

УДК 531.383

## ВЛИЯНИЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПОДВЕСА НА УГЛОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСБАЛАНСИРОВАННОГО РОТОРА НЕКОНТАКТНОГО ГИРОСКОПА

ЛИНЬКОВ Р. В., УРМАН Ю. М.

Влияние системы автоматического регулирования подвеса на угловые движения несбалансированного ротора электростатического гироскопа исследовалось в [1, 2], где было показано, что из-за взаимосвязи поступательных и вращательных движений ротор может тормозиться или раскручиваться<sup>1</sup>. Возможность подкрутки ротора в регулируемом подвесе имеет особое значение для криогенного гироскопа, создание двигателя для которого является трудной задачей, и поддержание номинальной скорости вращения ротора системой регулирования помогло бы ее разрешению. В связи с этим необходимо знать: какие регуляторы обеспечивают подкрутку ротора, когда существует устойчивая стационарная скорость, каким образом система регулирования и несбалансированность ротора влияют на его уходы. В [1, 2] ротор считался динамически симметричным. Однако случай, когда моменты инерции различны, но близки между собой, имеет свою специфику и требует особого рассмотрения.

В публикуемой работе исследуется движение ротора неконтактного гироскопа с эллипсоидом инерции, близким к сферическому. Ротор предполагается идеальным паром, но центр масс не совпадает с его центром и дисбаланс является единственным источником моментов. Построены осредненные уравнения угловых движений ротора. Определены условия, при которых обеспечивается подкрутка ротора и устойчивость стационарной скорости вращения в зависимости от вида регулятора. Проводится анализ стационарных режимов, а также особенностей движения, обусловленных неизотропностью подвеса.

1. Введем систему прямоугольных координат  $O\xi_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) с началом в центре  $O$  подвеса и осями, направленными по осям симметрии трехосного подвеса. Пусть  $O_1$  — центр сферической поверхности ротора, а  $O_2$  — его центр масс. Вектор  $e$ , проведенный из точки  $O_2$  в  $O_1$ , есть дебаланс ротора. В общем случае будем считать подвес неравножестким, тогда равнодействующая сила поля подвеса, приложенная к геометрическому центру ротора, будет

$$F = -V(p)(R + e) \quad (1.1)$$

Здесь  $R$  — вектор смещения центра масс относительно центра подвеса (или точки  $O_2$  относительно  $O$ ),  $V(p) = \text{diag}\{V_1, V_2, V_3\}$  — диагональная матрица,  $V_i(p)$  — передаточная функция  $i$ -го канала следящей системы подвеса, обеспечивающей вывешивание ротора вдоль оси  $\xi_i$  ( $i=1, 2, 3$ );  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования по времени.

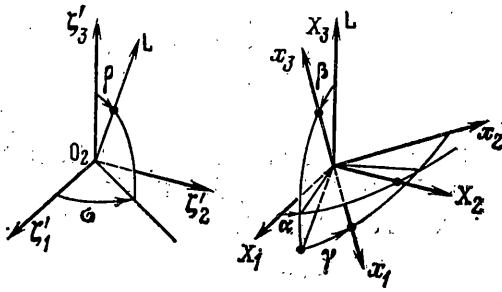
Уравнения движения центра масс ротора и уравнения движения момента количества движения относительно центра масс имеют вид

$$MR'' = Mg + F, \quad L' = [e \times F] \quad (1.2)$$

Здесь  $M$  и  $L$  — масса и вектор кинетического момента ротора,  $g$  — ускорение свободного падения. Для исследования (1.2) воспользуемся асимптотическими методами нелинейной механики [3]. Будем считать, что в задаче существуют два малых параметра: относительная разность моментов инерции  $((C-B)/A, (B-A)/A, (C-A)/A \ll 1)$  и отношение работы внешних моментов ( $m_\lambda$ ) к кинетической энергии вращения ( $Am_\lambda/L^2 \ll 1$ ).

<sup>1</sup> Впервые идея автовращения была высказана, воплощена на магнитном подвесе и докладывалась в 1962 г. на секции навигационных систем при Президиуме АН СССР Денисовым Г. Г., Неймарком Ю. И., Поздеевым О. Д.

Полагая их величинами одного порядка малости, возьмем за порождающее решение невозмущенное движение шара. В качестве фазовых переменных вращательного движения введем: величину  $L$  и углы  $\rho$ ,  $\sigma$  и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (фиг. 1). Движение по углу  $\alpha$  будет «быстрым», а по остальным переменным — «медленным» и описывается уравнениями



Фиг. 1

$$L' = \langle m_L \rangle, \rho' = L^{-1} \langle m_\rho \rangle, \quad (1.3)$$

$$\sigma' = (L \sin \rho)^{-1} \langle m_\sigma \rangle$$

$$\beta' = L \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma (B^{-1} - A^{-1}) - L^{-1} \langle m_\beta \rangle$$

$$\gamma' = L \cos \beta (C^{-1} - A^{-1} \cos^2 \gamma - B^{-1} \sin^2 \gamma) + \langle m_\gamma \rangle / L \sin \beta$$

Знак  $\langle \rangle$  означает осреднение моментов по порождающему решению невозмущенной задачи.

Для определения средних значений моментов в (1.3) найдем  $F$ , исключая  $R$  из (1.1) и (1.2):

$$F = -Mg - W(p)e + F_0, \quad W_i(p) = p^2 V_i(p) [p^2 + M^{-1} V_i(p)]^{-1} \quad (1.4)$$

Здесь  $F_0$  — общее решение соответствующего однородного уравнения, которое считается затухающим ( $F_0 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ),  $W(p)$  — передаточная функция замкнутой системы регулирования. Чтобы упростить осреднение, представим силу и момент в форме неприводимого тензора первого ранга [4]:

$$F_1 = -Mg_1 - Ee_1 + \sqrt{5}/2 \{T_2 \otimes e_1\}_1, \quad E = 1/3 (W_1 + W_2 + W_3) \\ T_{20} = W_3 - E, \quad T_{22} = T_{2-2} = \sqrt{1}/6 (W_1 - W_2) \quad (1.5)$$

Если подвес равножесткий, то  $T_2 = 0$ ; если осесимметричный, то  $T_{22} = T_{2-2} = 0$ ,  $E = 1/3 (2W_1 + W_3)$ ,  $T_{20} = 2/3 (W_3 - W_1)$ . Используя (1.5), запишем момент, действующий на ротор; в форме неприводимого тензора

$$m_1 = -j\sqrt{2} \{e_1 \otimes F_1\}_1 = j\sqrt{2} M \{e_1 \otimes g_1\}_1 + j\sqrt{2} \{e_1 \otimes Ee_1\}_1 - j\sqrt{5} \{e_1 \otimes \{T_2 \otimes e_1\}_1\}_1 \quad (1.6)$$

Проектируя (1.6) на оси, связанные с кинетическим моментом, получим

$$m_{1\mu} = j\sqrt{2} \left[ \sqrt{3/2} \sum_{qphs\lambda} (-1)^q C_{1p1s}^{1\mu} C_{1s1-\nu}^{2s-\nu} D_{qs-\nu}^2(\sigma, \rho, 0) D_{ph}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) T_{2q}(p) \times \right. \\ \left. \times \bar{D}_{\nu\lambda}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) e_{1h} e_{1\lambda} + \sum_{ph\lambda} C_{1p1\nu}^{1\mu} D_{ph}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) E(p) \bar{D}_{\nu\lambda}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) e_{1h} e_{1\lambda} + \right. \\ \left. + M \sum_{pskv} C_{1p1\nu}^{1\mu} D_{kv}^{-1}(\sigma, \rho, 0) D_{ps}^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) e_{1s} g_{1k} \right] \quad (1.7)$$

Здесь  $D_{nm}^k$ ,  $C_{psqt}^{kv}$  — соответственно, матрица конечных вращений и коэффициент Клебша — Гордана [5],  $j = \sqrt{-1}$ . Осредним (1.7) по  $\alpha = \Omega t + \alpha_0$  ( $\Omega = L/I_0$ ,  $I_0$  — момент инерции шарового ротора)

$$\langle m_{1\mu} \rangle = j \left[ -\mu M \sum_{kp} D_{kp}^{-1}(\sigma, \rho, 0) \bar{D}_{0p}^{-1}(0, \beta, \gamma) g_{1k} e_{1p} + \right.$$

$$\left. + \delta_{\mu 0} \sum_{\nu} \nu E(j\nu\Omega) \left| \sum_{\lambda} D_{\nu\lambda}^{-1}(0, \beta, \gamma) e_{1\lambda} \right|^2 + \sqrt{3} \sum_{q,\nu} C_{1-\nu 1\mu+\nu}^{1\mu} C_{1\mu+\nu 1\nu}^{2\mu} D_{q\mu}^2(\sigma, \rho, 0) \times \right.$$

$$\times T_{2q}(j\nu\Omega) \left| \sum_{\lambda} D_{\nu\lambda}^{-1}(0, \beta, \gamma) e_{1\lambda} \right|^2 \quad (1.8)$$

Учитывая, что  $\langle m_{10} \rangle = \langle m_L \rangle$ ,  $\langle m_{11} \rangle = -(\langle m_p \rangle + j\langle m_\sigma \rangle) / \sqrt{2}$  из (1.8), расписывая суммы, найдем

$$\begin{aligned} \langle m_L \rangle &= -e^2 (f_1^2 + f_2^2) \operatorname{Im} N_1(j\Omega), \quad \langle m_\sigma \rangle = Mge(\partial f_1 / \partial \beta) \sin \rho + \\ &+ (e^2/2) (f_1^2 + f_2^2) \sin \rho [\cos \rho \operatorname{Re} N_2^{-1/2} \sin 2\sigma \operatorname{Im} N_3] \\ \langle m_p \rangle &= (e^2/2) (f_1^2 + f_2^2) \sin \rho [\cos \rho \operatorname{Im} N_2^{-1/2} \sin \rho \sin 2\sigma \operatorname{Re} N_3] \\ f_1 &= \sin \beta \cos \chi + \cos \beta \sin \chi \cos(\lambda + \gamma), \quad f_2 = \sin \chi \sin(\lambda + \gamma) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь  $\chi, \lambda$  — сферические координаты вектора дебаланса в теле

$$\begin{aligned} N_1(j\Omega) &= (1/2) [W_3(j\Omega) \sin^2 \rho + W_1(j\Omega) (\cos^2 \rho \cos^2 \sigma + \\ &+ \sin^2 \sigma) + W_2(j\Omega) (\cos^2 \rho \sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma)] \\ N_2(j\Omega) &= W_1(j\Omega) \cos^2 \sigma + W_2(j\Omega) \sin^2 \sigma - W_3(j\Omega) \\ N_3(j\Omega) &= W_2(j\Omega) - W_1(j\Omega) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для определения моментов  $m_p$  и  $m_\gamma$  составим выражение  $m_{11} e^{-j\alpha} = - (m_p + jm_\gamma) / \sqrt{2}$  и осредним его по  $\alpha$

$$\begin{aligned} \langle m_p \rangle &= Mgef_2 \cos \rho + e^2 (\partial f_1 / \partial \beta) [f_1 \operatorname{Im} N_1 + f_2 \operatorname{Re} N_1] \\ \langle m_\gamma \rangle &= -Mgef_1 - e^2 (\partial f_1 / \partial \beta) [f_1 \operatorname{Re} N_1 - f_2 \operatorname{Im} N_1] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом определены моменты, действующие на ротор. Подставляя (1.9) и (1.11) в (1.3), получим систему уравнений для исследования эволюционных движений ротора и кинетического момента гироскопа

$$\begin{aligned} L^* &= -e^2 (f_1^2 + f_2^2) \operatorname{Im} N_1 \\ L\rho^* &= (e^2/2) (f_1^2 + f_2^2) \sin \rho [\cos \rho \operatorname{Im} N_2^{-1/2} \sin 2\sigma \operatorname{Re} N_3] \\ L\sigma^* &= Mge\partial f_1 / \partial \beta + 1/2 e^2 (f_1^2 + f_2^2) [\cos \rho \operatorname{Re} N_2^{-1/2} \sin 2\sigma \operatorname{Im} N_3] \\ \beta^* &= L \sin \beta \sin \gamma \cos \gamma (B^{-1} - A^{-1}) - MgeL^{-1} f_2 - \\ &- e^2 L^{-1} (\partial f_1 / \partial \beta) [f_1 \operatorname{Im} N_1 + f_2 \operatorname{Re} N_1] \\ \gamma^* &= L \cos \beta (C^{-1} - A^{-1} \cos^2 \gamma - B^{-1} \sin^2 \gamma) - \\ &- Mgef_1 \cos \rho (L \sin \beta)^{-1} - e^2 (L \sin \beta)^{-1} (\partial f_1 / \partial \beta) [f_1 \operatorname{Re} N_1 - f_2 \operatorname{Im} N_1] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Если все  $\operatorname{Im} N_i(j\Omega) = 0$ , то в задаче существуют две силовые функции отдельно для переменных  $\rho, \sigma$  и  $\beta, \gamma$

$$\begin{aligned} U_1 &= -Mge(\partial f_1 / \partial \beta) \cos \rho + (e^2/4) (f_1^2 + f_2^2) \times \\ &\times \operatorname{Re} [W_1 \sin^2 \rho \cos^2 \sigma + W_2 \sin^2 \rho \sin^2 \sigma + W_3 \cos^2 \rho] \\ U_2 &= 1/2 L^2 [(A^{-1} \cos^2 \gamma + B^{-1} \sin^2 \gamma) \sin^2 \beta + C^{-1} \cos^2 \beta] - \\ &- Mge \cos \rho (\partial f_1 / \partial \beta) + 1/2 e^2 (\partial f_1 / \partial \beta)^2 \operatorname{Re} N_1 \end{aligned} \quad (1.13)$$

2. Рассмотрим условия разгона ротора в изотропном подвесе. Первая часть уравнения для  $L^*$  (1.12) содержит два множителя, один из которых всегда положителен (или нуль), а другой равен  $\operatorname{Im} N_1(j\Omega)$ . Условиям  $\operatorname{Im} N_1 < 0$ ,  $\operatorname{Im} N_1 > 0$ ,  $\operatorname{Im} N_1 = 0$  соответствуют разгон, торможение и стационарное значение кинетического момента. В изотропном подвесе ( $W_1 = W_2 = W_3 = W_0$ ) функция  $\operatorname{Im} N_1(j\Omega)$  не зависит от углов  $\rho, \sigma$  и равна  $\operatorname{Im} W_0(j\Omega)$ ; для решения вопроса о возможности подкрутки необходимо исследовать ее зависимость от частоты. При синтезе регулятора обычно имеют дело с коэффициентом передачи  $V_0(p)$  незамкнутой системы, поэтому

выразим  $W_0(p)$  через  $V_0(p)$ . Функцию  $V_0(p)$  запишем в виде

$$V_0(p) = k_0 + k_1 v(p), \quad v(p) = \frac{G(p)}{P(p)} = \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda p^\lambda / \sum_{\lambda=0}^{n+1} b_\lambda p^\lambda \quad (2.1)$$

Здесь  $k_0$  — статическая жесткость пассивного подвеса,  $v(p)$  — передаточная функция регулятора,  $k_1$  — его статический коэффициент усиления (коэффициенты  $a_\lambda$ ,  $b_\lambda$  нормированы так, что  $a_0 = b_0 = 1$ ). Согласно (1.4), имеем

$$W_0(p) = k_0 \frac{T_0^2 p^2 [P(p) + \kappa G(p)]}{(1 + T_0^2 p^2) P(p) + \kappa G(p)} \quad (2.2)$$

где  $T_0 = (M/k_0)^{1/2}$  — характерное время движения ротора в пассивном подвесе,  $\kappa = k_1/k_0$  — коэффициент, показывающий, во сколько раз жесткость в регулируемом подвесе больше, чем в пассивном. В (2.2) выделим действительную и мнимую части

$$W_0(j\Omega) = -k_0 T_0^2 \Omega^2 \times \frac{(1 - T_0^2 \Omega^2) |P|^2 + \kappa^2 |G|^2 + \kappa (2 - T_0^2 \Omega^2) \operatorname{Re} P\bar{G} + j\kappa T_0^2 \Omega^2 \operatorname{Im} P\bar{G}}{(1 - T_0^2 \Omega^2)^2 |P|^2 + \kappa^2 |G|^2 + 2\kappa (1 - T_0^2 \Omega^2) \operatorname{Re} P\bar{G}} \quad (2.3)$$

Нули выражения  $\operatorname{Im} P\bar{G}$  определяют стационарные скорости вращения и являются границами диапазонов скоростей, в которых происходит разгон или торможение ротора. Максимальное число нулей (исключая  $\Omega=0$ ) равно порядку полинома  $G(p)$ . При регулировании по смещению, производным или по смещению, производным и интегралу передаточная функция в прямой цепи имеет, соответственно, вид

$$v(p) = \frac{(1 + \tau p)(1 + T_1 p)}{(1 + \varepsilon \tau p)(1 + \varepsilon T_1 p)(1 + T_p)} \quad (2.4)$$

$$v(p) = \frac{(1 + \tau p)(1 + T_1 p)(1 + T_3 p)}{(1 + \varepsilon \tau p)(1 + \varepsilon T_1 p)(1 + T_p) T_3 p}$$

Здесь  $T$ ,  $\tau$ ,  $T_1$ ,  $T_3$  — постоянные времени исполнительного звена, первого и второго дифференцирующих звеньев и интегрирующего звена соответственно, число  $\varepsilon < 1$  характеризует качество (или полосу) дифференцирующего звена. Из (2.4) можно получить передаточные функции более простых регуляторов, либо более простые выражения при частных значениях параметров (например, при  $T_1=0$  или  $T_1=T$ ). Приведем соответствующие выражения для  $\operatorname{Im} P\bar{G}$ :

$$\Omega [T - (T_1 + \tau)(1 - \varepsilon)] - \Omega^3 \{ \tau T_1 [T + \varepsilon(\tau + T_1 - T)](1 - \varepsilon) - \varepsilon T(\tau^2 + T_1^2) \} + \Omega^5 \tau^2 T_1^2 T \varepsilon^2 \quad (2.5)$$

$$\Omega [\varepsilon(\tau + T) - \tau] + \Omega^3 \tau^2 T \varepsilon^2 \text{ при } T_1 = T \quad (2.6)$$

$$\Omega [T + \varepsilon \tau - \tau] + \Omega^3 \tau^2 T \varepsilon \text{ при } T_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \Omega T_3 \{ 1 + \Omega^2 [TT_3 + (\tau^2 + T_1^2)\varepsilon - \tau T_1(1 - \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon)(TT_1 - T_1 T_3 + \\ & + \tau T - \tau T_3)] - \Omega^4 [\tau T_1 T_3 T(1 - \varepsilon)^2 - \varepsilon T_3 T(T_1^2 + \tau^2) - \varepsilon \tau^2 T_1^2 + \tau T \varepsilon(1 - \varepsilon)] \times \\ & \times (\tau T_3 + T_1 T_3 - \tau T_1 - T_1 T) \} + \Omega^6 \tau^2 T_1^2 T_3 T \varepsilon^2 \} \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\Omega T_3 \{ 1 + \Omega^2 [(1 - \varepsilon)(\tau T \varepsilon - \tau T_3) + (\tau^2 + TT_3)\varepsilon] + \Omega^4 \tau^2 T_3 T \varepsilon^2 \} \text{ при } T_1 = T \quad (2.9)$$

Выражения (2.6), (2.7) относятся к статическому, а (2.8), (2.9) к астатическому регуляторам.

Условия устойчивости системы регулирования налагают ограничения на постоянные времени звеньев, в частности коэффициенты при  $\Omega$  в (2.5) — (2.7) должны быть отрицательными и, кроме того,  $\tau > T$ ,  $T_3 \gg \tau$ ,  $T$  [6]. Для случаев (2.6), (2.7) есть очевидный нуль  $\Omega = \Omega_1$ , определяемый

одним из равенств

$$\Omega_1^2 = \frac{\tau(1-\varepsilon) - \varepsilon T}{\tau^2 T \varepsilon^2}, \quad \Omega_1^2 = \frac{\tau(1-\varepsilon) - T}{\tau^2 T \varepsilon} \quad (2.10)$$

соответствующий неустойчивой стационарной скорости. В (2.9) кроме  $\Omega = \Omega_1$  есть еще нуль  $\Omega = \Omega_0$  ( $\Omega_0 < \Omega_1$ ), соответствующий устойчивой стационарной скорости. При  $T_3 \gg \tau$ ,  $T$  значение  $\Omega_1$  примерно такое же, как в (2.6), а

$$\Omega_0^2 \approx [T_3(\tau - \varepsilon\tau - \varepsilon T)]^{-1} \quad (2.11)$$

Других нулей (не считая  $\Omega = 0$ ) нет и для более общих случаев (2.5), (2.8). В самом деле, эти выражения можно записать в виде  $-a + b\Omega^2 + c\Omega^4$  и  $1 + d\Omega^2 + l\Omega^4 + cT_3\Omega^6$ . При  $a, c > 0$  первое имеет один нуль, а второе — не более двух, если  $d$  или  $l$  (или оба) отрицательны. Отметим, что действие подвеса на характерной частоте движения ротора  $\omega = \sqrt{\kappa}/T_0$  должно быть демпфирующим, поэтому для скоростей  $\Omega_1, \Omega_0$  из (2.10, 2.11) выполняются условия  $\Omega_1 \gg \omega$ ,  $\Omega_0 \ll \omega$ . Это означает следующее: устойчивая стационарная скорость  $\Omega_0$  (2.11) не может быть номинальной из-за ее малости; использовать подкрутку можно лишь в зарезонансной области; устойчивую стационарную скорость в области подкрутки можно получить лишь при малом внешнем тормозящем моменте. Таким образом, передаточные функции (2.4) практически не обеспечивают устойчивого поддержания номинальной скорости вращения.

Однако это возможно, если использовать селективный высокооборотный фильтр в цепи обратной связи регулятора. В этом случае передаточная функция регулятора примет вид

$$v_0(p) = G\Phi_2 / (P\Phi_2 + n_0 G\Phi_1) \quad (2.12)$$

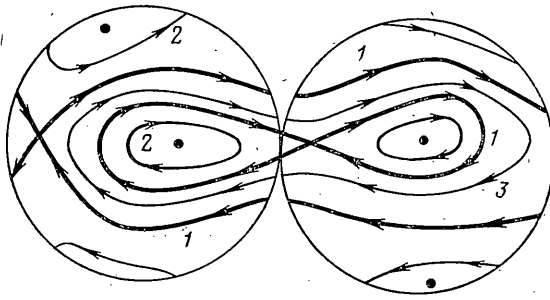
Здесь  $\Phi_1(p)/\Phi_2(p) = pT_4(1 + Q^{-1}pT_4 + p^2T_4^2)^{-1}$  — передаточная функция фильтра,  $Q$  — его добротность,  $T_4^{-1}$  — частота настройки,  $n_0$  — коэффициент, характеризующий уровень обратной связи. Подставляя (2.12) в (2.1), (2.2) и выделяя действительную и мнимую части, имеем

$$\begin{aligned} W_0(j\Omega) &= -k_0 T_0^2 \Omega^2 (w_1 + j\kappa T_0^2 \Omega^2 |\Phi_2|^{-2} w_2) w_3^{-1} \quad (2.13) \\ w_1 &= (1 - T_0^2 \Omega^2) |P|^2 + \kappa^2 |G|^2 + \kappa (2 - T_0^2 \Omega^2) \operatorname{Re} P\bar{G} + \\ &+ n_0 |\Phi_2|^{-2} \{ (1 - T_0^2 \Omega^2) [n_0 |\Phi_1|^2 |G|^2 + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \bar{\Phi}_1 \Phi_2 P\bar{G}] + \kappa (2 - T_0^2 \Omega^2) |G|^2 \operatorname{Re} \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \} \\ w_2 &= |\Phi_2|^2 \operatorname{Im} P\bar{G} + n_0 |G|^2 \operatorname{Im} \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \\ w_3 &= (1 - T_0^2 \Omega^2)^2 |P|^2 + \kappa^2 |G|^2 + 2\kappa (1 - T_0^2 \Omega^2) \operatorname{Re} P\bar{G} + \\ &+ n_0 |\Phi_2|^{-2} \{ (1 - T_0^2 \Omega^2)^2 [n_0 |G|^2 |\Phi_1|^2 + 2 \operatorname{Re} \bar{\Phi}_1 \Phi_2 P\bar{G}] + \\ &+ 2\kappa (1 - T_0^2 \Omega^2) |G|^2 \operatorname{Re} \Phi_1 \bar{\Phi}_2 \} \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение  $w_2$  из (2.13), описывающее  $\operatorname{Im} W_0$ :

$$w_2 = [(1 - T_4^2 \Omega^2)^2 - T_4^2 \Omega^2 Q^{-2}] \operatorname{Im} P\bar{G} + n_0 |G|^2 T_4 \Omega (1 - T_4^2 \Omega^2) \quad (2.14)$$

С точностью до  $Q^{-2}$  (2.14) имеет нуль на собственной частоте фильтра. Поправка  $\Delta$  порядка  $Q^{-2}$  к частоте  $T_4^{-1}$  ( $\Omega = (1 + \Delta)/T_4$ ) равна  $\Delta = -Q^{-2} \operatorname{Im} P\bar{G} / 2n_0 |G|^2$ . Производная по  $\Omega$  в этом нуле равна  $-2T_4 n_0 |G|^2 < 0$  и стационарная скорость устойчива. Отметим положительное значение полученного результата: стационарная скорость практически совпадает с собственной частотой фильтра (вне зависимости от параметров системы регулирования), и поэтому ее легко изменить сменив настройку фильтра; сам фильтр при необходимости можно включить или выключить ( $n_0 \neq 0$ ,  $n_0 = 0$ ) из схемы регулирования. Однако и в случае применения фильтра стационарная скорость должна быть заметно больше частоты  $\sqrt{\kappa}/T_0$ . Так, исследование устойчивости со статическим регулятором (2.4) при  $T_1 = 0$  показывает, что в схеме с большим коэффициентом усиления ( $\kappa \gg 1$ )



Фиг. 2

должны выполняться условия:

$$\frac{T_0}{T\sqrt{\kappa}} > \xi \left[ \frac{\varepsilon\xi}{(1+\varepsilon\xi)(\xi-1-\varepsilon\xi)} \right]^{1/2}, \quad \frac{\tau}{T} > \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (2.15)$$

$$\mu^2 - 1 + \mu^2 \xi T^2 \kappa T_0^{-2} [\mu^2(1-\varepsilon\xi-\varepsilon) - \xi] > 0$$

Здесь  $\xi = \tau/T$ ,  $\mu = T_0(T_0\sqrt{\kappa})^{-1}$  — отношение частоты настройки фильтра к «собственной частоте» ротора в регулируемом подвесе. Из последнего неравенства в (2.15) видно, что  $\mu > 1$ . К примеру,  $\xi = 3-5$ ,  $\varepsilon = 0,1-0,02$  получается, что  $T_0/T\sqrt{\kappa} \geq 0,5-1,5$ ,  $\mu \geq 1,5-2$ .

3. Рассмотрим угловые движения ротора в устойчивом стационарном режиме в случае изотропного подвеса. Пусть  $\Omega = \Omega_c$  — нуль функции  $\text{Im } W_0(j\Omega)$ , соответствующий устойчивому стационарному режиму для  $L$ . При  $\Omega = \Omega_c$   $L = 0$ ,  $\rho = 0$ , а координаты  $\sigma$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  меняются. В стационарном режиме остаются постоянными силовая функция и модуль кинетического момента

$$U_2 = 2^{-1}L(x^2/A + y^2/B + z^2/C) - Mge \cos \rho \times$$

$$\times [z \cos \chi - x \sin \chi \cos \lambda + y \sin \chi \sin \lambda]^{-1/2} e^2 \text{Re } W_0(j\Omega_c) \times$$

$$\times [z \cos \chi - x \sin \chi \cos \lambda + y \sin \chi \sin \lambda]^2 = \text{const} \quad (3.1)$$

$$L^2(x^2 + y^2 + z^2) = \text{const} \quad (3.2)$$

Переменные  $x = \sin \beta \cos \gamma$ ,  $y = \sin \beta \sin \gamma$ ,  $z = \cos \beta$  характеризуют положение вектора кинетического момента относительно ротора. Движение происходит по фазовым траекториям, определяемым пересечением эллипсоида (3.1) и сферы (3.2). Главные оси эллипсоида не совпадают с координатными осями, а центр его смещен относительно начала координат. Смещение в направлении большой и малой оси не меняет качественно картину фазовых траекторий по сравнению со случаем свободного движения. Качественное изменение происходит при смещении эллипсоида вдоль средней оси. В этом случае траектории, идущие из одного седла в другое, разрываются и, выходя из седла, приходят в него же, образуя траектории типа восьмерок (1 на фиг. 2). Помимо траекторий 2, охватывающих состояния равновесия типа центр, возникают траектории 3 (подобные контуру шва на теннисном мяче), как бы притягиваемые всеми устойчивыми состояниями равновесия. Устойчивым состояниям равновесия соответствует неизменное относительно тела положение вектора кинетического момента. Фазовая траектория стационарного движения однозначно определяется значениями  $L$  и  $U_2$  при  $\Omega = \Omega_c$ . Неизменному положению  $L$  относительно тела соответствует вполне определенное значение  $U_2$ , поэтому в общем случае  $L$  не остается неподвижным в теле. Таким образом, в изотропном регулируемом подвесе при устойчивой стационарной скорости тело совершает «нутационное движение». Переменная  $\sigma$  не входит в правые части уравнений (1.12), а скорость движения по ней определяется другими переменными. Отметим следующую особенность: если движение по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  происходит в окрестности одного из центров, то одна из координат не ме-

няет знака, поэтому линейная по  $x, y, z$  часть момента в  $\sigma$  (4.12) имеет «постоянную составляющую». Это обуславливает движение по  $\sigma$  в одном направлении, но с разной скоростью. Если же движение происходит по траектории типа  $\mathcal{Z}$  (фиг. 2), то все координаты  $(x, y, z)$  меняют знаки и движение по  $\sigma$  знакопеременное. Если же движение по  $\beta, \gamma$  значительно быстрее, чем  $MgeL^{-1}$ , то движение по  $\sigma$  представляет собой быстрое колебание плюс медленный дрейф, обусловленный наличием квадратичных членов по  $x, y, z$  и малой остаточной частью от линейных членов. Здесь происходит как бы усреднение влияния дебаланса за счет специального вида нутационного движения.

4. Выясним влияние неизотропности подвеса на раскрутку ротора. В случае неизотропного подвеса условия разгона или торможения ротора зависят не только от частотных характеристик системы регулирования, но и от углового положения вектора  $L$  в пространстве. Наиболее простой случай — симметричный подвес. Здесь возможно несколько случаев.

В первом случае регулирование есть только по оси  $O\xi_3$ , а по осям  $O\xi_{1,2}$  происходит «пассивное» удержание ротора; тогда  $\text{Im } N_1 = (1/2) \sin^2 \rho \text{Im } W_3$  и уравнения для  $L$  и  $\rho$  имеют интеграл движения

$$L \cos \rho = \text{const} \quad (4.1)$$

соответствующий сохранению проекции вектора  $L$  на ось симметрии.

Во втором случае регулирование есть по осям  $O\xi_{1,2}$  и  $\text{Im } W_1 = \text{Im } W_2$ , а по  $O\xi_3$  регулирования нет —  $\text{Im } W_3 = 0$ ; существует интеграл движения

$$L \text{tg } \rho \sin \rho = \text{const} \quad (4.2)$$

Таким образом, в обоих случаях одновременно с разгоном (или торможением) ротора происходит уход вектора  $L$  по углу  $\rho$  в соответствии с (4.1), (4.2). Если в начальном положении  $\rho = 0$ , то в первом случае не меняется ни  $\rho$ , ни  $L$ , а во втором случае не изменяется только  $\rho$ .

В третьем случае регулирование есть по всем осям, но передаточные функции отличаются лишь множителем, т.е.  $W_1 \cdot W_3^{-1} = 1 + \delta$ . Здесь  $N_1 = W_3 [1 + (\delta/2)(1 + \cos^2 \rho)]$ ,  $N_2 = (\delta/2) W_3$ . Поскольку  $\delta > -1$  (это выполняется всегда, так как знаки  $W_1$  и  $W_3$  одинаковые, что следует из требования устойчивости системы регулирования), то уравнение для  $L$  имеет те же стационарные скорости, что и в изотропном подвесе независимо от величины  $\rho$ .

Если подвес несимметричный ( $W_1 \neq W_2$ ), но каналы регулирования различаются лишь коэффициентом усиления, т.е.  $W_2 W_1^{-1} = 1 + \delta_2$ ,  $W_3 W_1^{-1} = 1 + \delta_3$ , то функции  $N_i$  имеют вид  $N_1 = W_1 + 1/2 W_1 (\delta_3 \sin^2 \rho + \delta_2 \cos^2 \rho \sin^2 \sigma + \delta_2 \cos^2 \sigma)$ ,  $N_2 = W_1 (\delta_2 \sin^2 \sigma - \delta_3)$ ,  $N_3 = W_1 \delta_2$ . Поскольку  $\delta_2, \delta_3 > -1$ , функция  $\text{Im } N_1$  имеет те же нули, что и  $\text{Im } W_1$ , поэтому стационарные скорости те же, что и в изотропном подвесе вне зависимости от углового положения вектора  $L$  в пространстве. Если же нули функций  $\text{Im } W_i$  различны, то стационарные скорости будут зависеть от углов  $\rho, \sigma$ .

**Выводы.** Момент, возникающий из-за автомодуляции тока подвеса несбалансированным ротором, является тормозящим при скоростях вращения, близких к «собственной частоте» ротора в управляемом подвесе ( $\sqrt{k}/T_0$ ). Подкрутка ротора системой регулирования возможна лишь вне этой полосы. Статический регулятор с коэффициентом передачи вида (2.4) не обеспечивает устойчивой стационарной скорости; в астатическом регуляторе такая скорость есть, но она слишком мала, чтобы быть номинальной. Для получения устойчивой стационарной скорости вращения может быть использован высокочастотный селективный фильтр в обратной связи регулятора, в этом случае стационарная скорость определяется не параметрами системы регулирования, а частотой настройки фильтра. Хотя управляемый подвес является неконсервативной системой, его действие не демпфирует «нутационных колебаний» ротора, более того, специальные виды «нутационного движения» могут быть использованы для уменьшения ухода несбалансированного ротора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Маргыненько Ю. Г.* Движение несбалансированного гироскопа с неконтактным подвесом.— Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 4, с. 13—19.
2. *Брюшков В. Г., Маргыненько Ю. Г.* Уходы несбалансированного гироскопа в неравновесном электростатическом подвесе.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6, с. 33—40.
3. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
4. *Урман Ю. М.* Неприводимые тензоры и их применение в задачах движения твердого тела в силовых полях.— В сб.: Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1983, вып. 15, с. 75—87.
5. *Варшавович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
6. *Ворожков В. С.* Устойчивость управляемого сверхпроводящего подвеса.— Изв. вузов. Приборостроение, 1984, т. 24, № 8, с. 69—74.

Горький

Поступила в редакцию  
4.III.1985