МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3

О МЕТОДЕ ФАЙЛОНА РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПО ОДНОРОДНЫМ РЕШЕНИЯМ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ГОМИЛКО А. М., МЕЛЕШКО В. В.

Предложено обобщение метода Файлона, позволяющее получать двукратные разложения, необходимость в которых возникает при решении методом однородных решений задач теории упругости в полуполосе. В качестве примера рассмотрена задача об изгибе упругой полуполосы под действием самоуравновешенной силовой нагрузки на торце.

1. Задача о разложении произвольной гладкой функции $f(y)$ в ряд по заданной системе функций $\varphi(z_p, y)$:

$$f(y)=\sum_p C_p\varphi(z_p, y) \tag{1.1}$$

где z_p — простые корни трансцендентного уравнения $\Delta(z)=0$, известна еще со времен Фурье. В акустике, теории колебаний, теории теплопроводности такая задача решается обычным для математической физики методом, основанным на отыскании биортогональной к $\varphi(z_p, y)$ системы функций $\chi(z_p, y)$. Определенным недостатком такого подхода является отсутствие в общем случае алгоритма построения функции $\chi(z, y)$ по заданным функциям $\varphi(z, y)$ и $\Delta(z)$.

Другой подход к задаче о разложении (1.1), основанный на применении теории вычетов, был предложен Коши [1] и развит Файлоном [2]. Для достаточно общего вида целых функций $\varphi(z, y)$ и $\Delta(z)$ и полинома $f(y)$ был указан алгоритм построения мероморфной функции $F(z)$ комплексного переменного z. Функция $F(z)$ имеет единственный полюс в точке $z=0$ и удовлетворяет соотношениям

$$\operatorname*{Res}_0 \frac{F(z)\varphi(z,y)}{\Delta(z)}=-f(y), \qquad \lim_{R_m\to\infty} I_m=0, \qquad I_m=\int\limits_{|z|=R_m}\frac{F(z)\varphi(z,y)}{\Delta(z)}dz \tag{1.2}$$

для некоторой последовательности $R_m\to\infty$. Применение теоремы о вычетах к последовательности интегралов I_m с учетом (1.2) дает разложение (1.1) для $f(y)$ с коэффициентами

$$C_p=F(z_p)/\Delta'(z_p) \tag{1.3}$$

Таким способом в [2] были получены различные результаты по разложимости функций в негармонические ряды Фурье специального вида, ряды Бесселя и Шлемильха. При этом, однако, функция $\varphi(z, y)$ зависела только от произведения zy.

В качестве более общего случая Файлон рассмотрел плоскую задачу теории упругости об изгибе прямоугольника $|x|\leqslant l$, $|y|\leqslant 1$ под действием силовой нагрузки на торцах $|x|=l$. Использование однородных решений при выполнении граничных условий приводит к проблеме одновременного разложения пары функций $f_1(y)$, $f_2(y)$, задающих нормальную и касательную нагрузки, в ряды

$$f_j(y)=\sum_p C_p\varphi_j(z_p, y) \qquad (j=1,2), \qquad \Delta(z_p)=0 \tag{1.4}$$

по двум различным системам комплексных функций $\varphi_1(z_p, y)$ и $\varphi_2(z_p, y)$. К такой же задаче (1.4), но при дополнительном условии $\operatorname{Im} z_p>0$, в [3] сведена плоская задача теории упругости и для полуполосы $x\geqslant0$, $|y|\leqslant1$ при воздействии самоуравновешенной силовой нагрузки на торце $x=0$.

Применение Файлоном развитого им метода позволило получить лишь первое из разложений (1.4): функция $F(z)$ (а значит, и коэффициенты C_p) определялась по $f_1(y)$ однозначно, без привлечения функции $f_2(y)$. Невозможность получения двукратного разложения таким способом свидетельствует о том, что основного предположения работы [2] о наличии у функции $F(z)$ полюса только в точке $z=0$ в данном случае недостаточно.

В дальнейшем метод Файлона применялся в [4—6] при изучении различных плоских и осесимметричных задач теории упругости для прямоугольника и круглой толстой плиты. В этих работах, как и в [2], удавалось точно удовлетворить только одному граничному условию, а второе выполнялось интегрально с использованием принципа Сен-Венана.

Цель публикуемой работы состоит в обобщении метода Файлона, позволяющем для плоских задач теории упругости получить разложения вида (1.4), т. е. точно выполнить оба граничных условия. Принципиальным моментом при этом является предположение, что искомая мероморфная функция $F(z)$, по которой определяются коэффициенты C_p в двукратном разложении, имеет не один, а бесконечное число полюсов в специально выбранных точках комплексной плоскости.

2. Рассмотрим общую схему обобщения метода Файлона для задачи (1.4) при условии $\operatorname{Im} z_p>0$. Пусть $F(z)$ — мероморфная в замкнутой верхней полуплоскости функция с полюсами в точках $z=\zeta_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, $\operatorname{Im}\zeta_k>0$, не совпадающими с корнями z_p уравнения $\Delta(z)=0$. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_j(z, y)=F(z)\varphi_j(z, y)/\Delta(z) \quad (j=1,\ 2) \tag{2.1}$$

и предположим, что они не имеют полюсов на вещественной оси, причем сходятся интегралы и ряды, где символ Res означает вычет функции в точке ζ_k:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(s, y)\,ds<\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{\zeta_k}\Phi_j(z, y)<\infty \tag{2.2}$$

Пусть найдется такая последовательность положительных чисел $R_m\to\infty$, что по контурам $\Gamma_m(z: |z|=R_m,\ \operatorname{Im} z\geqslant0\}$

$$\lim_{R_m\to\infty}\int\limits_{\Gamma_m}\Phi_j(z, y)\,dz=0 \tag{2.3}$$

Тогда применение теоремы о вычетах позволяет утверждать существование пределов и справедливость равенств

$$\lim_{R_m\to\infty}\sum_{|z_p|<R_m}\frac{F(z_p)\varphi_j(z_p, y)}{\Delta'(z_p)}=\sum_p\frac{F(z_p)\varphi_j(z_p, y)}{\Delta'(z_p)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(s, y)\,ds=\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{\zeta_k}\Phi_j(z, y)+\sum_p\frac{F(z_p)}{\Delta'(z_p)}\varphi_j(z_p, y) \tag{2.4}$$

Отсюда следует существование двукратного разложения (1.4) с $\operatorname{Im} z_p>0$, если мероморфная функция $F(z)$ удовлетворяет системе функциональных уравнений

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(s, y)\,ds-\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{k}\Phi_j(z, y)=f_j(y) \qquad (j=1, 2) \tag{2.5}$$

При этом коэффициенты C_p имеют вид (1.3), а характер сходимости в (1.4) будет определяться характером сходимости интегралов и рядов (2.2), а также взаимным расположением корней z_p и контуров Γ_m.

Относительно выбора функции $F(z)$ и полюсов ζ_k в общем случае можно отметить следующее. Учитывая необходимость разложения двух функций в ряд (1.4), функцию $F(z)$ целесообразно искать в виде

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{(z-\zeta_k)^2}+\frac{b_k}{z-\zeta_k}\right]+F_0(z) \tag{2.6}$$

Здесь a_k и b_k — две последовательности неизвестных постоянных, а $F_0(z)$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция, линейно зависящая от a_k и b_k. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{\zeta_k}\Phi_j(z,y)=a_k\frac{\varphi_j'(\zeta_k,y)}{\Delta(\zeta_k)}+\left[b_k-a_k\frac{\Delta'(\zeta_k)}{\Delta(\zeta_k)}\right]\frac{\varphi_j(\zeta_k,y)}{\Delta(\zeta_k)}$$

(штрих означает производную по z) и система (2.5) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_j(s,y)\,ds-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\varphi_j'(\zeta_k,y)}{\Delta(\zeta_k)}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[b_k-a_k\frac{\Delta'(\zeta_k)}{\Delta(\zeta_k)}\right]\frac{\varphi_j(\zeta_k,y)}{\Delta(\zeta_k)}=f_j(y)\qquad(j=1,2) \tag{2.7}$$

который показывает, что эффективность развитой схемы определяется базисными свойствами систем функций $\varphi_j(\zeta_k, y)$, $\varphi_j'(\zeta_k, y)$. При этом система двух функциональных уравнений (2.7) может быть сведена к парной бесконечной системе алгебраических уравнений относительно a_k, b_k.

Роль функции $F_0(z)$ сводится к тому, чтобы интегралы по действительной оси в системе (2.7) вносили малое возмущение в ту же систему без интегральных членов, т. е. условия на функцию $F_0(z)$ сводятся к требованию регулярности, получающейся из (2.7), парной бесконечной алгебраической системы. Возможность выбора вида такой функции $F_0(z)$ в конечном итоге тесно связана с тем, насколько близко расположены последовательности ζ_k и z_p.

3. В качестве примера использования изложенной общей схемы рассмотрим плоскую задачу изгиба упругой полуполосы $x\geqslant 0$, $|y|\leqslant 1$ под действием самоуравновешенной силовой нагрузки на торце

$$\sigma_x=f_1(y),\qquad \tau_{xy}=f_2(y)\qquad(x=0) \tag{3.1}$$

при нулевых граничных условиях на боковой поверхности

$$\sigma_y=\tau_{yx}=0\qquad(y=\pm 1) \tag{3.2}$$

Нечетная $f_1(y)$ и четная $f_2(y)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции подчинены условию самоуравновешенности нагрузки и требованию парности касательных напряжений в угловых точках $x=0$, $y=\pm 1$:

$$\int_{-1}^{1}f_1(y)\,y\,dy=0,\qquad \int_{-1}^{1}f_2(y)\,dy=0,\qquad f_2(\pm 1)=0 \tag{3.3}$$

Следуя схеме метода однородных решений [3, 4] и выбирая функцию напряжений Эри, удовлетворяющую бигармоническому уравнению, в виде

$$U(x,y)=\sum_{p}C_p\frac{\psi(z_p,y)}{z_p^{\,2}}e^{iz_px},\qquad \operatorname{Im}z_p>0 \tag{3.4}$$

$$\psi(z,y)=z(\operatorname{ch}z\operatorname{sh}zy-y\operatorname{sh}z\operatorname{ch}zy)$$

где z_p — корни уравнения

$$\Delta(z) \equiv \operatorname{sh} 2z - 2z = 0 \tag{3.5}$$

приходим к выражениям для составляющих тензора напряжений в полуполосе

$$\sigma_x(x, y) = \sum_p C_p \varphi_1(z_p, y) \exp(iz_p x) \tag{3.6}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_p C_p \varphi_2(z_p, y) \exp(iz_p x)$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_p C_p \psi(z_p, y) \exp(iz_p x)$$

$$\varphi_1(z, y) = (2 \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z) \operatorname{sh} zy + zy \operatorname{sh} z \operatorname{ch} zy \tag{3.7}$$

$$\varphi_2(z, y) = i[(z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z) \operatorname{ch} zy - zy \operatorname{sh} z \operatorname{sh} zy]$$

В представлении (3.6) граничные условия (3.2) для нормальных напряжений выполнены тождественно, а для касательных — в силу уравнения (3.5). Выполнение граничных условий (3.1) приводит к задаче разложения (1.4) с $\varphi_1(z, y)$, $\varphi_2(z, y)$, $\Delta(z)$, определяемыми согласно (3.5) и (3.7).

Анализ уравнения (3.5) показывает [2, 3], что в замкнутой верхней полуплоскости оно имеет трехкратный корень $z=0$, отвечающий несамоуравновешенным (элементарным) однородным решениям, и набор симметрично расположенных пар комплексных корней $z_p = \pm\xi_p + i\eta_p$. При этом

$$z_p = \pm {}^1/_2 \ln (4p+1)\pi + i\pi(p + {}^1/_4) + O(\ln p/p) \tag{3.8}$$

Следуя [2], можно показать, что начиная с некоторого m_0 на контурах $\Gamma_m = \{z : |z| = R_m, \ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $R_m = \pi(m + {}^3/_4)$ справедлива оценка

$$|\Delta(z)| > \mathrm{const}\,(R_m + \exp 2|\operatorname{Re} z|) \qquad (z \in \Gamma_m) \tag{3.9}$$

причем при $m \geqslant m_0$ между Γ_m и Γ_{m+1} лежит только одна пара корней z_p.

Полагая $\zeta_k = i\beta_k$, $\beta_k = k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, находим

$$\varphi_1(\zeta_k, y) \equiv (-1)^k \beta_k \sin \beta_k y, \quad \varphi_1'(\zeta_k, y) \equiv i(-1)^k \sin \beta_k y \tag{3.10}$$

$$\varphi_2(\zeta_k, y) \equiv (-1)^{k+1} \beta_k \cos \beta_k y, \quad \varphi_2'(\zeta_k, y) \equiv 0$$

Выбирая $F(z)$ в виде (2.6) с $F_0(z) = \sum [a_k/(z+\zeta_k)^2 - b_k/(z+\zeta_k)]$ $(k=1, 2, \ldots)$, приходим к выражению $F(z) = \sum (A_k z^2 + B_k)/(\beta_k^2 + z^2)^2$, где $A_k = 2a_k + 2i\beta_k b_k$, $B_k = -2\beta_k^2 a_k + 2i\beta_k^3 b_k$. При этом на действительной оси функция $\Phi_2(z, y)$ не имеет полюсов, а функция $\Phi_1(z, y)$ не будет иметь полюса в точке $z=0$ при дополнительном условии $F(0)=0$.

Система функциональных уравнений (2.7) с учетом (3.10) принимает вид

$$-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_k}{4\beta_k^3} \sin \beta_k y = f_1(y) \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(s, y)\, ds + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{A_k \beta_k^2 + B_k}{8\beta_k^3} \cos \beta_k y = f_2(y)$$

Интеграл по действительной оси в первом уравнении тождественно обращается в нуль в силу нечетности по s функции $\Phi_1(s, y)$.

Для функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ имеют место представления в виде рядов Фурье

$$f_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_{1,k} \sin \beta_k y, \qquad f_2(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_{2,k} \cos \beta_k y + \frac{f_{2,0}}{2}$$

$$f_{1,k}=-2f_1(1)/\beta_k+O(1/\beta_k^2),\quad f_{2,k}=O(1/\beta_k^2)\quad (k\to\infty) \tag{3.12}$$

причем в силу условий (3.3):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{1,k}}{\beta_k}=0,\quad f_{2,0}=0,\quad \sum_{k=1}^{\infty}f_{2,k}=0 \tag{3.13}$$

Тогда из первого уравнения в (3.11) получаем $B_k=-4\beta_k^3 f_{1,k}$, что с учетом (3.13) обеспечивает выполнение условия $F(0)=0$. Используя разложение в ряд Фурье

$$\varphi_2(s,y)=-4is\,\mathrm{sh}^2 s\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\beta_k^2}{(\beta_k^2+s^2)^2}\cos\beta_k y$$

из (3.11) приходим к системе относительно A_k и $F(s)$:

$$\frac{A_k}{8\beta_k}-\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(s)\,s\,\mathrm{sh}^2 s}{\Delta(s)}\frac{\beta_k^2}{(s^2+\beta_k^2)^2}ds-\frac{f_{1,k}}{2}=f_{2,k}\quad (k=1,2,\ldots) \tag{3.14}$$

$$F(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k s^2-4\beta_k f_{1,k}}{(\beta_k^2+s^2)^2}\quad (-\infty<s<\infty)$$

Вводя новые неизвестные постоянные Y_k и четную функцию $X(s)$ по формулам $Y_k={}^1/_8A_k-{}^1/_2f_{1,k}\beta_k$, $X(s)=F(s)\,s\,\mathrm{sh}^2 s/\Delta(s)$, вместо (3.14) получаем парную бесконечную линейную интегроалгебраическую систему уравнений

$$Y_k=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}X(s)\frac{\beta_k^3}{(s^2+\beta_k^2)^2}ds+\beta_k f_{2,k}\quad (k=1,2,\ldots) \tag{3.15}$$

$$X(s)\frac{\Delta(s)}{2\,\mathrm{sh}^2 s}=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k\frac{4s^3}{(\beta_k^2+s^2)^2}+2sH(s)\quad (0\leqslant s<\infty)$$

$$H(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k f_{1,k}(s^2-\beta_k^2)}{(\beta_k^2+s^2)^2}=\frac{1}{2\,\mathrm{sh}^2 s}\int_{-1}^{1}f_1(y)\left[\varphi_1(s,y)-\mathrm{sh}\,s\,\mathrm{sh}\,sy\right]ds$$

$$H(s)=O(s^2)\quad (s\to 0)$$

Система (3.15) регулярная и к ее исследованию можно применить методику, изложенную в [7]. Условия, наложенные на $f_1(y)$ и $f_2(y)$, позволяют установить оценки для свободных членов $\beta_k f_{2,k}=O(1/\beta_k)$ $(k\to\infty)$ $sH(s)=O(1/s)$ $(s\to\infty)$ и доказать справедливость закона асимптотических выражений

$$Y_k=a_0+O(1/\beta_k^{1/2})\quad (k\to\infty),\quad X(s)=a_0+O(1/s^{1/2})\quad (s\to\infty) \tag{3.16}$$

где a_0 — некоторая постоянная, зависящая от вида нагрузки. Знание асимптотики (3.16) позволяет использовать разработанный в [7] эффективный алгоритм численного решения системы (3.15).

Анализ проведенных выкладок показывает, что для мероморфной функции

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(8Y_k+4\beta_k f_{1,k})z^2-4\beta_k^3 f_{1,k}}{(\beta_k^2+z^2)^2}$$

выполнена оценка

$$|F(z)|=O(1/|z|)\quad (|z|\to\infty)$$
$$(\mathrm{Im}\,z\geqslant 0,\ |z-i\beta_k|>{}^1/_4,\quad k=1,2,\ldots) \tag{3.17}$$

Построенная таким образом функция $F(z)$ при каждом $|y|<1$ удовлетворяет как системе (3.15), так и (3.11). При этом ряды и интегралы (2.2) сходятся равномерно при $|y|\leqslant h<1$. Использование (3.12), оценок (3.16), (3.17) и леммы Жордана позволяет доказать равномерное по y, $|y|\leqslant h$ стремление к нулю интегралов (2.3) для контуров Γ_m из (3.9).

Таким образом, для случая изгибной деформации полуполосы имеет место следующее утверждение: для любой пары дважды непрерывно дифференцируемых функций $f_1(y)$, $f_2(y)$, удовлетворяющих условиям (3.3), при любом $|y|\leqslant 1$ справедливо двукратное разложение (1.4) с коэффициентами

$$C_p=\frac{F(z_p)}{\Delta'(z_p)}=\frac{2z_p^2}{\operatorname{sh}^2 z_p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y_k}{(\beta_k^2+z_p^2)^2}+\frac{H(z_p)}{\operatorname{sh}^2 z_p}.$$

При этом с учетом (3.17) и асимптотики корней z_p (3.8) $|C_p|=O(1/p^2)$ $(p\to\infty)$. Для $|y|\leqslant h<1$ выполнены оценки

$$\sum_{j=1}^{2}\Big|f_j(y)-\sum_{|z_p|<R_m}C_p\varphi_j(z_p,y)\Big|<\frac{D(h)}{R_m^{(1-h)/3}}\quad (m=1,2,\ldots)$$

обеспечивающие равномерную сходимость разложения (1.4) на любом отрезке $[-h, h]$.

Таким образом, развитое здесь обобщение метода Файлона позволило в рассмотренной задаче получить явный вид коэффициентов разложения в (1.4), установить асимптотику их поведения при $p\to\infty$ и равномерный внутри интервала характер сходимости рядов по однородным решениям. Указанный метод получения двукратного разложения по однородным решениям применим ко всем родственным задачам статики упругих тел конечных размеров [7].

Авторы благодарят А. Ф. Улитко за внимание и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cauchy A. L.* Sur les residus des fonctions exprimées par des intégrales definies.— Oeuvres completes, 1889, ser. 2, t. 7, p. 393–430.
2. *Filon L. N. G.* On the expansion of polynomials in series of functions.— Proc. Lond. Math. Soc., 1907, ser. 2, v. 4, p. 396–430.
3. *Dougall J.* An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate.— Trans. Roy. Soc. Edinbourgh, 1904, v. 41, p. 129—228.
4. *Лурье А. И.* К теории толстых плит.— ПММ, 1942, т. 6, вып. 2/3, с. 151—168.
5. *Прокопов В. К.* Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой.— ПММ, 1950, т. 14, вып. 5, с. 527—536.
6. *Прокопов В. К.* Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, с. 45—56.
7. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.

Киев

Поступила в редакцию 15.I.1985