качестве массовой силы.

Остановимся на вопросе учета отраженного электромагнитного поля от поверхности проводящего тела.

При решении задачи о взаимодействии магнитного поля с проводящим телом в

строгой постановке необходимо проинтегрировать уравнения Максвелла вне и внутри тела, а затем с помощью электрических граничных условий (1.2) определить постоянные интегрирования. Однако в задачах о погружении проводящих тел со скоростью v ($v \ll c$, c — скорость света в вакууме) в магнитное поле можно пренебрегать отраженным полем [5]. При этом граничные условия (1.2) необходимо выполнять только по касательным составляющим магнитного поля.

2. Рассмотрим модельную задачу о погружении хорошо проводящей неферромагнитной сферы с постоянной скоростью $v = kv$ в магнитное поле B_0 , которое описывается функцией Хевисайда $H(z)$. Если связать со сферой систему координат, движущуюся по закону $z = vt$, то можно считать, что сфера покоится, а на нее со скоростью v набегают магнитное поле $B_0 = -jB_0 H(z - a + vt)$. Кроме того, в этой системе координат появляется электрическое поле, которое при $v \ll c$ имеет вид [6]. $E_0 = ivB_0 H(z - a + vt)$.

Вводим безразмерные координаты $z = z'/a$, $t = vt'/a$ (a — радиус сферы). При этом выражения для электромагнитного поля представляются следующим образом:

$$B_0 = -jB_0 H(z - 1 + t), \quad E_0 = ivB_0 H(z - 1 + t) \quad (2.1)$$

Под действием электромагнитного поля (2.1) в сфере индуцируется электромагнитное поле, для определения которого необходимо проинтегрировать систему уравнений Максвелла. Поскольку в этом случае можно пренебречь отраженным полем от поверхности сферы, то электрические граничные условия (1.2) сведутся к равенству касательных составляющих магнитного поля (2.1) и магнитного поля внутри сферы. Начальные условия принимаются нулевыми.

Для решения поставленной задачи воспользуемся преобразованием Лапласа [7]:

$$\tilde{f}(r, \theta, \varphi; p) = \int_0^{\infty} f(r, \theta, \varphi; t) e^{-pt} dt \quad (2.2)$$

и методом собственных векторных функций [8], согласно которому решение уравнений Максвелла для сферы в области изображений ищется в виде (индексом 0 будем обозначать падающее поле (2.1), а индексом 2 — электромагнитное поле внутри сферы):

$$E_2(r, \theta, \varphi; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n [u_n^k(r, p) L_n^k(\theta, \varphi) + v_n^k(r, p) M_n^k(\theta, \varphi) + w_n^k(r, p) N_n^k(\theta, \varphi)] \quad (2.3)$$

$$H_2(r, \theta, \varphi; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n [\xi_n^k(r, p) L_n^k(\theta, \varphi) + \eta_n^k(r, p) M_n^k(\theta, \varphi) + \zeta_n^k(r, p) N_n^k(\theta, \varphi)]$$

$$L_n^k(\theta, \varphi) = e_r S_n^k, \quad M_n^k(\theta, \varphi) = r \cdot \text{grad } S_n^k, \quad N_n^k(\theta, \varphi) = r \cdot \text{rot} [e_r \cdot S_n^k] \quad (2.4)$$

$S_n^k(\theta, \varphi) = [(2n+1)(n-k)!/4\pi(n+k)!]^{1/2} \exp(ik\varphi) P_n^k(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Разложение падающего поля (2.1) в области изображений по векторным гармоникам (2.4) получается, если воспользоваться формулой обращения [8] (* — знак комплексного сопряжения):

$$e_r u_n^k + n(n+1)(e_\theta v_n^k + e_\varphi w_n^k) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(e_r \cdot E_0) L_n^{k*} + (e_\theta E_0) M_n^{k*} + (e_\varphi E_0) N_n^{k*}] \sin \theta d\theta \quad (2.5)$$

Проделав соответствующие выкладки, находим

$$E_0 = \frac{ive^{-p} B_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{(n+1)n}{x} I_n L_n^- + \right.$$

$$+ \frac{i}{x} \frac{d}{dx} (xI_n) M_n^- + I_n N_n^+ \} \quad (2.6)$$

$$H_0 \sim - \frac{e^{-p} B_0}{\mu_0 p} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{(n+1)n}{x} I_n L_n^+ + \frac{i}{x} \frac{d}{dx} (xI_n) M_n^+ + I_n N_n^- \right\}$$

Здесь и далее для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_n^\pm &= L_{n+1} \pm L_{n-1}, & M_n^\pm &= M_{n+1} \pm M_{n-1} \\ N_n^\pm &= N_{n+1} \pm N_{n-1}, & x &= pr, & y &= \sqrt{q} pr \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x), \quad f_n = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} I_{n+1/2}(y), \quad q = \sigma \mu_0 v a$$

$\sqrt{1/2\pi/x} I_{n+1/2}(x)$ — модифицированная функция Бесселя полуцелого индекса.

Подставив (2.3) в уравнения Максвелла и используя полноту разложения по векторным гармоникам, получим две системы уравнений для каждого n и k , после решения которых находим выражение для индуцированного электромагнитного поля сферы

$$E_2 \sim - \frac{ie^{-p} v B_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{(n+1)n}{y} g_n f_n L_n^- + \frac{ig_n}{y} \frac{d}{dy} (y f_n) M_n^- + b_n f_n N_n^+ \right\} \quad (2.8)$$

$$H_2 \sim - \frac{e^{-p} B_0}{\mu_0 p} \sqrt{\frac{q}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{n(n+1)}} \left\{ i \frac{(n+1)n}{y} b_n f_n L_n^+ + \frac{i}{y} b_n \frac{d}{dy} (y f_n) M_n^+ + g_n f_n N_n^- \right\}$$

Используя граничные условия (1.2) для касательных составляющих магнитного поля, легко получаем выражение для постоянных интегрирования b_n и g_n ($r=1$):

$$\begin{aligned} b_n &= [\sqrt{p/q} x^{-1} d(xI_n)/dx] / [y^{-1} d(yf_n)/dy] \\ g_n &= -\sqrt{p/q} I_n/f_n \end{aligned} \quad (2.9)$$

Построить точное обращение решения (2.8) с помощью интеграла Римана — Меллина затруднительно. Поэтому ниже построено приближенное асимптотическое решение при малых значениях безразмерного времени. Именно при этих значениях времени происходят существенные явления в задачах взаимодействия упругих тел с импульсными электромагнитными полями.

Сферическая функция Бесселя $\sqrt{\pi/2y} I_{n+1/2}(y)$ заменяется своим асимптотическим представлением при больших y , в котором удерживается один член. Детальный анализ, проведенный численно, показал, что указанное приближение при значениях безразмерного времени $t < 14$ дает ошибку не более 5% (сравнение проводилось для медной сферы; $va=100$). После замены сферических функций их асимптотическими представлениями удастся просуммировать ряды (2.8), а затем и определить оригиналы, имеющие вид (радиальными составляющими электромагнитного поля пренебрегается по сравнению с тангенциальными, поскольку последние в \sqrt{q} раз больше, а q — большое число для хорошо проводящих тел):

$$E_2 = v B_0 r^{-1} (T\pi q)^{-1/2} \exp[-q(1-r)^2/4T] (e_\theta \cos \varphi - e_\varphi \sin \varphi \cos \theta) H(T)$$

$$\mathbf{H}_2 = -\mu_0^{-1} r^{-4} B_0 \operatorname{Erfc}[\sqrt{q}(1-r)/2\sqrt{T}] (\mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos \varphi) H(T)$$

$$T = t - 1 + \cos \theta, \quad r \geq \varepsilon > 0 \quad (2.10)$$

3. Вычислим механические силы и изучим характер движения сферы при погружении ее в магнитное поле (2.1). В этом случае в сфере индуцируется электромагнитное поле (2.10), которое вызывает пондеромоторную силу

$$\mathbf{F} = -\mathbf{e}_r v \sigma B_0^2 r^{-2} (T \pi q)^{-1/2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \times \\ \times \exp[-q(1-r)^2/4T] \operatorname{Erfc}[\sqrt{q}(1-r)/2\sqrt{T}] H(T) \quad (3.1)$$

Массовая сила (3.1) вызывает демпфирующую силу P_z , действующую в направлении оси z , которая тормозит движение сферы. Для определения P_z (3.1) необходимо проинтегрировать по объему сферы. После указанных преобразований находим

$$P_z = -1/2 \mu_0^{-1} B_0^2 a^2 \pi (2t - 2t^2 + t^3 - t^4/4) H(2-t) \quad (3.2)$$

Силу (3.2) можно вычислить и другим путем, используя тензор натяжений Максвелла [9]:

$$T_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - 1/2 \delta_{ij} (E_k D_k + H_k B_k) \quad (3.3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, i, j, k принимают значения x, y, z ; по повторяющимся индексам производится суммирование. Сила P_z вычисляется по формуле [9]:

$$P_z = \iint_S T_{zj} n_j dS \quad (3.4)$$

интеграл (3.4) берется по полной поверхности сферы. Вычисляя его, легко убедиться, что результат совпадения с (3.2).

Чтобы оценить эффективность преобразования энергии магнитного поля в механическую энергию при погружении проводящих тел в магнитное поле, рассмотрим такую же задачу для идеально проводящей сферы. В этом случае полагается, что по поверхности сферы бежит внешнее магнитное поле (2.1) $\mathbf{B} = -j B_0 H(t-1+\cos \theta)$. Используя тензор натяжений (3.3), находим

$$T_{xx} = 0, \quad T_{yy} = 0, \quad T_{zz} = -1/2 B_0^2 / \mu_0 H(T) \quad (3.5)$$

Главный вектор силы P_z' , действующий на идеально проводящую сферу при погружении ее в магнитное поле, равен

$$P_z' = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi T_{zz} \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{B_0^2 a^2 \pi}{2\mu_0} (2-t) t H(2-t) \quad (3.6)$$

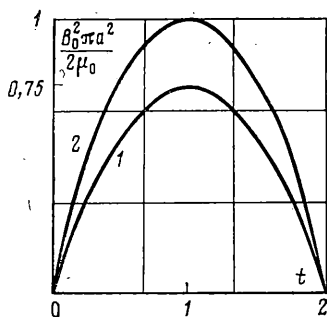
На фиг. 1 изображена зависимость величины силы P_z и P_z' (кривые 1 и 2 соответственно) от безразмерного времени. Хорошо видно, что значения силы для хорошо проводящей сферы меньше, чем для идеально проводящей. Часть механической энергии в первом случае переходит в тепловую энергию. Максимальные значения сил отличаются на 25%.

Если предположить, что скорость погружения идеально проводящей сферы в магнитное поле переменна, то (3.6) в размерных координатах можно представить в виде

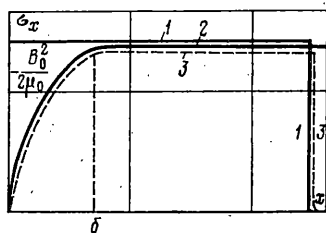
$$P_z' = -1/2 \mu_0^{-1} B_0^2 \pi (2a - h) h H[h(2-h)], \quad h = \int_0^t v dt' \quad (3.7)$$

где h — глубина погружения сферы в магнитное поле (высота сферического сегмента, проникшего в магнитное поле). Если $v = \text{const}$, то (3.7) совпадает с (3.6).

Используем (3.7) для решения следующей задачи. Пусть v_0 — начальная скорость погружения идеально проводящей сферы в магнитное поле. Какую минимальную скорость должна иметь сфера, чтобы преодолеть



Фиг. 1



Фиг. 2

«магнитный барьер»? Как изменяется скорость сферы при преодолении границы раздела вакуум — магнитное поле?

Используя второй закон Ньютона, находим

$$dv/dt = -\frac{1}{3} B_0^2 \mu_0^{-1} \rho^{-1} a^{-2} h (2 - a^{-1} h) H[h(2-h)] \quad (3.8)$$

— интегриродифференциальное уравнение для определения скорости идеально проводящей сферы при погружении в магнитное поле (2.1).

Результаты численного интегрирования (3.8) представлены ниже при $a=0,1$ м, $B_0=10$ Т; $\rho=8900$ кг/м³, где v_0 (м/с) — начальная скорость погружения, h_{\max} (м) — максимальная глубина погружения сферы (если $h_{\max}=2a$, то это означает, что сфера полностью погрузилась в магнитное поле), $t_1 \cdot 10^3$ (с) — время, за которое сфера погрузилась на глубину h_{\max} :

v_0	60	90	94,5	94,6	100	200	300
v_1	-60	-90	-94,5	2,9	32,7	176,3	284,7
h_{\max}	0,087	0,162	0,196	0,2	0,2	0,2	0,2
t_1	2,3	3,5	6,2	6,3	3,2	1,1	0,7

Если тело не полностью погрузилось в магнитное поле, то v_1 (м/с) будет скоростью отскока сферы от магнитного поля $v_1=v_0$, если же полностью, то v_1 — скорость установившегося движения по магнитному полю, т. е. $v_1=v|_{t=t_1}$.

Если $v < 94,5$ м/с, идеально проводящая сфера отскакивает от магнитного поля как от абсолютно упругой стенки. При $v > 94,6$ м/с сфера полностью погружается в магнитное поле и далее движется с постоянной скоростью v_1 , которую также можно определить из закона сохранения энергии. При движении сферы ее кинетическая энергия расходуется на преодоление «магнитного барьера», равного энергии магнитного поля в объеме тела. Поэтому справедливо равенство

$$v_0^2 - v^2 = \frac{1}{4} B_0^2 h^2 \mu_0^{-1} \rho^{-1} a^{-2} (3 - a^{-1} h) \quad (3.9)$$

Если $v=0$ и $h=2a$, то начальная скорость погружения равна

$$v_0 = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho} \quad (3.10)$$

это минимальная скорость, которая необходима идеально проводящей сфере, чтобы преодолеть «магнитный барьер». При $B_0=10$ Т и $\rho=8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $v_0=94,56$ м/с, что хорошо согласуется с решением уравнения (3.8).

Отметим интересный факт: значение скорости (3.10) численно совпадает со значением скорости распространения магнитогиродинамических волн Альвена.

Хорошо проводящая сфера при погружении в магнитное поле будет испытывать силу (3.2), которая несколько меньше, чем для идеально проводящей сферы (фиг. 1). Соотношение (3.2) не будет справедливо для малых значений v . Но при больших значениях скорости можно, так же как и для идеально проводящей сферы, указать скорость после преодоления «магнитного барьера». Результаты решения соответствующего интегриродифференциального уравнения для медной сферы представлены ниже при $a=0,1$ м и $B_0=10$ Т:

v_0	90	100	200	300
v_1	30,9	53,5	181,4	287,8
t_1	3,4	2,6	1,0	0,7

Отметим, что после полного погружения хорошо проводящей сферы в магнитное поле (т. е. $h=2a$) около 20% механической энергии расходуется на джоулево тепло. При дальнейшем движении хорошо проводящей сферы (т. е. $h > 2a$) сила P_z не исчезает, как это имеет место для идеально проводящей сферы. Поскольку радиальные составляющие электромагнитного поля в \sqrt{q} раз меньше тангенциальных (см. (2.8)), то и P_z при $h > 2a$ будет в \sqrt{q} раз меньше; тем не менее это приведет к остановке хорошо проводящей сферы в магнитном поле.

4. Рассмотрим деформирование упругой проводящей сферы, погружающейся в магнитное поле. В этом случае (п.3) на сферу действует радиальная пондеромоторная сила (3.1). Для нахождения напряжений и деформаций сферы, которые вызваны силой (3.1), необходимо проинтегрировать уравнения Ламе (1.1) с массовыми силами (3.1), учитывая тот факт, что поверхность сферы свободна от напряжений, т. е. $\Phi_i=0$ (см. 1.2).

К этой задаче магнитоупругости близка задача о деформировании упругой среды вокруг сферической полости при набегании ступенчатой волны давления [10]. В [8] решена подобная [10] задача о внезапном сжатии упругого пространства со сферической полостью и сделан важный вывод: для разыскания максимальных динамических напряжений и времени их достижения нет необходимости в исследовании весьма сложного дифрагированного поля в окрестности полости (как это сделано в [10]). Достаточно воспользоваться значительно более простым решением внешней задачи для мгновенно приложенных напряжений к полной поверхности полости. При этом момент достижения максимальной концентрации напряжений необходимо увеличить примерно в 1,5 единицы безразмерного времени, отсчет которого производится от момента соприкосновения волнового фронта с полостью [8]. Различие коэффициентов концентрации с учетом дифракции на полости ($\sigma_0=2,29$ по данным [10]) и в пренебрежении дифракционным рассеиванием ($\sigma_0=2,23$ по результатам [8]) незначительное.

Используя этот результат, предположим, что набегание пондеромоторных сил на сферу можно заменить обжатием сферы и приложением к сфере главного вектора силы. Главный вектор силы вызывает изменение движения сферы как целого. Характер этого движения был установлен выше. При больших скоростях погружения сферы ($v \approx 3 \cdot 10^4$ м/с) утверждение очевидно, поскольку за такое короткое время в сфере не успеют развиться упругие волны. Переходя к размерным координатам в (3.1), находим

$$F = -e_0 \sigma^h a^2 B_0^2 r^{-2} (\pi \mu_0 t^{\sim})^{-1/2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta) \exp[-\sigma \mu_0 (a-r^{\sim})^2 / 4t^{\sim}] \operatorname{Erfc} \sqrt{\sigma \mu_0} (a-r^{\sim}) / 2\sqrt{t^{\sim}} \quad (4.1)$$

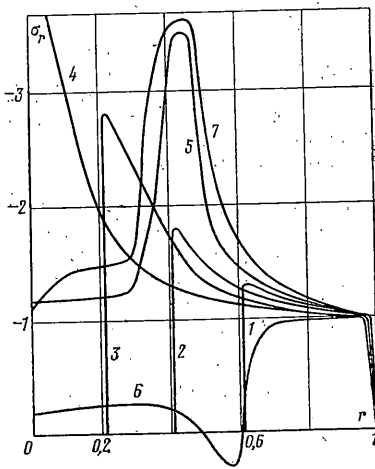
Сформулируем гипотезы, которые позволяют значительно упростить исходную задачу. Для обоснования этих гипотез обратимся к физике процесса деформирования упругих проводящих тел импульсными магнитными полями.

Рассмотрим проводящее полупространство $x \geq 0$, по которому в момент времени $t=0$ производится магнитный удар. Решение этой задачи хорошо известно [1]. Процесс деформирования в данном случае происходит следующим образом. В начальный момент времени на полупространстве начинает действовать распределенная нагрузка $B_0^2/2\mu_0$. Эта динамическая нагрузка вызывает в полупространстве продольную упругую волну. Затем магнитное поле начинает проникать (диффундировать) в полупространство и «выбирает» те напряжения, которые вызвала ушедшая вперед упругая волна. Поэтому, если $\delta = \sqrt{\pi t / \sigma \mu_0}$ — мера диффузии магнитного поля в проводящее полупространство, то решение этой задачи можно разбить на две.

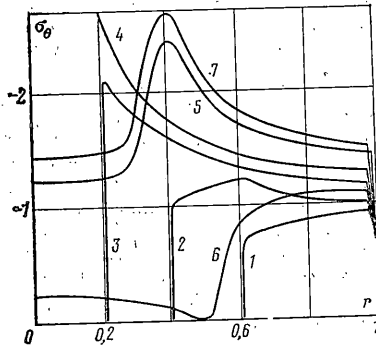
I. При расстояниях больше, чем δ — на задачу динамической теории упругости без массовых сил, но с граничными условиями, равными величине магнитного давления, поскольку электромагнитное поле еще не успело проникнуть в точку наблюдения.

II. При расстояниях меньше, чем δ — на задачу квазистатической теории упругости с массовыми силами и заданными нагрузками на поверхности тела, поскольку сюда уже проникло электромагнитное поле и действует только медленно меняющаяся пондеромоторная сила.

Для получения решения исходной задачи необходимо «сплечь» эти два решения. На фиг. 2: 1 — решение задачи динамики, 2 — решение задачи квазистатики, 3 — численное решение, которое получено в работе [1]. Видно, что погрешность такого подхода менее 1%.



Фиг. 3



Фиг. 4

Следовательно, задача динамической теории упругости для сферы, находящаяся под действием пондеромоторных сил (4.1), формулируется следующим образом:

$$\text{grad div } \mathbf{u} - k^{-2} \text{rot rot } \mathbf{u} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 \quad (4.2)$$

$$1/2 G^{-1} \sigma_r |_{r=1} = -[a_0^\circ S_0^\circ + a_2^\circ S_2^\circ + a_3^\circ (S_2^{\circ 2} + S_2^{-2})]$$

$$\tau_{r\theta} |_{r=1} = \tau_{r\varphi} |_{r=1} = 0$$

Эти выражения приведены к безразмерным координатам при помощи соотношений

$$r = r^\circ / a, \quad t = c_1 t^\circ / a, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ / a^1 / 4 B_0^2 \mu_0^{-1} G^{-1}, \quad a_0^\circ = 4/3 \sqrt{\pi}, \quad (4.3)$$

$$k^2 = c_1^2 / c_2^2 = 2(m-1) / (m-2), \quad a_2^\circ = 2/3 \sqrt{\pi/5}, \quad a_3^\circ = 2/3 \sqrt{3\pi/10}$$

где c_1, c_2 — скорости волн растяжения — сжатия и сдвига соответственно. Задача квазистатической теории упругости имеет вид

$$k^2 \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (4.4)$$

$$\mathbf{F} = f(r) [a_0^\circ \mathbf{L}_0^\circ + a_2^\circ \mathbf{L}_2^\circ + a_2^2 (\mathbf{L}_2^2 + \mathbf{L}_2^{-2})]$$

$$f(r) = -4r^{-2} \sqrt{\sigma \mu_0 c_1 a} / \sqrt{\pi t} \exp[-\sigma \mu_0 c_1 a (1-r)^2 / 4t] \text{Erfc} \sqrt{\sigma \mu_0 c_1 a} (1-r) / 2\sqrt{t}$$

$$\sigma_r |_{r=1} = \tau_{r\theta} |_{r=1} = \tau_{r\varphi} |_{r=1} = 0$$

Исходя из вида граничных условий (4.2) и выражения для пондеромоторной силы (4.4), вектор упругих перемещений ищем в виде

$$\mathbf{u} = a_0^\circ u_0 \mathbf{L}_0^\circ + a_2^\circ u_2 \mathbf{L}_2^\circ + a_2^\circ v_2 \mathbf{M}_2^\circ + a_2^2 u_2 (\mathbf{L}_2^2 + \mathbf{L}_2^{-2}) + a_2^2 v_2 (\mathbf{M}_2^2 + \mathbf{M}_2^{-2}) \quad (4.5)$$

Для решения динамической задачи (4.2) используется преобразование Лапласа. Нахождение обратного преобразования Лапласа сводится к интегральному уравнению Вольтерра первого рода [11], решение которого находится численно.

При решении задачи (4.4) сначала строится общее решение для произвольной массовой силы

$$\mathbf{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \xi_n^k(r, t) \mathbf{L}_n^k(\theta, \varphi)$$

а затем используется общее решение при $n=0$ и $n=2$.

На фиг. 3 и 4 показаны результаты численных расчетов радиального и меридионального напряжений медной сферы (σ_r и σ_θ приведено к безразмерному виду делением на величину магнитного давления $B_0^2/2\mu_0$) в зависимости от безразмерного радиуса для различных моментов времени. Численные расчеты представлены в меридиональном сечении сферы $\varphi=0$, в котором напряжения не зависят от угла θ , поскольку сфера в этой плоскости обжата пондеромоторными силами как «обручем». На фиг. 3 и 4 кривая 1 соответствует безразмерному времени $t=0,4$; 2 — 0,6; 3 — 0,8; 4 — 1,0; 5 — 1,4; 6 — 2,4; 7 — 3,4.

В работе [1] было указано, что напряжения в неограниченном теле ограничены величиной магнитного давления $B_0^2/2\mu_0$. Для динамических напряжений в сфере такой вывод не справедлив. Наличие отражающей поверхности для упругих волн приводит к тому, что наибольшие динамические сжимающие напряжения (без учета эффекта возрастания при $r \rightarrow 0$ и $t=1$) превосходят уровень магнитного давления в два-три раза. Отметим также, что кроме сжимающих напряжений появляются также растягивающие.

Таким образом, используя предложенные гипотезы о возможности разбиения задач деформирования упругих проводящих тел импульсными магнитными полями на задачи динамики-квазистатики, удалось описать волны напряжений в упругой проводящей сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moon F. C., Chattopadhyay S. Magnetically induced stress waves in a conducting solid — theory and experiment. — Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1974, v. 41, No. 3, p. 641—646. — Рус. перев.: В кн.: Нестационарные процессы в деформируемых телах.: Мир, 1976, с. 97—115.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
3. Furth H. P. Magnetic pressure. — Intern. Sci. Technol., 1966, No. 9, p. 32—41.
4. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: Физматгиз, 1963. 251 с.
5. Ковальчук В. Ф. Пондеромоторное взаимодействие импульса электромагнитного поля со сплошной сферой. — В кн.: Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах. Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1984, с. 86—88.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
8. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
9. Абрагам-Беккер. М. Теория электричества. Л.— М.: ОНТИ, Гостехиздат, 1936. 258 с.
10. Хуан Г., Ван Ю. Е. Нестационарная концентрация напряжений около сферической полости в упругой среде. — Тр. Америк. об-ва инж.—механиков. Прикл. механика, 1972, т. 39, № 4, с. 146—149.
11. Kromm A. Zur Ausbreitung von Stoßwellen in Kreislochscheiben. — Z. Angew. Math. und Mech., 1948, Bd. 28, H. 4, S. 104—114.

Киев

Поступила в редакцию
10.VI.1985