МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3

О МЕТОДЕ ОБОБЩЕННОЙ СУПЕРПОЗИЦИИ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА

АЛЕКСАНДРОВ В. М., БРУДНЫЙ С. Р.

Рассматривается контактная задача об антиплоском сдвиге полупространства жестким штампом. Материал полупространства считается нелинейным, со степенным законом связи между напряжениями и деформациями. Целью работы является сравнение точного решения задачи с приближенным решением, полученным по методу обобщенной суперпозиции, предложенному в [1].

1. Основная система уравнений. Нормальное сечение полупространства изображено на фиг. 1. Система уравнений и граничных условий рассматриваемой задачи имеет вид

$$\tau_{x,x}+\tau_{y,y}=0 \tag{1.1}$$

$$\tau_x=K_0\gamma^{\mu-1}u,\quad \tau_y=K_0\gamma^{\mu-1}v;\quad 0<\mu\leqslant 1 \tag{1.2}$$

$$\gamma=\sqrt{u^2+v^2};\quad u=w_{,x},\quad v=w_{,y} \tag{1.3}$$

$$w=w_0=\mathrm{const},\quad |x|<a;\quad \tau_y=0,\quad |x|>a;\quad y=0 \tag{1.4}$$

Здесь $w=w(x, y)$ — перемещение вдоль оси z, a — ширина штампа. Индексы, стоящие после запятой, обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Сила P, приложенная к штампу, связана с контактным напряжением $q(x)$ по формуле

$$P=\int_{-a}^{a} q(x)\,dx \tag{1.5}$$

Подставив (1.2), (1.3) в (1.1), получим квазилинейное уравнение второго порядка на w:

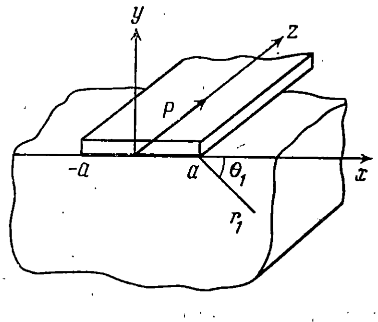
$$(\mu u^2+v^2)w_{,xx}+(\mu v^2+u^2)w_{,yy}+2(\mu-1)uvw_{,xy}=0 \tag{1.6}$$

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям первого порядка относительно u и v:

$$(\mu u^2+v^2)u_{,x}+(\mu v^2+u^2)v_{,y}+(\mu-1)uv(v_{,x}+u_{,y})=0 \tag{1.7}$$

$$v_{,x}-u_{,y}=0$$

2. Построение приближенного решения по методу обобщенной суперпозиции. Изложим на примере задачи антиплоского сдвига идею метода



Фиг. 1

обобщенной суперпозиции, созданного для решения нелинейных контактных задач.

Пусть известно решение задачи об антиплоском сдвиге полупространства из нелинейного материала сосредоточенной силой Q. Перемещение w границы полупространства представляется в виде

$$w(x,\ 0)=f(Q)F(|x|) \tag{2.1}$$

где f и F — некоторые нелинейные непрерывные функции. Предположим, что f имеет непрерывную обратную функцию f^{-1}. Тогда (2.1) можем записать в форме $w_*=QF_*(|x|)$, где $w_*(x,\ 0)=f^{-1}(w(x,\ 0))$; $F_*(|x|)=f^{-1}(F(|x|))$.

Основное допущение метода состоит в том, что для системы сил $q(x)$, распределенных на участке l границы полупространства, обобщенное перемещение w_* можно получить простой суперпозицией

$$w_*=\int\limits_l q(\xi)F_*(|x-\xi|)\,d\xi \tag{2.2}$$

Таким образом, рассматриваемая контактная задача сводится к определению неизвестной функции контактных напряжений $q(x)$ из линейного уравнения (2.2).

В соответствии с методом обобщенной суперпозиции построим решение задачи о действии сосредоточенной силы. Можно показать, что с учетом соотношений (1.2) — (1.3) оно имеет вид

$$w=Q^n r^{1-n}/[(2K_0)^n(n-1)],\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},\qquad n=\mu^{-1} \tag{2.3}$$

и, следовательно, уравнение (2.2) для рассматриваемой задачи может быть представлено в форме

$$\varkappa^\mu=\int\limits_{-a}^{a}\frac{q(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{1-\mu}},\qquad \varkappa=(2K_0)^n(n-1)w_0 \tag{2.4}$$

Это уравнение изучено в [1], где получены следующие соотношения для безразмерных величин $x_*=x/a$, $\delta_*=w_0/a$; $q_*(x_*)=q(ax_*)/K_0$

$$\begin{gathered} q_*(x_*)=2K_aP^*(1-x_*)^{-1/2\mu},\qquad \delta_*=(n-1)^{-1}(2K_a\pi/\sin(\pi\mu/2))^nP^* \\ K_a=\Gamma((3-\mu)/2)\Gamma(\mu/2)\sin(\pi\mu/2)/\pi^{3/2},\qquad 2P^*=P/(aK_0) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь $\Gamma(t)$ — гамма-функция. Известно, что распределение контактных напряжений, полученное по методу обобщенной суперпозиции, дает неправильную степень особенности в угле штампа. Но неизвестно, насколько сильно оно отличается от истинного распределения в областях вдали от концов штампа.

3. Построение точного решения. Для построения точного решения необходимо выяснить характер поведения функции $w(x,\ y)$ при $r\to\infty$ и $(x,\ y)\to(a,\ 0)$. При $r\to\infty$ асимптотическое поведение $w(x,\ y)$ такое же, как и в задаче о сосредоточенной силе. Следовательно, учитывая (2.3), имеем

$$w\sim 0(r^{1-n}),\qquad r\to\infty \tag{3.1}$$

Из (1.3) вытекает, что при этом

$$\gamma\sim 0(r^{-n}),\qquad r\to\infty \tag{3.2}$$

Представления (3.1) и (3.2) дают возможность выразить асимптотическое поведение $w(x,\ y)$ при $r\to\infty$ в терминах γ:

$$w\sim 0(\gamma^{1-\mu}),\qquad \gamma\to 0 \tag{3.3}$$

Изучим поведение $w(x, y)$ при $(x, y)\to(a, 0)$. Для этого в угле штампа введем локальные полярные координаты r_1 и θ_1 (фиг. 1). Асимптотическое разложение функции w при $r_1\ll 1$ представим в виде ряда по возрастающим степеням r_1

$$w\sim\text{const}+r_1^{\lambda}f(\theta_1)+r_1^{\lambda_1}f_1(\theta_1)+\ldots\quad(0<\lambda<\lambda_1<\ldots)\tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (1.6) и приравнивая члены при одинаковых степенях r_1, получим уравнение на $f(\theta_1)$:

$$f''(\mu f'^2+\lambda^2f^2)+f'^2f[2(\mu-1)\lambda^2+\lambda[(\lambda-1)\mu+1]]+\lambda^3[(\lambda-1)\mu+1]f^3=0\tag{3.5}$$

Учитывая граничные условия (без ограничения общности можно считать, что $w=0$ при $\theta_1=\pi$), имеем

$$f^1(0)=0,\qquad f(\pi)=0\tag{3.6}$$

Можно показать, что общее решение уравнения (3.5) выражается через функцию $\beta(\theta_1)$ [2]:

$$f=C_1(\beta^2+m^2)^{\lambda-1}(\beta^2+\lambda^2)^{-\lambda},\qquad m=\lambda[(\lambda-1)\mu+1]/\mu\tag{3.7}$$

$$\theta_1+C_2=-\operatorname{arctg}(\beta\lambda^{-1})-(1-\lambda)m^{-1}\operatorname{arctg}(\beta m^{-1})\tag{3.8}$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования, а функция $\beta(\theta_1)$ связана с $f(\theta_1)$ соотношением $f'=\beta f$ и удовлетворяет уравнению

$$\beta'=-\{\mu\beta^4+\lambda[2\lambda\mu+1-\mu]\beta^2+\lambda^3[(\lambda-1)\mu+1]/(\mu\beta^2+\lambda^2)\tag{3.9}$$

Из (3.7) и $f'=\beta f$ вытекает, что можно удовлетворить (3.6) только в том случае, если $\beta(0)=0$ и $\beta(\pi)=-\infty$. Учитывая это, из (3.8) определяем $\lambda=\mu/(\mu+1)$. Отсюда следует, что

$$w\sim\text{const}+O(r_1^{\lambda}),\qquad q\sim O(r_1^{-\lambda});\quad r_1\ll 1\tag{3.10}$$

Первое из представлений (3.10) можно переписать в терминах γ:

$$w\sim\text{const}+O(\gamma^{-\mu}),\qquad \gamma\to\infty\tag{3.11}$$

Вернемся к исходной задаче (1.1)—(1.5). Для ее решения применим преобразование Лежандра [3]. Введем новую функцию $\psi=\psi(u, v)$, связанную с w, x, y соотношениями

$$\psi(u, v)=xu+yv-w\tag{3.12}$$

$$x=\psi_{,u},\qquad y=\psi_{,v}\tag{3.13}$$

Из (1.6) получим уравнение на $\psi(u, v)$ в форме

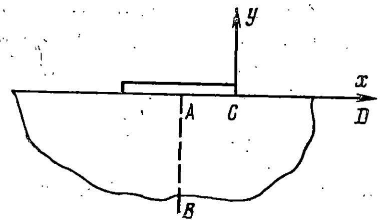
$$(\mu u^2+v^2)\psi_{,vv}+(\mu v^2+u^2)\psi_{,uu}-2(\mu-1)uv\psi_{,uv}=0\tag{3.14}$$

Можно показать, что система (1.7) является равномерно эллиптической на любом своем решении. Это означает, что рассматриваемая полуплоскость в физической плоскости (x, y) гомеоморфно отображается на некоторую область D в плоскости годографа (u, v) [4]. В последующем в силу симметрии задачи будем рассматривать только правую четверть плоскости в плоскости (x, y), причем систему координат введем так, как изображено на фиг. 2. Учитывая граничные условия (1.4), а также характер поведения функции w в угле штампа и на бесконечности, можно построить соответствующую область в плоскости годографа, изображенную на фиг. 3. Для дальнейшего исследования удобно использовать безразмерные переменные $y_*=y/a$, $\rho=\gamma/\gamma_0$, $\Phi=\psi/(a\gamma_0)$, где γ_0 — значение γ в точке A. Величину γ_0 определим в ходе решения задачи.

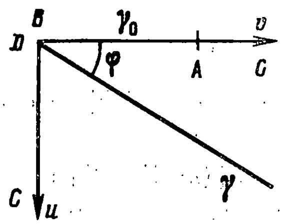
Переходя к полярным координатам ρ, φ (фиг. 3), представим (3.13), (3.14) в форме

$$x_*=\rho^{-1}\cos\varphi\Phi_{,\varphi}+\sin\varphi\Phi_{,\rho},\qquad y_*=-\rho^{-1}\sin\varphi\Phi_{,\varphi}+\cos\varphi\Phi_{,\rho}\tag{3.15}$$

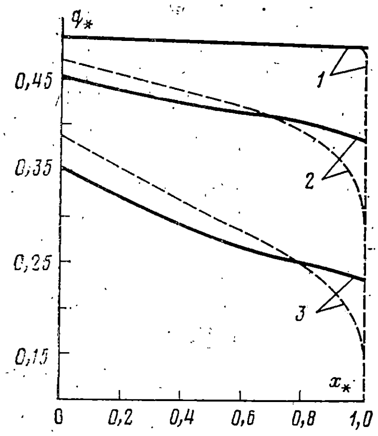
$$n\Phi_{,\rho\rho}+\rho^{-1}\Phi_{,\rho}+\rho^{-2}\Phi_{,\varphi\varphi}=0\tag{3.16}$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Уравнение (3.16) впервые получено в [5]. Из соответствия границ на фиг. 2, 3 и соотношений (3.15) находим граничные условия на $\Phi(\rho, \varphi)$:

$$\rho^{-1}\Phi_{,\varphi}=0, \quad \varphi=\pi/2 \tag{3.17}$$

$$\rho^{-1}\Phi_{,\varphi}=-1, \quad 0<\rho<1; \quad \Phi_{,\rho}=0, \quad \rho>1; \quad \varphi=0 \tag{3.18}$$

Решение краевой задачи (3.16)—(3.18) будем искать при помощи преобразования Меллина. Введем трансформанту Меллина функции $\Phi(\rho, \varphi)$

$$\Phi^{\vee}(s, \varphi)=\int_0^\infty \Phi(\rho, \varphi)\rho^{s-1}\,d\rho, \quad \Phi(\rho, \varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi^{\vee}(s, \varphi)\rho^{-s}\,ds \tag{3.19}$$

Учитывая (3.3), (3.11) и (3.12), имеем

$$\Phi(\rho, \varphi)\underset{\rho\to 0}{\sim} O(\rho^{1-\mu}), \quad \Phi(\rho, \varphi)\underset{\rho\to\infty}{\sim}\mathrm{const}+O(\rho^{-\mu})$$

Поэтому в формулах (3.19) необходимо брать $-1+n^{-1}<\sigma$, $\operatorname{Re} s<0$. Из (3.16) следует, что $\Phi^{\vee}(s, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi^{\vee}_{,\varphi\varphi}+\omega^2(s)\Phi^{\vee}=0, \quad \omega^2(s)=s[n(s+1)-1]$$

Общее решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному условию при $\varphi=\pi/2$, имеет вид $\Phi^{\vee}(s, \varphi)=A_*(s)\cos[\omega(s)(\varphi-\pi/2)]$.

Введя функции

$$g(\rho)=\Phi_{,\rho}(\rho, 0), \quad h(\rho)=\rho^{-1}\Phi_{,\varphi}(\rho, 0) \tag{3.20}$$

можно представить функцию $A_*(s)$ в форме

$$A_*(s)=\frac{h^{\vee}(s)}{\omega(s)\sin[\omega(s)\pi/2]}=-\frac{g^{\vee}(s)}{s\cos[\omega(s)\pi/2]} \tag{3.21}$$

где, учитывая (3.20), $h^{\vee}(s)$ и $g^{\vee}(s)$ представляются в виде

$$g^{\vee}(s)=\int_0^\infty g(\rho)\rho^s\,d\rho=\int_0^1 g(\rho)\rho^s\,d\rho, \quad \operatorname{Re} s>-1+n^{-1}$$

$$h^{\vee}(s)=\int_0^\infty h(\rho)\rho^s\,d\rho=-\frac{1}{s+1}+\int_1^\infty H(\rho)\rho^s\,d\rho=-\frac{1}{s+1}+H^{\vee}(s),$$
$$-1<\operatorname{Re} s<0$$

Будем обозначать функции аналитические при $\operatorname{Re} s<0$ знаком минус, а аналитические при $\operatorname{Re} s>-1+n^{-1}$ — знаком плюс. Тогда из (3.21) получим $(-1+n^{-1}<\operatorname{Re} s<0)$:

$$-g_+\check{}(s)=[-(s+1)_+{}^{-1}+H_-\check{}(s)]s\omega^{-1}(s)\operatorname{ctg}[\omega(s)\pi/2] \qquad (3.22)$$

Для решения этого функционального уравнения применим метод Винера — Хопфа [6]. Представим сомножитель, стоящий при квадратных скобках в правой части (3.22), в виде [5]:

$$s\omega^{-1}(s)\operatorname{ctg}[\omega(s)\pi/2]=D_-(n,s)/D_+(n,s) \qquad (3.23)$$

$$D_-(n,s)=2^{-\sqrt{n}\,s}\prod_{k=1}^{\infty}T_{2k-1}^{+}(s)/T_{2k}^{+}(s),$$

$$D_+(n,s)=2^{-\sqrt{n}\,s-1}\pi n(s+1-n^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}T_{2k}^{-}(s)/T_{2k-1}^{-}(s)$$

$$T_m{}^{\pm}=\pm(\gamma_m{}^{\pm}-a_m s)\exp(\pm a_m s^*), \qquad s^*=s+(n-1)(2n), \qquad a_m=\sqrt{n}/m$$

$$\gamma_m{}^{\pm}=\sqrt{n}\{n^{-1}-1\pm[(1-n^{-1})^2+4m^2n^{-1}]^{1/2}\}/(2m) \qquad (3.24)$$

Учитывая (3.23), можно записать (3.22) в форме

$$-g\check{}(s)D_+(n,\ s)+(s+1)^{-1}D_-(n,\ -1)=H_-\check{}(s)D_-(n,s)-(s+1)^{-1}\times$$
$$\times[D_-(n,s)-D_-(n,-1)]$$
$$-1+n^{-1}<\operatorname{Re} s<0 \qquad (3.25)$$

Так как левая часть этого равенства является функцией аналитической при $\operatorname{Re} s>-1+n^{-1}$, а правая — функцией аналитической при $\operatorname{Re} s<0$ и они совпадают в полосе $-1+n^{-1}<\operatorname{Re} s<0$, то они являются аналитическим продолжением друг друга. Таким образом, каждая часть равенства (3.25) представляет собой некоторую функцию $E(s)$, аналитическую на всей плоскости s. Для того чтобы определить эту функцию, надо знать ее асимптотическое поведение при $|s|\to\infty$, т. е. знать асимптотическое поведение функций $g_+\check{}$, D_+, $H_-\check{}$, D_- при $|s|\to\infty$ в соответствующих областях.

Асимптотическое поведение функций $g_+\check{}(s)$ и $H_-\check{}(s)$ при $|s|\to\infty$ определяется поведением $g(\rho)$ и $H(\rho)$ в окрестности $\rho=1$. Чтобы выяснить это поведение, введем локальные координаты

$$\xi=\rho_1\sin\varphi_1=\sqrt{n}u/\gamma_0, \qquad \eta=\rho_1\cos\varphi_1=v/\gamma_0-1$$

в которых уравнение (3.14) и граничные условия (3.18) соответственно примут вид

$$n\Phi_{,\xi\xi}+\Phi_{,\eta\eta}+(n-1)n[\xi^2+n(\eta+1)]^{-1}[\xi^2\Phi_{,\xi\xi}+2\xi(\eta+1)\Phi_{,\eta\xi}+(\eta+1)^2\Phi_{,\eta\eta}]=0 \qquad (3.26)$$

$$\Phi_{,\eta}(0,\ \eta)=0, \quad \eta>0; \qquad \Phi_{,\xi}(0,\ \eta)=-\sqrt{n}, \quad \eta<0 \qquad (3.27)$$

Так как окрестность точки $\rho=1$ в плоскости годографа соответствует окрестности точки $(-1,\ 0)'$ в физической плоскости, то с учетом (3.13) функция $\Phi(\xi,\ \eta)$ должна быть ограничена и иметь ограниченные производные при $\rho_1\ll1$. Поэтому будем разыскивать разложение функции $\Phi(\rho_1,\ \varphi_1)$ при $\rho_1\ll1$ в виде

$$\Phi(\rho_1,\varphi_1)\sim\text{const}+f_2(\varphi_1)\rho_1+f_3(\varphi_1)\rho_1^{3/2}+O(\rho_1^2) \qquad (3.28)$$

Подставляя (3.28) в (3.26), (3.27) и приравнивая члены при одинаковых степенях ρ_1, получим

$$f_k''+(k/2)^2f_k=0 \quad (k=2,\ 3\ldots), \qquad f_2(0)=f_3(0)=f_3'(\pi)=0; \quad f_2(\pi)=-\sqrt{n}$$

Отсюда находим искомое разложение для $\Phi(\rho_1, \varphi_1)$:

$$\Phi(\rho_1, \varphi_1) \underset{\rho_1 \ll 1}{\sim} C_0 + \sqrt{n}\,\rho_1 \sin\varphi_1 + C_1 \rho_1^{3/2} \sin(3\varphi_1/2) + O(\rho_1^2)$$

где C_0 и C_1 — некоторые константы. Тогда, учитывая (3.20):

$$g(\rho) \underset{\rho\to 1^-}{\sim} \mathrm{const}\sqrt{1-\rho}; \qquad H(\rho) \underset{\rho\to 1^+}{\sim} \mathrm{const}$$

и, следовательно, [7]:

$$g_+^\vee \sim O(s^{-3/2}),\ |s|\to\infty,\ \mathrm{Re}\, s > -1+n^{-1};\ H_-^\vee(s) \sim O(s^{-1}),\ |s|\to\infty,\ \mathrm{Re}\, s<0 \tag{3.29}$$

С другой стороны [5]:

$$D_+ \sim O(\sqrt{s}),\ |s|\to\infty,\ \mathrm{Re}\, s>-1+n^{-1};\ D_- \sim O(\sqrt{s}),\ |s|\to\infty,\ \mathrm{Re}\, s<0 \tag{3.30}$$

Учитывая (3.29), (3.30), из (3.25) получаем, что $E(s)\to 0$ при $|s|\to\infty$, откуда, по теореме Лиувилля, $E(s)\equiv 0$. Теперь, используя (3.21), (3.25) и представление для $h^\vee(s)$, можем найти

$$A_*(s) = -D_-(n, -1)\{(s+1)D_-(n, s)\,\omega(s)\sin[\omega(s)\pi/2]\}^{-1}$$

$$\Phi(\rho, \varphi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{D_-(n, -1)\cos[\omega(s)(\varphi-\pi/2)]\,ds}{(s+1)D_-(n, s)\,\omega(s)\sin[\omega(s)\pi/2]}, \qquad -1+n^{-1}<\sigma<0 \tag{3.31}$$

Для вычисления последнего интеграла применим теорию вычетов. При $\rho<1$ контур интегрирования замыкается полукругом радиуса $R\to\infty$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s<-1+n^{-1}$, а при $\rho>1$ — в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s>0$. Как следует из (3.23), (3.24), подынтегральное выражение в (3.31) при $n\neq 1, \infty$ имеет в точках $s=0,\ -1+n^{-1},\ -1,\ c_m,\ b_m$, где $c_m=\gamma_{2m}^-/a_{2m}$, $b_m=\gamma_{2m-1}^+/a_{2m-1}$, $\omega(c_m)=2m$, $\omega(b_m)=2m-1$, простые полюса. Следовательно

$$\Phi(\rho, \varphi) = \begin{cases} -C_0\rho^{1-n^{-1}} - \rho\sin\varphi - \sum\limits_{m=1}^{\infty} C_m \rho^{-c_m}\cos 2m\varphi, & \rho<1 \\ -B_0 - \sum\limits_{m=1}^{\infty} B_m \rho^{-b_m}\sin(2m-1)\varphi, & \rho>1 \end{cases} \tag{3.32}$$

$$C_0 = 2nD_-(n, -1)\,[\pi(n-1)D_-(n, -1+n^{-1})]^{-1},$$

$$B_0 = 2D_-(n, -1)\,[\pi(n-1)D_-(n, 0)]^{-1}$$

$$C_m = D_-(n, -1)\,[\pi m(1+c_m)D_-(n, c_m)\,\omega'(c_m)]^{-1} \quad (m=1, 2\ldots)$$

$$B_m = 2^{\sqrt{n}\, b_m} D_-(n, -1)\,[\sqrt{n}(1+b_m)]^{-1} T_{2m}^+(b_m) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{\infty} T_{2k}^+(b_m)/T_{2k-1}^+(b_m)$$

Теперь можно определить константу γ_0, воспользовавшись соотношением (1.5)

$$\int\limits_{-a}^{0} q(x)\,dx = K_0 a\gamma_0^\mu \int\limits_{-1}^{0} \rho^\mu\,dx_* = P/2$$

Учитывая, что $x_*=H(\rho)$, окончательно получим

$$\gamma_0 = \frac{1}{K_*^n}\left(\frac{P}{2K_0 a}\right)^n, \qquad K_* = \int\limits_{1}^{\infty} \rho^\mu H'(\rho)\,d\rho \tag{3.33}$$

Величина K_* вычисляется при помощи второй из формул (3.32) и может быть представлена в форме

$$K_* = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b_m+1)(2m-1)}{(b_m+1-\mu)} B_m$$

Из (3.32) и (3.15) легко получить, что при $y_*=0$ для $|x_*|\ll 1$ справедливо

$$x_* \sim -B_1 \rho^{-(\mu+1)},\quad \rho \ll 1 \qquad (3.34)$$

Так как контактные напряжения выражаются по формуле $q_*=\rho^\mu \gamma_0^\mu$, то, учитывая (3.23) и (3.24), получим, что в угле штампа главный член асимптотики контактных напряжений имеет вид

$$q_* \sim (2K_*)^{-1} B_1^{(n+1)^{-1}} \quad |x_*|^{-(n+1)^{-1}},\ |x_*| \ll 1.$$

Отсюда получаем выражение для коэффициента интенсивности контактных напряжений в угле штампа

$$K_u = (2K_*)^{-1} B_1^{(n+1)^{-1}} \quad [P/(K_0 a)].$$

Из (3.12) и (3.32) можно получить связь между перемещением штампа и приложенной к нему силой P. В безразмерных переменных она имеет вид

$$\delta_* = B_0 \gamma_0 = B_0 K_*^{-n} [P/(2K_0 a)]^n$$

4. Сравнение решений, полученных обоими методами. Вернемся к системе координат, связанных с центром штампа. В силу симметрии задачи рассмотрим область $x>0$. В безразмерных переменных основные характеристики решения, полученные как по методу обобщенной суперпозиции, так и путем точного решения задачи, можно представить в единой форме

$$q_*(x_*) = [P/(aK_0)]\, T(x_*),\quad K_u = \varkappa_u [P/(aK_0)]$$
$$\delta_* = K_\delta (n-1)^{-1} [P/(2aK_0)]^n$$

	$T(x_*)$	$\varkappa_u$	K_δ
Метод обобщенной суперпозиции	$K_a(1-x_*^2)^{-1/2\mu}$	$K_a/2^{1/2\mu}$	$2K_a\pi[\sin(\pi\mu/2)]^{-1}$
Точное решение	$(2K_*)^{-1}\rho^\mu,\ x_*=H(\rho)$	$(2K_*)^{-1} B_1^{(n+1)^{-1}}$	B_0/K_*^n

Функции $T(x_*)$ сравнивались в доверительном интервале [0; 0, 9] и находилась абсолютная величина относительной ошибки

$$\varepsilon = \max_{x\in[0;0,9]} |[T^t(x_*) - T^a(x_*)]/T^t(x_*)|\, 100\%$$

Индекс a обозначает решение по методу обобщенной суперпозиции, а t — точное решение. Несколько характерных графиков приведены на фиг. 4, где кривые построены для трех значений n: *1* — 100, *2* — 5, *3* — 1,5. В целях большей наглядности на график выведены значения функции $q_0(x_*) = (1-x_*)^{(n+1)^{-1}} q(x_*)$. Точному решению соответствует непрерывная линия, а решению по методу обобщенной суперпозиции — пунктирная. Остальные результаты расчетов приведены ниже:

n	1	1,5	2	3	5	10	20	100
$\varkappa_u^t$	0,225	0,272	0,304	0,345	0,388	0,430	0,456	0,487
K_δ^t	0,637	0,716	0,798	0,952	1,231	1,793	2,610	6,000
$\varkappa_u^a$	0,225	0,307	0,351	0,398	0,437	0,468	0,483	0,497
K_δ^a	2,000	4,696	13,75	176,4	$7{,}8\cdot 10^7$	$7{,}7\cdot 10^{12}$	$8{,}2\cdot 10^{32}$	$\approx 200^{100}$
ε	0	7,1	7,5	6,4	5,1	3,1	1,6	0,25

Анализ численных результатов показывает, что в доверительном интервале распределение контактных напряжений, полученных по методу обобщенной суперпозиции, достаточно близко к точному; максимальное отличие наблюдается в окрестности значений $n=2$ и не превышает 10%.

Но коэффициент K_δ отличается довольно сильно, и если в точном решении [5] $K_\delta(n) \sim O(\sqrt{n})$, $n \to \infty$, то в решении по методу обобщенной суперпозиции $K_\delta(n) \sim (2n)^n$, $n \to \infty$.

В заключение скажем несколько слов о численной реализации точного решения. Коэффициенты B_m вычислялись по программе с двойной точностью с погрешностью 10^{-7}. В бесконечных суммах бралось столько членов ряда, чтобы абсолютная величина суммы коэффициентов при отброшенных членах не превосходила 0,5% от общей суммы коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала.– Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1959, т. 12, № 2, с. 77–105.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.
3. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. Ч. 2. Киев: Наук. думка, 1976. 292 с.
4. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
5. *Amazigo J. C.* Fully plastic crack in an infinite body under anti – plane shear.– Intern. J. Solids and Struct., 1974, v. 10, No. 9, p. 1003–1015.
6. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
7. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962. 127 с.

Москва

Поступила в редакцию
31.I.1985