МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРА С ШАРОВОЙ ПОЛОСТЬЮ

СОЛЯНИК-КРАССА К. В.

Излагается решение осесимметричной задачи теории упругости о распределении напряжений у шаровой полости в круговом цилиндре при соизмеримых радиусах полости и цилиндра. Предполагается произвольное осесимметричное распределение сил на цилиндрической поверхности. Функции напряжений представлены в форме суммы двух рядов, составленных из решений уравнений равновесия в цилиндрических и сферических координатах. Определение коэффициентов рядов сводится к бесконечной системе уравнений. Приводятся результаты численных расчетов напряжений в двух частных случаях отношений радиусов полости и цилиндра 0,25 и 0,5.

1. В публикуемой работе решение Линга [1, 2] задачи о распределении напряжений в цилиндрическом скручиваемом или растягиваемом стержне со сферической полостью конечных размеров распространяется на общий случай загружения боковой поверхности цилиндра осесимметричной нагрузкой. Перемещения и напряжения в рассматриваемой области определяются формулами [3]

$$\sigma_r=\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}-\Omega\right),\qquad \sigma_z=-\frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$$
$$\sigma_\theta=\frac{1}{c^2}\left[\frac{2(1+\nu)}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\Omega\right],\qquad \tau_{rz}=\frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\tag{1.1}$$

в которых функции Φ и Ω имеют значения

$$\Phi=\psi+\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta},\qquad \Omega=\frac{1}{\rho^2}[\Phi+2(1-\nu)\varphi]-\frac{2}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\tag{1.2}$$

а $\psi(\rho,\zeta)$ и $\varphi(\rho,\zeta)$ — функции напряжений, удовлетворяющие дифференциальному уравнению второго порядка

$$\nabla^2\psi=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\psi=0,\qquad \nabla^2\varphi=0\tag{1.3}$$

$\rho=r/c$ и $\zeta=z/c$ — безразмерные цилиндрические координаты с осью z, совмещенной с осью стержня, a — радиус цилиндра, c — радиус полости (фиг.), ν — коэффициент Пуассона.

В соответствии с краевыми условиями для функций Φ и Ω должны выполняться равенства

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}=c^2p_z,\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}=\Omega+c^2p_r\tag{1.4}$$

при $\rho=b=a/c$ на боковой поверхности цилиндра и равенства

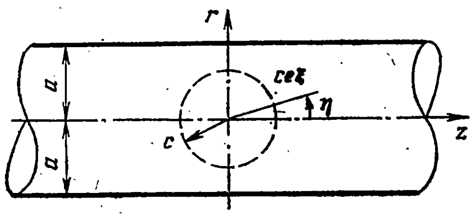
$$\Phi=0,\qquad \partial\Phi/\partial\xi=\rho\Omega\partial\rho/\partial\xi\tag{1.5}$$

при $\xi=0$ на поверхности сферической полости (свободной от сил); ξ и η — сферические координаты, связанные с цилиндрическими координатами ρ и ζ формулами $\rho=e^\xi\sin\eta$, $\zeta=e^\xi\cos\eta$.

Запишем функции Φ и Ω в форме рядов

$$\Phi=\Phi^*+\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n},\qquad \Omega=\Omega^*+\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_{2n}$$

Здесь Φ^* и Ω^* — решения задачи о нагружении цилиндра без полости силами, распределенными по боковой поверхности, а также, как частный случай, растягивающими или сжимающими силами, приложенными к торцам, удаленным в бесконечность. Значения Φ^* и Ω^* могут быть указаны по полученным в большом числе решениям задач о различных нагружениях цилиндров (см. библиографию в [4, гл. 7 и 5]) или установлены заново решением осесимметричной задачи для цилиндров при краевых условиях (4).



2. Используя решения уравнений (2) в цилиндрических и сферических координатах [6], составим функции φ_{2n}, Φ_{2n} и Ω_{2n} в виде ($y=\cos\eta$):

$$\varphi_{2n}=B_n\exp[-(2n+1)\xi]P'_{2n+1}(y)\sin^2\eta+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\rho\int_0^\infty\lambda^{2n}D_n(\lambda)I_1(\lambda\rho)\cos\lambda\zeta\,d\lambda$$

$$\Phi_{2n}=[A_nP'_{2n+1}(y)+B_nP''_{2n+2}(y)\sin^2\eta]\exp[-(2n+1)\xi]\sin^2\eta+$$
$$+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\rho\int_0^\infty\lambda^{2n}[C_n(\lambda)I_1(\lambda\rho)-D_n(\lambda)\lambda\rho I_0(\lambda\rho)]\cos\lambda\zeta\,d\lambda \tag{2.1}$$

$$\Omega_{2n}=\Phi_{2n}\rho^{-2}-2B_n[(1+\nu)P'_{2n+1}(y)-P''_{2n+2}(y)\sin^2\eta]\exp[-(2n+3)\xi]+$$
$$+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{2}{\rho}\int_0^\infty\lambda^{2n}D_n(\lambda)[(1-\nu)I_1(\lambda\rho)-\lambda\rho I_0(\lambda\rho)]\cos\lambda\zeta\,d\lambda$$

Последний член каждого выражения представляет собой производную по ζ соответствующего решения в цилиндрических координатах (которое можно получить положив $n=0$), взятую $2n$ раз и деленную на $(2n)!$.

Форма (2.1) функций напряжений может быть применена к случаям нагружения цилиндров силами, симметричными относительно плоскости $\zeta=0$, которыми и ограничимся для упрощения дальнейших записей. Переход к нагрузкам, асимметричным по отношению к плоскости $\zeta=0$, не представляет принципиальных затруднений и требует только повышения на единицу порядка полиномов Лежандра $P_n(\cos\eta)$, использованных при составлении первых членов функций (2.1), и замены в подынтегральных выражениях $\cos\lambda\zeta$ на $\sin\lambda\zeta$.

Так как контурные условия (1.4) на цилиндрической поверхности выполнены выбором функций Φ^* и Ω^*, то для всех членов рядов (1.7) должно быть при $\rho=b$, $n=0, 1, 2, \ldots$

$$\Phi_{2n}=0,\qquad \partial\Phi_{2n}/\partial\rho=\rho\Omega_{2n} \tag{2.2}$$

Производная $\partial\Phi_{2n}/\partial\rho$ после выполнения некоторых группировок имеет форму

$$\partial\Phi_{2n}/\partial\rho=[2A_nP'_{2n+1}(y)-(A_n-4B_n)P''_{2n+2}(y)\sin^2\eta-$$
$$-B_nP'''_{2n+3}(y)\sin^4\eta]\exp[-(2n+1)\xi]\sin\eta+$$
$$+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\rho\int_0^\infty\lambda^{2n+1}\{C_n(\lambda)I_0(\lambda\rho)-D_n(\lambda)[2I_0(\lambda\rho)+\lambda\rho I_1(\lambda\rho)]\}\cos\lambda\zeta\,d\lambda \tag{2.3}$$

Подставляя это значение производной и значения (2.1) функций Φ_{2n} и Ω_{2n} в условия (2.2), обозначив отношение $b=a/c$, получаем два равенства[1]

$$\{[A_n P'_{2n+1}+B_n P''_{2n+2}\sin^2\eta]\exp[-(2n+1)\xi]\sin^2\eta\}_{\rho=b}+$$

$$+\frac{(-1)^n}{(2n)!}b\int\limits_0^\infty \lambda^{2n}[C_n(\lambda)I_1(\lambda b)-D_n(\lambda)\lambda b I_0(\lambda b)]\cos\lambda\zeta\, d\lambda=0$$

$$(\{2[A_n+(1+\nu)B_n]P'_{2n+1}-(A_n-2B_n)P''_{2n+2}\sin^2\eta-$$

$$-B_n P'''_{2n+3}\sin^4\eta\}\exp[-(2n+3)\xi)_{\rho=b}+ \tag{2.4}$$

$$+\frac{(-1)^n}{(2n)!}b\int\limits_0^\infty \lambda^{2n}\{C_n(\lambda)\lambda b I_0(\lambda b)-D_n(\lambda)[(\lambda b)^2+2(1-\nu)I_1(\lambda b)\}\cos\lambda\zeta\, d\lambda=0$$

из которых в соответствии с косинус-преобразованием Фурье следуют два уравнения для определения функций $C_n(\lambda)$ и $D_n(\lambda)$:

$$C_n(\lambda)I_1(\lambda b)-D_n(\lambda)\lambda b I_0(\lambda b)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{\pi\lambda^{2n}}b\int\limits_0^\infty\left[A_n P'_{2n+1}+B_n\left(\frac{b}{e^\xi}\right)^2 P''_{2n+2}\right]\exp[-(2n+3)\xi]\cos\lambda\zeta\, d\zeta$$

$$C_n(\lambda)\lambda b I_0(\lambda b)-D_n(\lambda)[(\lambda b)^2+2(1-\nu)]I_1(\lambda b)= \tag{2.5}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{\pi\lambda^{2n}}b\int\limits_0^\infty\{2[A_n+(1+\nu)B_n]P'_{2n+1}-(A_n-2B_n)\left(\frac{b}{e^\xi}\right)^2 P''_{2n+2}-$$

$$-B_n\left(\frac{b}{e^\xi}\right)^4 P'''_{2n+3}\Big]\exp[-(2n+3)\xi]\cos\lambda\zeta\, d\zeta$$

Воспользовавшись формулами (см. [7, с. 167]):

$$\int\limits_0^\infty \exp[-(2n+2m+1)\xi]P^m_{2n+m}\cos\lambda\zeta\, d\zeta=$$

$$=(-1)^n\frac{(2m-1)!!}{(2n)!}\lambda^{2n}\int\limits_0^\infty \exp[-(2m+1)\xi]P_1'(y)\cos\lambda\zeta\, d\zeta \tag{2.6}$$

$$\int\limits_0^\infty\frac{\cos ut\, dt}{(a^2+t^2)^{m+1/2}}=\sqrt{\pi}\left(\frac{u}{2a}\right)^m\frac{K_m(au)}{\Gamma(m+1/2)}=\left(\frac{u}{a}\right)^m\frac{K_m(au)}{(2m-1)!!}$$

и понизив на основании равенства

$$\lambda b K_{m+1}(\lambda b)=2mK_m(\lambda b)+\lambda b K_{m-1}(\lambda b) \tag{2.7}$$

порядок функций Макдональда $K_2(\lambda b)$ и $K_3(\lambda b)$, получим

$$C_n(\lambda)I_1(\lambda b)-D_n(\lambda)\lambda b I_0(\lambda b)=-2\lambda b/\pi[(A_n+2B_n)K_1(\lambda b)+B_n\lambda b K_0(\lambda b)]$$

$$C_n(\lambda)\lambda b I_0(\lambda b)-D_n(\lambda)[(\lambda b)^2+2(1-\nu)]I_1(\lambda b)= \tag{2.8}$$

$$=2\lambda b/\pi\{(A_n+2B_n)\lambda b K_0(\lambda b)+B_n[(\lambda b)^2+2(1-\nu)]K_1(\lambda b)\}$$

---

[1] Здесь и далее аргумент $y=\cos\eta$ производных полиномов Лежандра опущен в целях некоторого упрощения записей.

Решение этих уравнений имеет вид

$$C_n(\lambda)=2\lambda b\{(A_n+2B_n)D^*(\lambda b)+B_n[(\lambda b)^2+2(1-\nu)][\pi D(\lambda b)]^{-1}$$

$$D_n(\lambda)=2\lambda b[A_n+2B_n+B_nD^*(\lambda b)][\pi D(\lambda b)]^{-1} \tag{2.9}$$

$$D(\lambda b)=(\lambda b)^2I_0^2(\lambda b)-[(\lambda b)^2+2(1-\nu)]I_1^2(\lambda b) \tag{2.10}$$

$$D^*(\lambda b)=(\lambda b)^2I_0(\lambda b)K_0(\lambda b)+[(\lambda b)^2+2(1-\nu)]I_1(\lambda b)K_1(\lambda b)$$

3. Итак, при выполнении равенств (2.9) функции (1.7) удовлетворяют условиям (1.4) на боковой поверхности цилиндра. Для выполнения условий (1.5) на контуре полости в осевом сечении цилиндра преобразуем подынтегральное выражение функций Φ_{2n} и Ω_{2n}, заменив в соответствии с формулами (см. [8, с. 362]):

$$I_0(\lambda\rho)\cos\lambda\zeta=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\lambda e^{\xi})^{2k}}{(2k)!}P_{2k}(y) \tag{3.1}$$

$$I_1(\lambda\rho)\cos\lambda\zeta=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(\lambda e^{\xi})^{2k-1}}{(2k)!}P'_{2k-1}(y)\sin\eta$$

произведения функций Бесселя $I_0(\lambda\rho)$ и $I_1(\lambda\rho)$ на $\cos\lambda\zeta$ бесконечными суммами полиномов Лежандра, меняя порядок интегрирования и суммирования и используя рекуррентную связь

$$(4k+1)P_{2k}(y)=P'_{2k+1}(y)-P'_{2k-1}(y) \tag{3.2}$$

получаем

$$\Phi=\Phi^*+\sin^2\eta\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[A_{k-1}+\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}B_{k-1}\right]\exp[-(2k-1)\xi]-\right.$$

$$-\frac{(2k-3)(2k-2)}{4k-3}B_{k-2}\exp[-(2k-3)\xi]+(-1)^{k-1}\frac{\exp(2k\xi)}{(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\times$$

$$\left.\times\int_0^{\infty}\lambda^{2n+2k-1}\left[C_n(\lambda)-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}D_n(\lambda)-\frac{(\lambda e^{\xi})^2}{4k+1}D_n(\lambda)\right]d\lambda\right\}P'_{2k-1}(y) \tag{3.3}$$

$$\Omega=\Omega^*+\frac{1}{\rho^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_{2(k-1)}-2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1+\nu-\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}\right)B_{k-1}\times\right.$$

$$\times\exp[-(2k+1)\xi]+\frac{(2k-3)(2k-2)}{4k-3}B_{k-2}\exp[-(2k-1)\xi]-$$

$$-(-1)^{k-1}\frac{\exp[2(k-1)\xi]}{(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^{\infty}\lambda^{2n+2k-1}\left[1-\nu-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(\lambda e^{\xi})^2}{4k+1}\right]D_n(\lambda)\right\}P'_{2k-1}(y)$$

Представим известные функции Φ^* и Ω^* также в форме разложений по первым производным полиномов Лежандра

$$\Phi^*=\sin^2\eta\sum_{k=1}^{\infty}\Phi^*_{2(k-1)}P'_{2k-1}(y),\qquad \Omega^*=\sum_{k=1}^{\infty}\Omega^*_{2(k-1)}P_{2k-1}(y) \tag{3.4}$$

Потребовав на основании условий (1.5) равенство нулю коэффициентов при P'_{2k-1} функций (3.3) при $\xi=\xi_0=0$, получим уравнения для определения постоянных A_n и B_n. Соответствующие подстановки, замена функций $C_n(\lambda)$ и $D_n(\lambda)$ значениями (2.9) и некоторые преобразования приводят к бесконечной системе уравнений

$$\beta^*_{k-1}+X_{k-1}+\frac{2k}{4k+1}Y_{k-1}-\frac{2k-2}{4k-3}Y_{k-2}+$$

$$+(-1)^{k-1}\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_{nk-1}X_n+\beta_{nk-1}Y_n)=0$$

$$\delta^*_{k-1}+2\left[\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}-1-\nu\right]\frac{Y_{k-1}}{2k-1}- \tag{3.5}$$

$$-(-1)^{k-1}\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}(\gamma_{nk-1}X_n+\delta_{nk-1}Y_n)=0 \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

$$A_n+2B_n=X_n, \qquad B_n=Y_n/(2n+1)$$

$$\alpha_{nk-1}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}\left[D^*(\lambda b)-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}-\frac{\lambda^2}{4k+1}\right]d\lambda$$

$$\beta_{nk-1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^\infty\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}\Big\{(\lambda b)^2+2(1-\nu)-$$

$$-\left[\frac{(2k-1)2k}{4k-3}+\frac{\lambda^2}{4k+1}\right]D^*(\lambda b)\Big\}d\lambda$$

$$\gamma_{nk-1}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}\Big[(4k-1)D^*(\lambda b)-2(1-\nu)-$$

$$-(2k-1)2k-\frac{4k-1}{4k+1}\lambda^2\Big]d\lambda \tag{3.6}$$

$$\delta_{nk-1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^\infty\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}\Big\{(4k-1)(\lambda b)^2+2(1-\nu)(4k-1)-$$

$$-\left[2(1-\nu)+(2k-1)2k+\frac{4k-1}{4k+1}\lambda^2\right]D^*(\lambda b)\Big\}d\lambda$$

$$\beta^*_{k-1}=\Phi^*_{k-1}, \qquad \delta^*_{k-1}=2k\Phi^*_{k-1}-\Omega^*_{k-1}+\partial\Phi^*_{k-1}/\partial\xi$$

4. Строгое доказательство регулярности системы (3.5) затрудняется сложностью формы ее коэффициентов, включающих разности близких по величине членов. Однако, пользуясь асимптотическими представлениями функций Бесселя, можно показать, что эта система регулярна.

Действительно, после замены $Y_n=\varkappa Y_n'$, по условию регулярности, необходимо выполнение следующих неравенств для сумм абсолютных значений коэффициентов:

$$\Sigma_1=(\overset{0}{\alpha}_{k-1})^{-1}\left[\left(\frac{2k}{4k+1}+\frac{2k-2}{4k-3}\right)\varkappa+\alpha_{k-1}+\varkappa\beta_{k-1}-|\alpha_{k-1,k-1}|\right]<1$$

$$\Sigma_2=(\varkappa\overset{0}{\delta}_{k-1})^{-1}[\gamma_{k-1}+(\delta_{k-1}-|\delta_{k-1,k-1}|)\varkappa]<1 \qquad (k=1,2,3,\ldots) \tag{4.1}$$

$$\overset{0}{\alpha}_{k-1}=1+\frac{2}{\pi(2k)!}\alpha_{k-1,k-1} \tag{4.2}$$

$$\delta_{k-1}^{0}=\frac{2}{2k-1}\left[\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}-1-\nu\right]-\frac{2}{\pi(2k)!}\delta_{k-1,k-1}\Bigg]$$

$$\alpha_{k-1}=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{nk-1}|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[j_{2k}^{*}-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}j_{2k}-\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}j_{2k+2}\right]$$

$$\beta_{k-1}=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_{nk-1}|=\frac{2}{\pi}\Big[(2k+1)(2k+2)b^{2}h_{2k+2}+$$

$$+2(1-\nu)h_{2k}-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}h_{2k}^{*}-\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}h_{2k+2}^{*}$$

$$\gamma_{k-1}=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_{nk-1}|=\frac{2(4k-1)}{\pi}\Big[j_{2k}^{*}-\frac{(2k-1)2k+2(1-\nu)}{4k-1}j_{2k}-$$

$$-\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}j_{2k+2}\Big]$$

$$\delta_{k-1}=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\delta_{nk-1}|=\frac{2(4k-1)}{\pi}\Big[(2k+1)(2k+2)b^{2}h_{2k+2}+$$

$$+2(1-\nu)h_{2k}-\frac{(2k-1)2k+2(1-\nu)}{4k-1}h_{2k}^{*}-\frac{(2k+1)(2k+2)}{4k+1}h_{2k+2}^{*}\Big]$$

Через j_{2k}, j_{2k}^{*}, h_{2k} и h_{2k}^{*} обозначены интегралы

$$j_{2k}=\frac{1}{(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}d\lambda=\frac{1}{(2k)!\,b^{2k+1}}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{2k}}{D(\lambda_1)}\operatorname{ch}\frac{\lambda_1}{b}d\lambda_1 \quad (4.3)$$

$$j_{2k}^{*}=\frac{1}{(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}D^{*}(\lambda b)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{(2k)!\,b^{2k+1}}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{2k}}{D(\lambda_1)}D^{*}(\lambda_1)\operatorname{ch}\frac{\lambda_1}{b}d\lambda_1$$

$$h_{2k}=\frac{1}{(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}d\lambda=\frac{1}{(2k)!\,b^{2k}}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{2k-1}}{D(\lambda_1)}\operatorname{sh}\frac{\lambda_1}{b}d\lambda_1$$

$$h_{2k}^{*}=\frac{1}{(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{2(n+k)}}{D(\lambda b)}D^{*}(\lambda b)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{(2k)!\,b^{2k}}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{2k-1}}{D(\lambda_1)}D^{*}(\lambda_1)\operatorname{sh}\frac{\lambda_1}{b}d\lambda_1$$

Асимптотические представления сумм (4.2) при удержании первых трех членов имеют вид

$$\alpha_{k-1}'=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{nk-1}'|=2\left\{(2k+1)bc_{2k+1}+\left(\nu_1-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}\right)c_{2k}+\right.$$

$$+\left(\nu_2-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}\nu_1\right)\frac{c_{2k-1}}{2bk}-\frac{2k+1}{4k+1}\left[(2k+2)c_{2k+2}+\frac{\nu_1}{b}c_{2k+1}\right]\Bigg\} \tag{4.4}$$

$$\beta'_{k-1}=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\beta'_{nk-1}|=2\Bigg\{(2k+1)b^2s_{2k+1}+$$

$$+\left(\nu_1-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}\right)bs_{2k}+\left[2(1-\nu)-\frac{(2k-1)2k}{4k-3}\nu_1\right]\frac{s_{2k-1}}{2k}-$$

$$-\frac{2k+1}{4k+1}\left[(2k+2)bs_{2k+2}+\nu_1 s_{2k+1}+\frac{\nu_2 s_{2k}}{(2k+1)b}\right]\Bigg\}$$

$$\gamma'_{k-1}=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma'_{nk-1}|=2(4k-1)\Bigg\{(2k+1)bc_{2k+1}+$$

$$+\left[\nu_1-\frac{(2k-1)2k+2(1-\nu)}{4k-1}\right]c_{2k}+\left[\nu_2-\frac{(2k-1)2k+2(1-\nu)}{4k-1}\nu_1\right]\frac{c_{2k-1}}{2bk}-$$

$$-\frac{2k+1}{4k+1}\left[(2k+2)c_{2k+2}+\frac{\nu_1}{b}c_{2k+1}\right]\Bigg\}$$

$$\delta'_{k-1}=\frac{2}{\pi(2k)!}\sum_{n=0}^{\infty}|\delta'_{nk-1}|=2(4k-1)\Bigg\{(2k+1)b^2s_{2k+1}+$$

$$+\left[\nu_1-\frac{(2k-1)2k+2(1-\nu)}{4k-1}\right]bs_{2k+1}+$$

$$+\left[2(1-\nu)-\frac{(2k-1)2k+2(1-\nu)}{4k-1}\nu_1\right]\frac{s_{2k-1}}{2k}-$$

$$-\frac{2k+1}{4k+1}\left[(2k+2)bs_{2k+2}+\nu_1 s_{2k+1}+\frac{\nu_2 s_{2k}}{(2k+1)b}\right]\Bigg\}$$

$$\nu_1=(7-8\nu)/4,\qquad \nu_2=(69-208\nu+128\nu^2)/32 \tag{4.5}$$

$$c_{2k+m}=j'_{2k+m}(2b-1)+j'_{2k+m}(2b+1),\qquad s_{2k+m}=j'_{2k+m}(2b-1)-j'_{2k+m}(2b+1)$$

а $j'_{2k+m}(2b-1)$ и $j_{2k+m}(2b+1)$, после соответствующего суммирования и интегрирования членов асимптотических представлений, определены равенствами (λ_0 — некоторое значение $\lambda_1=\lambda b$):

$$j'_{2k+m}(2b-1)=\frac{1}{(2k+m)!}\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{2k+m}}{\exp[(2b-1)\lambda]}d\lambda=\frac{\exp[-\lambda_0(2b-1)]}{(2b-1)^{2k+m+1}}\times$$

$$\times\left[1+\frac{\lambda_0(2b-1)}{1!}+\frac{\lambda_0^2(2b-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda_0^{2k+m}(2b-1)^{2k+m}}{(2k+m)!}\right]$$

$$j'_{2k+m}(2b+1)=\frac{1}{(2k+m)!}\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{2k+m}}{\exp[(2b+1)\lambda]}d\lambda=\frac{\exp[-\lambda_0(2b+1)]}{(2b+1)^{2k+m+1}}\times \tag{4.6}$$

$$\times\left[1+\frac{\lambda_0(2b+1)}{1!}+\frac{\lambda_0^2(2b+1)^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda_0^{2k+m}(2b+1)^{2k+m}}{(2k+m)!}\right]$$

Как следует из (4.4) и (4.1), при $\lambda_0=0$ с увеличением k до бесконечности сумма $\sum_1$ увеличивается до значения параметра $\varkappa$, а сумма $\sum_2$ уменьшается до нуля. Задача сводится к определению отношения $b=a/c$, при котором $\varkappa$ меньше единицы по условию выполнения первого неравенства (4.4), а сумма $\sum_2$ не превосходит $\varkappa$ при малых k по условию

Таблица 1

k	α_{k-1}	β_{k-1}	γ_{k-1}	δ_{k-1}	Σ_1	Σ_2
1	0,1771	0,0610	0,5928	1,4277	0,5666	0,8621
2	0,0394	0,0750	0,4874	0,8450	0,9160	0,9875
3	0,0124	0,0210	0,2077	0,3418	0,9236	0,4554
4	0,0035	0,0056	0,0721	0,1181	0,9286	0,1436

Таблица 2

$b=\frac{a}{c}$	σ/p	r/a						
		0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
		Продольное растяжение						
	σ_r	0	0,1796	0,1022	0,0698	0,0359	0,0235	0,0160
∞	σ_θ	0,1361	−0,0045	−0,0085	−0,0059	−0,0039	−0,0027	−0,0019
	σ_z	2,0455	1,1751	1,0540	1,0229	1,0118	1,0069	1,0044
	σ_r	0	0,1914	0,1026	0,0514	0,0238	0,0084	0
4	σ_θ	0,1335	−0,0173	−0,0213	−0,0198	−0,0201	−0,0221	−0,0253
	σ_z	2,1632	1,2022	1,0708	1,0367	1,0213	1,0079	0,9906
	σ_r	—	—	0	0,2454	0,1591	0,0677	0
2	σ_θ	—	—	0,0986	−0,1002	−0,1550	−0,1878	−0,2209
	σ_z	—	—	2,8443	1,6834	1,3457	1,1511	0,9847
		Поперечное сжатие						
	σ_r	0	−0,5242	−0,7727	−0,8774	−0,9270	−0,9533	−0,9839
	σ_θ	−1,3636	−1,1526	−1,0710	−1,0379	−1,0224	−1,0143	−1,0097
	σ_z	0,5455	0,0269	−0,0085	−0,0091	−0,0067	−0,0048	−0,0035
	σ_r	0	−0,5108	−0,7802	−0,8968	−0,9538	−0,9848	1
4	σ_θ	−1,3932	−1,1887	−1,1035	−1,0705	−1,0575	−1,0541	−1,0565
	σ_z	0,6971	0,0480	−0,0009	−0,0067	−0,0129	−0,0288	−0,0585
	σ_r	—	—	0	−0,2703	−0,6233	−0,8568	1
	σ_θ	—	—	−1,5836	−1,5549	−1,5049	−1,4964	−1,5242
	σ_z	—	—	1,3790	0,3817	0,1258	0,1508	−0,3939

выполнения второго неравенства (4.4), т. е. к численному подсчету $\sum_2$ для конечного числа первых значений k.

В случае $\nu=0{,}3$ и $b=1{,}55$ результаты подсчета приведены в табл. 1. Параметр $\varkappa$ определен по условию $(\sum_2)_{k=2}=\varkappa$ и имеет значение $\varkappa=0{,}9876$. Подсчеты выполнены в пределах $0<\lambda_1<\lambda_0=10$ по равенствам (4.2) и (4.3) с применением численного интегрирования по формуле Симпсона и по равенствам (4.4) и (4.6) при $\lambda_1>\lambda_0$. Таким образом, если отношение диаметров цилиндра и полости $b>1{,}55$, система (3.5) регулярна. При $b=1{,}5$ и $b=1{,}6$ значения параметра $\varkappa$ равны 1,1363 и 0,8104 соответственно.

Выражения для перемещений и напряжений в рассматриваемой задаче сложны, поэтому ограничимся приведением только значений напряжений

$$\sigma_r=\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho}-\Omega^*\right)+\frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\{[A_n+2(1+\nu)B_n]P'_{2n+1}-$$

$$-(A_n-B_n)P''_{2n+2}\sin^2\eta-B_nP'''_{2n+3}\sin^4\eta\}\exp[-(2n+3)\xi]+$$

$$+\frac{(-1)^n}{(2n)!\,\rho}\int_0^\infty\lambda^{2n}\{C_n(\lambda)[\lambda\rho I_0(\lambda\rho)-I_1(\lambda\rho)]-$$

$$-D_n(\lambda)[2(1-\nu)I_1(\lambda\rho)-\lambda\rho I_0(\lambda\rho)+(\lambda\rho)^2I_1(\lambda\rho)]\}\cos\lambda\zeta\,d\lambda\Big)$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{c^2}\left[2(1+\nu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi^*}{\partial\rho}+\Omega^*\right]+\frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\{[A_n+2(1+\nu)B_n]P'_{2n+1}+$$

$$+(1-2\nu)^B P''_{2n+2}\sin^2\eta]\}\exp[-(2n+3)\xi]+\frac{(-1)^n}{(2n)!\rho}\int_0^\infty \lambda^{2n}\{C_n(\lambda)I_1(\lambda\rho)+$$

$$+D_n(\lambda)[2(1-\nu)I_1(\lambda\rho)-(1-2\nu)\lambda\rho I_0(\lambda\rho)]\}\cos\lambda\zeta\, d\lambda\Bigg) \quad (4.7)$$

$$\sigma_z=-\frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial\Phi^*}{\partial\rho}-\frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg([2A_nP'_{2n+1}-(A_n-4B_n)P''_{2n+2}\sin^2\eta+$$

$$+B_nP'''_{2n+3}\sin^4\eta]\exp[-(2n+3)\xi]+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\infty \lambda^{2n+1}\{C_n(\lambda)I_0(\lambda\rho)-$$

$$-D_n(\lambda)[2I_0(\lambda\rho)+\lambda\rho I_1(\lambda\rho)]\}\cos\lambda\zeta\, d\lambda\Bigg)$$

$$\tau_{rz}=\frac{1}{c^2\rho}\frac{\partial\Phi^*}{\partial\zeta}-\frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{(2n+1)[A_nP'_{2n+2}+B_nP''_{2n+3}\sin^2\eta]\times$$

$$\times\exp[-(2n+3)\xi]+\frac{1}{(2n)!}\int_0^\infty \lambda^{2n+1}[C_n(\lambda)I_1(\lambda\rho)-\lambda\rho D_n(\lambda)I_0(\lambda\rho)]\sin\lambda\zeta\, d\lambda\Bigg\}$$

Приведем значения функций φ^*, Φ^* и Ω^* в двух случаях нагружения цилиндра.

Растяжение вдоль оси силами $P=p\pi a^2$:

$$\varphi^*=\frac{P}{4(1+\nu)\pi}\left(\frac{\rho}{b}\right)^2,\quad \Phi^*=-\frac{P}{2\pi}\left(\frac{\rho}{b}\right)^2,\quad \Omega^*=-\frac{P}{\pi b^2}$$

и поэтому свободные члены уравнений (3.5) ($k=2, 3, 4, \ldots$) $\beta_0=-{}^1/_2pc^2$, $\delta_0=-pc^2$, $\beta_{k-1}=\delta_{k-1}=0$.

Равномерное обжатие цилиндра радиальными силами p:

$$\varphi^*=-p(c\rho)^2/[2(1+\nu)],\quad \Phi^*=0,\quad \Omega^*=pc^2$$

следовательно $\beta_0=0$, $\delta_0=pc^2$, $\beta_{k-1}=\delta_{k-1}=0$ при $k=2, 3, 4, \ldots$.

В табл. 2 приведены результаты подсчета напряжений в указанных случаях нагружения цилиндра в сечении $z=0$ (наиболее ослабленном полостью) для полостей, радиус которых составляет одну четвертую ($b=4$) и половину ($b=2$) радиуса цилиндра, и указаны напряжения у полости в бесконечной среде ($b=\infty$). Расчеты выполнены при коэффициенте Пуассона $\nu=0{,}3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ling Chin-Bing.* Torsion of a circular cylinder havinga spherical cavity.— Quart. Appl. Math., 1952, v. 10, No. 2, p. 49–156.
2. *Ling Chin-Bing.* Stresses in a circular cylinder having a spherical cavity under tension.— Quart. Appl. Math., 1956, v. 13, No. 4, p. 381–391.
3. *Солянин-Красса К. В.* К решению осесимметричной задачи теории упругости.— Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 3, с. 481–484.
4. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
5. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высш. шк., 1975. 526 с.
6. *Солянин-Красса К. В.* Решение осесимметричной задачи в сферических координатах.— Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 178, с. 133–149.
7. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
8. *McRobert T. M.* Spherical harmonics. L.: Methuen, 1947. 372 p.

Ленинград

Поступила в редакцию 17.X.1984