МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3.01

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ

МИРОНЕНКО Н. И.

Рассматривается напряженное (симметричное относительно обеих осей) состояние полосы с конечным числом круговых отверстий, центры которых расположены на поперечной оси полосы. Предлагается единый подход к решению всех основных задач для полосы, что позволяет получить потенциалы Колосова – Мусхелишвили для этих задач в одном и том же виде. Последнее обстоятельство существенно при реализации задач на ЭВМ.

Частным случаем одной из задач для полосы является некоторая периодическая задача для плоскости с бесконечным рядом круговых отверстий (в основном периоде содержится конечное число отверстий).

Напряженное состояние полосы с двумя одинаковыми круговыми отверстиями, центры которых расположены на поперечной оси полосы, изучалось ранее (при заданных напряжениях) в [1, 2]. В [3] рассмотрен чистый изгиб такой же полосы.

1. Свяжем с изучаемой полосой комплексную плоскость $z=x+iy$ (см. фигуру). Пусть полоса ослаблена $2N+1$ круговым отверстием радиуса R_j $(j=\overline{-N,N})$. Центры отверстий определяются параметрами $b_j=ic_j$. Причем в силу симметрии задачи $R_{-j}=R_j$, $c_{-j}=-c_j$, $b_{-j}=-b_j$, $b_0=c_0=0$, $j=\overline{1,N}$.

В направлении оси x полоса растягивается напряжением $N_x=\text{const}$. По граням полосы $y=\pm a$ заданы нормальное $(Y_y=N_y+Y_{ya},\ N_y=\text{const})$ и касательное $(X_y=X_{ya})$ напряжения, удовлетворяющие условиям

$$Y_{ya}(-x)=Y_{ya}(x),\qquad X_{ya}(-x)=-X_{ya}(x) \tag{1.1}$$

$$\int\limits_0^\infty |X_{ya}(x)|\,dx<\infty,\qquad \int\limits_0^\infty |Y_{ya}(x)|\,dx<\infty$$

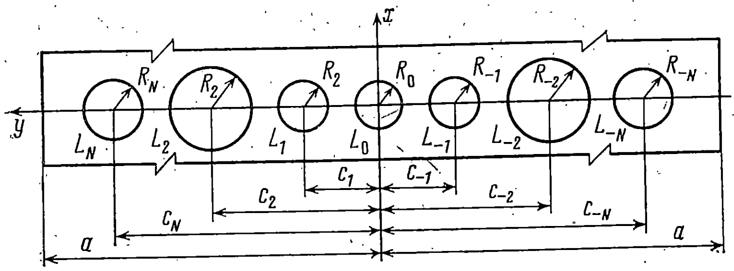
На контурах отверстий заданы напряжения или перемещения, или на одной части контуров – напряжения, а на другой – перемещения.

Введем потенциалы Колосова – Мусхелишвили $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$. Тогда граничные условия можно записать

$$\varphi_0'(t)+\overline{\varphi_0'(t)}+t\overline{\varphi_0''(t)}+\overline{\psi_0'(t)}=N_y+Y_{ya}-iX_{ya}\qquad (t=x\pm ia) \tag{1.2}$$

$$\varkappa_j^*\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_{kj}\left(\frac{t-b_j}{R_j}\right)^k\qquad (t\in L_j,\ \pm j=\overline{0,N}) \tag{1.3}$$

Если на L_j заданы напряжения, то $\varkappa_j^*=1$. При заданных на L_j перемещениях $\varkappa_j^*=-\varkappa$. Если же на одной части контуров заданы напряжения, а на другой – перемещения, то кроме этого должны выполняться соотношения $\varkappa_{-j}^*=\varkappa_j^*$. Предполагается, что главные векторы и главные моменты напряжений на контурах равны нулю. В этом случае γ_{0j} $(\pm j=\overline{1,N})$ неизвестны и определяются в процессе решения задачи, $\gamma_{00}=0$



(см. (1.5)). В силу симметрии задачи для γ_{kj} справедливы следующие соотношения:

$$\gamma_{k,\,-j}=-\gamma_{kj}=-i\gamma_{kj}^* \qquad (k=0,\ \pm2,\ \pm4, \dots;\ j=\overline{0,N}) \tag{1.4}$$

$$\gamma_{k,\,-j}=\gamma_{kj}=\gamma_{kj}^* \qquad (k=\pm1,\ \pm3,\ \pm5, \dots;\ j=\overline{0,N})$$

где γ_{kj}^* — действительные величины. При $j=0$ из (1.4) получаем

$$\gamma_{k0}=\gamma_{k0}^*=0 \quad (\pm k=0,\ 2,\ 4, \dots), \qquad \gamma_{k0}=\gamma_{k0}^* \quad (\pm k=1,\ 3,\ 5, \dots) \tag{1.5}$$

Искомые потенциалы $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ естественно представить в виде

$$\varphi_0(z)=\Gamma z+\varphi(z)+\varphi_1(z)+\varphi_2(z), \quad \Gamma=(N_x+N_y)/4 \tag{1.6}$$

$$\psi_0(z)=\Gamma' z+\psi(z)+\psi_1(z)+\psi_2(z), \quad \Gamma'=-(N_x-N_y)/2$$

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ являются аналитическими в сплошной полосе и определяются напряжениями $Y_{ya}(x)$, $X_{ya}(x)$ на гранях полосы. Используя теорию интегралов Фурье, эти функции можно представить в форме

$$\left.\begin{matrix}\varphi(z)\\ \psi(z)\end{matrix}\right\}=\mp i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}H_1(\mu)\\ (1-i\lambda z)H_1(\mu)+2H_2(\mu)\end{matrix}\right\}\exp(-i\lambda z)\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{1.7}$$

$$H_1(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{-T_s(\mu)Y_{ya}^*(\lambda)+iT_c(\mu)X_{ya}^*(\lambda)\}, \quad \mu=\lambda a \tag{1.8}$$

$$H_2(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\{[T_s(\mu)+\mu T_c(\mu)]Y_{ya}^*(\lambda)-i\mu T_c(\mu)X_{ya}^*(\lambda)\}$$

$$\left.\begin{matrix}Y_{ya}^*(\lambda)\\ X_{ya}^*(\lambda)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}Y_{ya}(x)\\ X_{ya}(x)\end{matrix}\right\}\exp(i\lambda x)\,dx$$

$$T_s(\mu)=\operatorname{sh}\mu/S(\mu), \qquad T_c(\mu)=\operatorname{ch}\mu/S(\mu), \qquad S(\mu)=2\mu+\operatorname{sh}2\mu$$

Потенциалы $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ — также аналитические в сплошной полосе функции. Потенциалы $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ — функции аналитические вне отверстий. Для них справедливо представление Аппеля [4]:

$$\left.\begin{matrix}\varphi_2(z)\\ \psi_2(z)\end{matrix}\right\}=\sum_{j=-N}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\alpha_{kj}\\ \beta_{kj}\end{matrix}\right\}\left(\frac{R_j}{z-b_j}\right)^k \tag{1.9}$$

В силу симметрии коэффициенты α_{kj}, β_{kj} удовлетворяют соотношениям, аналогичным (1.4), (1.5) для γ_{kj} (α_{kj}^*, β_{kj}^* — действительные величины):

$$\alpha_{k,\,-j}=\alpha_{kj}=\alpha_{kj}^*, \quad \beta_{k,\,-j}=\beta_{kj}=\beta_{kj}^* \quad (k=1,\ 3,\ 5, \dots;\ j=\overline{1,N})$$

$$\alpha_{k,\,-j}=-\alpha_{kj}=-i\alpha_{kj}^*, \quad \beta_{k,\,-j}=-\beta_{kj}=-i\beta_{kj}^* \quad (k=2,\ 4,\ 6, \dots;\ j=\overline{1,N})$$

$$\alpha_{k0}=\alpha_{k0}^*=\beta_{k0}=\beta_{k0}^*=0 \quad (k=2,\ 4,\ 6, \dots)$$

$$\alpha_{k0}=\alpha_{k0}^*, \quad \beta_{k0}=\beta_{k0}^* \quad (k=1,\ 3,\ 5, \dots)$$

Подставляя (1.6), (1.7), (1.9) в (1.2) при $y=a$, приходим к краевой задаче для функций $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ — аналитических, как уже отмечалось, в сплошной полосе

$$\varphi_1'(t)+\overline{\varphi_1'(t)}+t\overline{\varphi_1''(t)}+\overline{\psi_1'(t)}=\sum_{j=0}^{N}\left(1-\frac{\delta_{0j}}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{R_j}\{\alpha_{kj}t_{1j}^{k+1}+ \tag{1.10}$$

$$+\bar\alpha_{kj}t_{2j}^{k+1}-\bar\nu_{kj}\bar t_{1j}^{k+1}-\nu_{kj}\bar t_{2j}^{k+1}-i(k+1)[(2/\varepsilon_j-1/\varepsilon_{jj})\bar\alpha_{kj}\bar t_{1j}^{k+2}+$$

$$+(2/\varepsilon_j+1/\varepsilon_{jj})\alpha_{kj}\bar t_{2j}^{k+2}]\}$$

$$\left.\begin{matrix}t_{1j}\\ t_{2j}\end{matrix}\right\}=\frac{R_j}{t\mp b_j},\qquad \varepsilon_j=\frac{R_j}{a},\qquad \varepsilon_{jn}=\frac{R_j}{c_n},\qquad \nu_{kj}=k\alpha_{kj}-\beta_{kj}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, $t=x+ia$.

Решение задачи (1.10) дается формулами, аналогичными (1.7) с заменой в них $H_1(\mu)$ и $H_2(\mu)$ на $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$ соответственно. Причем последние определяются выражениями

$$\left.\begin{matrix}M_1(\mu)\\ M_2(\mu)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{S(\mu)}\sum_{j=0}^{N}\left(1-\frac{\delta_{0j}}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\Pi_{kj}(\mu)\left\{\alpha_{kj}^*\left[\begin{matrix}(a_{kj}(\mu)-\\ \left[2\mu^2-\gamma_1(\mu)\,(a_{kj}(\mu)-\right.\end{matrix}\right.\right. \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{matrix}-2\gamma_1(\mu))\,\Gamma_{kj}^{(1)}(\mu)-2\varepsilon_j^*\mu\Gamma_{kj}^{(2)}(\mu)\\ -2)]\,\Gamma_{kj}^{(1)}(\mu)+2\varepsilon_j^*\mu\gamma_1(\mu)\,\Gamma_{kj}^{(2)}(\mu)\end{matrix}\right]+\beta_{kj}^{**}\Gamma_{kj}^{(3)}(\mu)\left.\left[\begin{matrix}1\\ -\gamma_1(\mu)\end{matrix}\right]\right\}\quad(\mu>0)$$

$$\left.\begin{matrix}\Gamma_{kj}^{(1)}(\mu)\\ \Gamma_{kj}^{(3)}(\mu)\end{matrix}\right\}=\cos k\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\varepsilon_j^*\mu\mp\sin k\frac{\pi}{2}\,\mathrm{ch}\,\varepsilon_j^*\mu,\qquad \Pi_{kj}(\mu)=\frac{\varepsilon_j^{k}\mu^{k}}{(k-1)!}$$

$$\Gamma_{kj}^{(2)}(\mu)=\sin k\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}\,\varepsilon_j^*\mu-\cos k\frac{\pi}{2}\,\mathrm{ch}\,\varepsilon_j^*\mu,\qquad a_{kj}(\mu)=k+1+\frac{\varepsilon_j^2\mu^2}{k+1}$$

$$\beta_{kj}^{**}=(-1)^{k+1}\beta_{kj}^*-(k-1)\overset{*}{\alpha}_{k-1,j}/\varepsilon_{jj}+(-1)^k(k-2)\overset{*}{\alpha}_{k-2,j}$$

$$2\gamma_1(\mu)=1+2\mu-\exp(-2\mu),\qquad \varepsilon_j^*=c_j/a,\qquad \overset{*}{\alpha}_{-1,j}=\alpha_{0j}^*\equiv0$$

Функции $M_1(\mu)$ и $M_2(\mu)$ — действительные, четные; выражения (1.11) для них справедливы только при $\mu>0$.

2. Первые два потенциала в (1.6) определены полностью, последние два — с точностью до коэффициентов α_{kj}^*, β_{kj}^*. Для определения этих коэффициентов необходимо построить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. С этой целью подставим (1.6), (1.7), (1.9) и формулы для $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ (аналогичные (1.7)) в (1.3) при $j=n$ ($n=\overline{0,N}$) и приравняем выражения при одинаковых степенях $(t-b_n)/R_n$ слева и справа. Это приводит к уравнению для γ_{0j} ($j=\overline{1,N}$), которое не выписываем, и к требуемой системе

$$\varkappa_n^*\alpha_{sn}^*+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}(E_{1kj}^{sn}\alpha_{kj}^*+E_{2kj}^{sn}\beta_{kj}^{**})=\overset{*}{\gamma}_{-s,n}-\delta_{s1}\Gamma'R_n+\delta_{sn}^* \tag{2.1}$$

$$\beta_{sn}^{**}+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}(F_{1kj}^{sn}\alpha_{kj}^*+F_{2kj}^{sn}\beta_{kj}^{**})=\gamma_{sn}^*-\delta_{s1}\varkappa_{n1}\Gamma R_n+\delta_{sn}^{**}$$

$(j,\ n=\overline{0,N};\ s=\overline{1,\infty};\ k=1,\ 3,\ 5,\ldots,$ если $j=0;\ s=1,\ 3,\ 5,\ldots,$ если $n=0)$

$$E_{1kj}^{sn}=ke_{1s}[C_{k+s+1}^{s}H_{kj}^{sn}-(-1)^{k}C_{k+s}G_{kj}^{sn}]-\varepsilon_{jn}^{ks}\int_0^\infty S_{ks}(\mu)J_{1kj}(\mu)\,d\mu$$

$$C_k^s=\frac{k!}{s!(k-s)!},\qquad E_{2kj}^{sn}=e_{1s}C_{k+s-1}G_{kj}^{sn}+\varepsilon_{jn}^{ks}\int_0^\infty S_{ks}(\mu)J_{2kj}^{sn}(\mu)\,d\mu$$

$$F_{1kj}^{sn}=(-1)^k\varkappa_{ns}e_{2s}C_{k+s-1}^{s}G_{kj}^{sn}+\varkappa_{ns}\varepsilon_{jn}^{ks}\int_0^\infty S_{ks}(\mu)J_{2sn}(\mu)\,d\mu,$$

$$F_{2kj}^{sn}=-\varkappa_{ns}\varepsilon_{jn}^{ks}\int_0^\infty S_{ks}(\mu)\Gamma_{kj3}^{sn3}(\mu)\,d\mu$$

$$\delta_{sn}^{*}=2\frac{\varepsilon_n^{s}}{s!}\int_0^\infty \mu^{s-1}\{H_1(\mu)[a_{sn}(\mu)\Gamma_{sn}^{(1)}(\mu)-2\varepsilon_n^{*}\mu\Gamma_{sn}^{(2)}(\mu)]+$$

$$+2H_2(\mu)\Gamma_{sn}^{(1)}(\mu)\}\,d\mu \qquad (2.2)$$

$$\delta_{sn}^{**}=2\varkappa_{ns}\frac{\varepsilon_n^{s}}{s!}\int_0^\infty \mu^{s-1}H_1(\mu)\Gamma_{sn}^{(3)}(\mu)\,d\mu,\qquad \varkappa_{ns}=\varkappa_n^{*}+\delta_{s1}$$

$$H_{kj}^{sn}=e_{2k}G_{1kj}^{sn}h_{1kj}^{sn}-e_{1k}G_{2kj}^{sn}h_{2kj}^{sn},\qquad G_{kj}^{sn}=e_{1k}G_{1kj}^{sn}-e_{2k}G_{2kj}^{sn}$$

$$G_{1kj}^{sn}=(1-\delta_{nj})(\Pi_{jn}^{1j})^k(\Pi_{jn}^{1n})^s,\qquad \varepsilon_{jn}^{ks}=(2-\delta_{0j})\frac{\varepsilon_j^{k}\varepsilon_n^{s}}{(k-1)!s!}$$

$$G_{2kj}^{sn}=(1-\delta_{0j})(\Pi_{jn}^{2j})^k(\Pi_{jn}^{2n})^s,\qquad S_{ks}(\mu)=\mu^{k+s-1}/S(\mu)$$

$$\left.\begin{matrix}e_{1k}\\ e_{2k}\end{matrix}\right\}=\cos k\frac{\pi}{2}\pm\sin k\frac{\pi}{2},\qquad h_{mkj}^{sn}=(\Pi_{jn}^{mj})^2+\frac{k+1}{s+1}(\Pi_{jn}^{mn})^2$$

$$\left.\begin{matrix}\Pi_{jn}^{1j}\\ \Pi_{jn}^{2j}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_{jn}}{1\mp\varepsilon_{jn}^{*}},\qquad \left.\begin{matrix}\Pi_{jn}^{1n}\\ \Pi_{jn}^{2n}\end{matrix}\right\}=\frac{\varepsilon_{nn}}{1\mp\varepsilon_{jn}^{*}},\qquad \varepsilon_{jn}^{*}=\frac{c_j}{c_n}$$

$$J_{1kj}^{sn}(\mu)=\{4\mu^2-2\gamma_1(\mu)[a_{kj}(\mu)+a_{sn}(\mu)-2]+a_{kj}(\mu)a_{sn}(\mu)\}\Gamma_{kj1}^{sn1}(\mu)+$$

$$+2\varepsilon_n^{*}\mu\gamma_{kj}^{**}(\mu)\Gamma_{kj1}^{sn2}(\mu)+2\varepsilon_j^{*}\mu\gamma_{sn}^{**}(\mu)\Gamma_{sn1}^{kj2}(\mu)+4\varepsilon_j^{*}\varepsilon_n^{*}\mu^2\Gamma_{kj2}^{sn2}(\mu)$$

$$J_{2kj}^{sn}(\mu)=2\varepsilon_n^{*}\mu\Gamma_{kj3}^{sn2}(\mu)+\gamma_{sn}^{**}(\mu)\Gamma_{kj3}^{sn1}(\mu)$$

$$\Gamma_{kjp}^{snq}(\mu)=\Gamma_{kj}^{(p)}(\mu)\Gamma_{sn}^{(q)}(\mu),\qquad \gamma_{kj}^{**}(\mu)=2\gamma_1(\mu)-a_{kj}(\mu)$$

Отметим следующие соотношения, обеспечивающие аналогичные соотношения между симметричными коэффициентами матрицы системы (2.1), записанной в стандартной форме:

$$\frac{E_{1kj}^{sn}}{E_{1sn}^{kj}}=\frac{1}{\varkappa_{ns}}\frac{F_{1kj}^{sn}}{E_{2sn}^{kj}}=\frac{\varkappa_{jk}}{\varkappa_{ns}}\frac{F_{2kj}^{sn}}{F_{2sn}^{kj}}=\frac{k}{s}\frac{1+\delta_{0n}}{1+\delta_{0j}}$$

Квазирегулярность системы (2.1) доказывается сравнительно просто, поэтому не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

Решая систему (2.1), находим коэффициенты α_{kj}^{*} и β_{kj}^{**} и тем самым полностью определяем потенциалы $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$. После этого напряжения и перемещения находятся по известным формулам. В частности, для перемещений u, v, как известно, справедлива следующая формула: $2G(u+iv)=\varkappa\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}$. Подставляя сюда выражения (1.6), (1.7), (1.9) и формулы для $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ аналогичные (1.7) (при $z=x+ia$), получим зависимость

$$2G(u+iv)=\Gamma^*x+i\Gamma^{**}a+i\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda x)\left\{W(\mu)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{N}\left(1-\frac{\delta_{0j}}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}W_{kj}(\mu)\right\}\frac{d\mu}{\mu},\quad \left.\begin{matrix}\Gamma^*\\ \Gamma^{**}\end{matrix}\right\}=(\varkappa-1)\Gamma\mp\Gamma' \tag{2.3}$$

$$W(\mu)=\frac{\exp(\mu)}{\sqrt{2\pi}}\left[Y_{ya}^*(\mu)V_y(\mu)-iX_{ya}^*(\mu)V_x(\mu)\right]$$

$$V_x(\mu)=2\mu T_s(\mu)-\omega_1(\mu)T_c(\mu),\qquad V_y(\mu)=2\mu T_c(\mu)-\omega_2(\mu)T_s(\mu)$$

$$W_{kj}(\mu)=\frac{\varkappa+1}{S(\mu)}\exp(-\mu)\Pi_{kj}(\mu)\{\alpha_{kj}^*[\exp(2\mu)\Omega_{kj}(\mu)\Gamma_{kj}^{(1)}(\mu)-$$

$$-2\varepsilon_j^*\mu\Gamma_{kj}^{(2)}(\mu)]+\beta_{kj}^{**}\Gamma_{kj}^{(3)}(\mu)\}$$

$$\omega_1(\mu)=\omega_2(\mu)+2=\varkappa\exp(-2\mu)+2\mu+1$$

$$\Omega_{kj}(\mu)=1+\exp(-2\mu)[a_{kj}(\mu)+2\mu-1]$$

Если во всех полученных формулах отбросить слагаемые, соответствующие $j=0$, то придем к случаю четного ($2N$) числа отверстий в полосе. При $N=1$ полоса будет ослаблена двумя одинаковыми отверстиями. Задача для такой полосы (при заданных напряжениях), как уже отмечалось, рассмотрена, в частности, в [2], где применялся метод ω-функции (метод Д. И. Шермана [5]).

Отметим следующий факт. И потенциалы $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, и системы уравнений для определения коэффициентов, входящих в потенциалы, в данной работе (в частном случае двух отверстий) и в [2] совпадают с точностью до обозначений. Поэтому численный анализ, проведенный в [2], является в то же время и иллюстрацией для этой работы в упомянутом частном случае полосы с двумя отверстиями.

3. Рассмотрим теперь такую задачу (симметричную относительно обеих осей; это же замечание относится и к следующим задачам): на контурах отверстий справедливо условие (1.3), а по граням полосы $y=\pm a$ заданы перемещения

$$u(x)=u_0x+u_1(x),\qquad u_0=\text{const} \tag{3.1}$$

$$v(x)=v_0a+v_1(x),\qquad v_0=\text{const},\qquad y=a$$

В силу симметрии задачи

$$u_1(-x)=-u_1(x),\qquad v_1(-x)=v_1(x) \tag{3.2}$$

Будем считать функции $u_1(x)$ и $v_1(x)$ представимыми интегралами Фурье

$$\left.\begin{matrix}u_1(x)\\ v_1(x)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}u_1^*(\lambda)\\ v_1^*(\lambda)\end{matrix}\right\}\exp(-i\lambda x)\,d\lambda, \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{matrix}u_1^*(\lambda)\\ v_1^*(\lambda)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\begin{matrix}u_1(x)\\ v_1(x)\end{matrix}\right\}\exp(i\lambda x)\,dx$$

Для решения поставленной задачи предположим (временно), что по граням полосы и на бесконечности заданы напряжения. Такая задача решена в пп. 1, 2. Следовательно, для потенциалов $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ будут справедливы формулы (1.6), а коэффициенты α_{kj}^* и β_{kj}^{**} будут определяться системой (2.1). Но в правые части этой системы входят неизвестные слагаемые δ_{sn}^* и δ_{sn}^{**}, так как последние (см. (2.2), (1.8)) выражаются через трансформанты $Y_{ya}^*(\mu)$ и $X_{ya}^*(\mu)$ напряжений на гранях полосы, а эти напряжения на самом деле неизвестны. Кроме того, неизвестны также N_x и N_y. Поэтому обращаемся к выражению (2.3), определяющему перемещения на верхней ($y=a$) грани полосы. Левая часть в этом выражении согласно (3.1) задана. Подставляя (3.1) и (3.3) в (2.3) и приравнивая между собой сначала действительные, а затем мнимые части (отдельно внеинтегральные и подынтегральные), получим одну систему для определения Γ, Γ' (N_x, N_y):

$$\Gamma^*=2Gu_0, \qquad \Gamma^{**}=2Gv_0 \tag{3.4}$$

а вторую — (выписать ее нетрудно) для определения Y_{ya}^* и X_{ya}^*. Решение последней системы позволяет выразить Y_{ya}^* и X_{ya}^* через α_{kj}^* и β_{kj}^{**}. Подставляя эти выражения в (1.8), (2.2), (2.1), получим требуемую систему для α_{kj}^*, β_{kj}^*. Эта система также квазирегулярна.

4. Рассмотрим следующую задачу: по граням полосы заданы касательное напряжение и вертикальное перемещение

$$X_y(x)=X_{ya}(x), \qquad v(x)=v_0a+v_1(x) \qquad (y=a) \tag{4.1}$$

На контурах отверстий выполняются условия (1.3), а на бесконечности полоса растягивается напряжением $N_x=\text{const}$. Предполагаем, что для X_{ya} выполняются условия (1.1), а для v — условия (3.2), (3.3). Для решения задачи также необходимо предположить, что по граням заданы напряжения (одно из них (X_y) действительно задано $(X_y=X_{ya})$, поэтому заданной считается и трансформанта X_{ya}^*), и повторить рассуждения п. 3. В частности, в правую часть системы (2.1) входят теперь два неизвестных: N_y и Y_{ya}^*. Для их определения необходимо рассмотреть мнимую часть (2.3), так как именно она согласно (4.1) задана. Аналогично предыдущему получаем одно уравнение для N_y (см. второе уравнение в (3.4)) и одно — для Y_{ya}^*. Решение последнего такое:

$$Y_{ya}^*(\mu)=\frac{(\varkappa-1)\operatorname{sh}2\mu-4\mu}{2(\varkappa+1)\operatorname{sh}^2\mu}iX_{ya}^*(\mu)+\frac{S(\mu)}{2(\varkappa+1)\operatorname{sh}^2\mu}\times$$
$$\times[4G\lambda v_1^*(\lambda)+\exp(-\mu)W_1(-\mu)-\exp(\mu)W_1(\mu)]$$

$$W_1(\mu)=\sqrt{2\pi}\exp(-\mu)\sum_{j=0}^{N}\left(1-\frac{\delta_{0j}}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}W_{kj}(\mu) \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) и известное $X_{ya}^*(\mu)$ в (1.8), (2.2) и (2.1), получаем требуемую систему для α_{kj}^*, β_{kj}^{**} (и эта система квазирегулярна).

5. Несколько проще решается следующая периодическая по координате y задача для плоскости, являющаяся частным случаем только что рассмотренной. Пусть плоскость ослаблена бесконечным рядом круговых отверстий, центры которых расположены на оси y. Пусть этот ряд отверстий является периодическим и основной период содержит $2N+1$ отверстие. Далее предположим, что геометрия периода полностью совпадает с таковой для рассмотренной выше полосы. На бесконечности плоскость растягивается напряжениями N_x, $N_y+Y_y^*(x, y)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_y^*(x, y_0)\,dx=2\int_0^{\infty} Y_y^*(x, y_0)\,dx=0, \qquad y_0=\text{const}$$

Выделим из этой плоскости полосу $|x|<\infty$, $|y|\leqslant a$ (основной период). Учитывая периодичность и симметрию задачи, выпишем граничные условия для выделенной полосы $X_y(x)=0$, $Y_y(x)=N_y+Y_{ya}(x)$, $v(x)=$ $=v_0a=\text{const}$ $(y=a)$, где v_0 и $Y_{ya}(x)=Y_y^*(x, a)$ подлежат определению. На контурах отверстий пусть по-прежнему выполняются условия (1.3). Эта задача является, как уже отмечалось, частным случаем задачи (4.1) с тем различием, что здесь N_y задано, а v_0 необходимо определить, а в (4.1) — наоборот.

Полагая $X_{ya}^*(\mu)=v_1^*(\lambda)\equiv 0$ в рассуждениях п. 4, находим решение этой задачи. Причем v_0 определяется вторым уравнением (3.4), а для $Y_{ya}^*(\mu)$ из (4.2) получаем следующее выражение:

$$Y_{ya}^*(\mu)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\operatorname{sh}\mu}\sum_{j=0}^{N}\left(1-\frac{\delta_{0j}}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\Pi_{kj}(\mu)\{\alpha_{kj}^*[(a_{kj}(\mu)-2\mu\operatorname{cth}\mu-2)\Gamma_{kj}^{(1)}(\mu)-$$

$$-2\varepsilon_j^*\mu\Gamma_{kj}^{(2)}(\mu)]+\beta_{kj}^{**}\Gamma_{kj}^{(3)}(\mu)\} \tag{5.1}$$

Подставляя (5.1) и $X_{ya}^*(\mu)\equiv 0$ в зависимости (1.8), а последние — в (2.2), имеем

$$\delta_{sn}^*=\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}(A_{1kj}^{sn}\alpha_{kj}^*+A_{2kj}^{sn}\beta_{kj}^{**}),\qquad \delta_{sn}^{**}=\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}(B_{1kj}^{sn}\alpha_{kj}^*+B_{2kj}^{sn}\beta_{kj}^{**}) \tag{5.2}$$

$$A_{1kj}^{sn}=-\varepsilon_{jn}^{ks}\int_0^\infty S_{ks}(\mu)\Omega_{kj}^*(\mu)\Omega_{sn}^*(\mu)\,d\mu,\qquad A_{2kj}^{sn}=\varepsilon_{jn}^{ks}\int_0^\infty S_{ks}(\mu)\Gamma_{kj}^{(3)}(\mu)\Omega_{sn}^*(\mu)\,d\mu$$

$$B_{1kj}^{sn}=\varkappa_{ns}\varepsilon_{jn}^{ks}\int_0^\infty S_{ks}(\mu)\Gamma_{sn}^{(3)}(\mu)\Omega_{kj}^*(\mu)\,d\mu,\qquad B_{2kj}^{sn}=F_{2kj}^{sn}$$

$$\Omega_{kj}^*(\mu)=[2(1+\mu\operatorname{cth}\mu)-a_{kj}(\mu)]\Gamma_{kj}^{(1)}(\mu)+2\varepsilon_j^*\mu\Gamma_{kj}^{(2)}(\mu)$$

Используя (5.2) в (2.1), приходим к требуемой системе

$$\varkappa_n^*\alpha_{sn}^*+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\{V_{1kj}^{sn}\alpha_{kj}^*+V_{2kj}^{sn}\beta_{kj}^{**}\}=\gamma_{-s,n}^*-\delta_{s1}\Gamma' R_n$$

$$\beta_{sn}^{**}+\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\{W_{1kj}^{sn}\alpha_{kj}^*+W_{2kj}^{sn}\beta_{kj}^{**}\}=\gamma_{sn}^*-\delta_{s1}\varkappa_{n1}\Gamma R_n$$

$$V_{1kj}^{sn}=E_{1kj}^{sn}-A_{1kj}^{sn},\qquad V_{2kj}^{sn}=E_{2kj}^{sn}-A_{2kj}^{sn}$$

$$W_{1kj}^{sn}=F_{1kj}^{sn}-B_{1kj}^{sn},\qquad W_{2kj}^{sn}=F_{2kj}^{sn}-B_{2kj}^{sn}=0$$

Эта система, как и все предыдущие, квазирегулярна. Как видно, эта система несколько проще системы (2.1), так как коэффициенты $W_{2kj}^{sn}=0$.

Если отбросить в приведенных рассуждениях все слагаемые, соответствующие $j=0$, то придем к периодической задаче с четным числом отверстий в периоде.

Если в потенциалах $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ (см. (1.6)) вторые и третьи слагаемые положить равными нулю, а в коэффициентах $E_{2kj}^{sn}, \ldots, F_{1kj}^{sn}$ системы (2.1) отбросить интегральные слагаемые, то придем к случаю плоскости с конечным числом круговых отверстий. В полной аналогии с периодической задачей для плоскости здесь $F_{2kj}^{sn}=0$.

Если в рассмотренных задачах для полосы с четным ($2N$) числом отверстий $Y_y(x, 0)<0$, то полученные решения являются в то же время и решениями для полосы $|x|<\infty$, $0\leqslant y\leqslant a$ с N отверстиями, лежащей на абсолютно жестком гладком основании ($X_y=0$, $v=0$) и нагруженной соответствующим образом на верхней грани $y=a$ и на бесконечности.

Аналогично тому, как это сделано в [6], можно рассмотреть и задачу о действии двух абсолютно жестких штампов на рассматриваемую полосу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоеров С. А., Михайлова Л. Е., Петренко Т. П.* Напряженное состояние полосы с двумя круговыми отверстиями.– В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Киев – Донецк: Вища шк., 1976, вып. 7, с. 88–96.
2. *Мироненко Н. И.* О напряженном состоянии полосы, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями, расположенными в поперечном направлении.– ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 930–935.
3. *Мироненко Н. И.* Чистый изгиб полосы с двумя круговыми отверстиями.– В сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1978, вып. 8, с. 93–98.
4. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Перфорированные пластинки и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
5. *Шерман Д. И.* О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями.– ПММ, 1951, т. 15, вып. 3, с. 297–316.
6. *Мироненко Н. И.* Об одной смешанной задаче для полосы с двумя круговыми отверстиями.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 6, с. 72–79.

Алма-Ата

Поступила в редакцию 22.IV.1985