

самолетов. Задача решалась методом построения амплитудно-частотных характеристик с последующим пересчетом изменения ресурса крыла, вызванного снижением его нагруженности. При этом часть исследований проведена экспериментально, часть — расчетным путем при помощи математической модели. В качестве физической модели была использована динамически подобная модель крыла самолета ТУ-154. Результаты представлены на фиг. 4, 5. В частности, на фиг. 4 изображены экспериментальные и расчетные относительные амплитудно-частотные характеристики в частотной области первого изгибного тона колебаний крыла: штриховой и сплошной линией показаны характеристики при выключенной и включенной системе демпфирования (расчет), а штрихпунктирными линиями ограничены экспериментально полученные значения амплитуд изгибных колебаний крыла. Графики показывают хорошую сходимость результатов расчета и эксперимента, а также существенное снижение амплитуд  $A$  колебаний при включенной системе. На фиг. 5 представлены результаты расчетов относительного увеличения ресурса ( $T$ ) верхней панели крыла с системой демпфирования по сравнению с исходным крылом без системы для самолетов типа Ан-12 (кривая 1), ИЛ-76 (2), Ан-22 (3) в зависимости от отношения массы системы демпфирования ( $n$ ) к массе конструкции крыла.

Один из проведенных экспериментов заключался в предотвращении крутильного флаттера аэродинамической поверхности, имеющего место при больших углах атаки в результате аэродинамических срывных явлений. Модель аэродинамической поверхности с размещенной внутри нее системой демпфирования по схеме скоростного гироскопа устанавливалась в аэродинамической трубе в потоке воздуха под некоторым критическим углом, при котором возникали автоколебания значительной амплитуды. Амплитуды колебаний регистрировались при выключенной и включенной системе демпфирования и сравнивались для различных по мощности систем. Эти результаты представлены на фиг. 6 в виде зависимости степени снижения амплитуды колебаний поверхности  $\gamma$  от кинетического момента ротора гироскопа ( $A$  и  $A'$  — амплитуды колебаний при выключенной и включенной системе соответственно,  $H$  — кинетический момент ротора гироскопа в  $\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ ). Видно, что есть возможность значительного снижения уровня возникающих колебаний.

Отметим, что во всех приведенных задачах для достижения требуемого результата (по увеличению декремента колебаний или снижению амплитуд колебаний) относительная масса системы демпфирования, как правило, не превышала 1% от массы защищаемого объекта.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что применение силовых гироскопов в задачах управления упругими колебаниями частей конструкции планера самолета возможно и в ряде случаев полезно. В особенности это касается тех режимов эксплуатации самолетов, где использование других систем неэффективно (на земле и пр.). Кроме того, следует подчеркнуть относительную простоту и небольшую массу таких устройств — факторы, которые могут оказаться решающими при выборе той или иной системы управления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson W., Tait P. Treatise of Natural Philosophy. Pt I. Oxford: Univ. Press, 1967. 727 p.
2. Метелицын И. И. К вопросу о гироскопической стабилизации. — Докл. АН СССР, 1952, т. 86, № 1, с. 31—34.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
4. Меркин Д. Р. Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. М.: Изд-во МГУ, 1976. 404 с.
6. Холодильни А. Н., Шмырев А. Н. Мореходность и стабилизация судов на волнении. Л.: Судостроение, 1976. 328 с.
7. Арнольд Р. Н., Мондер Л. Гиродинамика и ее техническое применение. М.: Машиностроение, 1964. 468 с.
8. Каргу Л. И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 172 с.
9. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Холфман Р. Л. Аэроупругость. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 799 с.

Рига

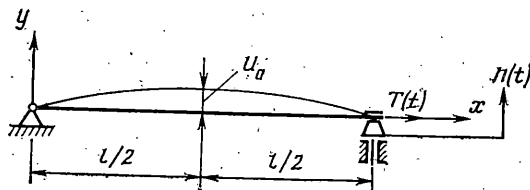
Поступила в редакцию  
3.III.1985

УДК 534.1

### ВИБРАЦИОННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

БЕРЕСНЕВИЧ В. И., ЦЫФАНСКИЙ С. Л.

В механике известны случаи, когда неустойчивую систему можно превратить в устойчивую с помощью дополнительных вибрационных воздействий. Примером может служить устойчивость перевернутого положения маятника при колебаниях точки подвеса [1, 2]. В более общей постановке вопросы параметрической стабилизации неустойчивых форм равновесия механических систем рассмотрены в [3—6].



Фиг. 1

В данной работе на основе изучения взаимодействия вынужденных и параметрических нелинейных колебаний гибкого элемента (нити) на специализированном аналоговом устройстве установлена возможность стабилизации нелинейной параметрической системы с помощью внешнего вибрационного воздействия. Полученный результат подтверждает высказанное в [7] мнение о богатом многообразии необычных явлений и свойств, присущих нелинейной системе в случае одновременной генерации в ней вынужденных и параметрических колебаний.

1. Рассмотрим поперечные колебания туго натянутого гибкого элемента (нити) при кинематическом и параметрическом возбуждении. Необходимость проведения подобных исследований возникает при динамическом анализе и синтезе многих машин и механизмов [8, 9].

Расчетная схема рассматриваемой системы изображена на фиг. 1. Кинематическое возбуждение колебаний гибкого элемента обусловлено принудительным поперечным перемещением одного из его концов по закону  $h(t) = h \sin \omega t$ , причиной же параметрического возбуждения является периодическая пульсация силы осевого натяжения  $T(t) = T_0(1 + \mu \sin \Omega t)$ .

Составим дифференциальное уравнение движения. Координатную ось  $x$  направим вдоль оси находящегося в равновесии гибкого элемента. Внутреннее рассеяние энергии опишем гипотезой Фойгхта. Весом гибкого элемента в сравнении с силой его предварительного натяжения  $T_0$  пренебрегаем. Тогда, предполагая, что колебания происходят в одной плоскости и все точки гибкого элемента движутся при этом перпендикулярно оси  $x$ , можно записать

$$T_0(1 + \mu \sin \Omega t) \left[ 1 + f \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b T_0(1 + \mu \sin \Omega t) \left[ 1 + f \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $y$  — поперечное перемещение точки гибкого элемента с координатой  $x$ ,  $\mu$  — коэффициент параметрического возбуждения,  $\Omega$  — частота параметрического возбуждения,  $b$  — коэффициент внутреннего трения,  $\rho$  — линейная плотность гибкого элемента.

Функционал  $f(\partial y / \partial x)$  в уравнении (1.1) учитывает появление дополнительного натяжения, вызванного деформацией гибкого элемента в процессе его поперечных колебаний. В [10] показано, что если зависимость между нормальным напряжением в гибком элементе и его относительным удлинением подчиняется закону Гука, то этот функционал принимает вид

$$f \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{EF}{2T_0 l} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.2)$$

Здесь  $E$  — модуль упругости материала,  $F$  и  $l$  — соответственно площадь поперечного сечения и длина гибкого элемента. Приращение натяжения, таким образом, обусловлено удлинением гибкого элемента в целом и не зависит от координаты  $x$ .

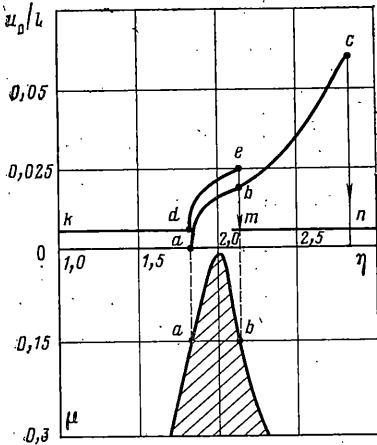
Выражение  $[1 + 1/2(\partial y / \partial x)^2]$  уравнения (1.1) учитывает так называемую геометрическую нелинейность гибкого элемента [10].

Уравнение (1.1) дополняется граничными условиями на концах гибкого элемента

$$y(x=0, t) = 0, \quad y(x=l, t) = h \sin \omega t \quad (1.3)$$

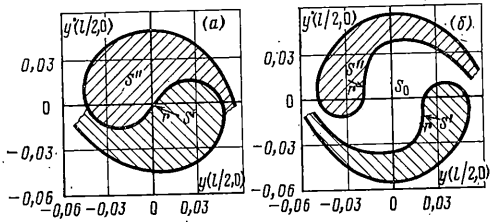
в которых  $h$  и  $\omega$  — соответственно амплитуда и частота кинематического возбуждения.

Аналитическое решение уравнения (1.1) с учетом (1.2)–(1.3) сопряжено с серьезными математическими трудностями. Поэтому было признано целесообразным в качестве средства исследования использовать разработанную в проблемной лаборатории динамики машин и механизмов РПИ специализированную АВМ — прямых аналогий [11], предназначенную для решения сложных нелинейных задач динамики. Эта АВМ сочетает в себе электрические модели-аналоги на пассивных



Фиг. 2

элементах (индуктивности, емкости, резисторы, трансформаторы) и активные блоки (блок параметрического возбуждения, блок нелинейных упругих и диссипативных сил), синтезированные на базе современных полупроводниковых микросхем. К числу преимуществ специализированной АВМ относятся быстроедействие, фактическое отсутствие этапа программирования, возможность одновременного решения до 60 дифферен-



Фиг. 3

циальных уравнений второго порядка. Метод прямых аналогий использует аналогию между различными по своей природе физическими явлениями: механическими колебаниями и колебаниями токов и напряжений в электрической модели [12].

Электрическая схема соединения решающих блоков для моделирования нелинейных колебаний гибкого элемента приведена в [13]. При ее синтезе исходное дифференциальное уравнение (1.1) заменялось эквивалентной системой конечно-разностных уравнений. Численные соответствия между параметрами исследуемой механической системы и электрической модели устанавливались на основе теории подобия [14]. Оценка точности аналогового моделирования осуществлялась путем сравнения результатов, полученных на АВМ, с известными точными решениями соответствующих дифференциальных уравнений, а также с результатами счета на ЦВМ. Установлено, что погрешность определения на АВМ резонансных частот не превышает 5%, резонансных перемещений — 10%.

2. Предварительно рассмотрим случай чисто параметрического возбуждения колебаний ( $h=0$ ). На фиг. 3, а для случая  $x=1/2l$  (пучность первой формы колебаний) и  $\eta=2$  изображена диаграмма областей притяжения параметрических режимов. Начало координат ( $y(x=1/2, 0)=0, y'(x=1/2, 0)=0$ ) является седловой точкой (тривиальное решение, соответствующее состоянию неустойчивого покоя системы). Два устойчивых фокуса  $S'$  и  $S''$  соответствуют двум устойчивым параметрическим режимам, имеющим равные амплитуды, но сдвинутым по фазе друг относительно друга на  $\pi$ . Каждому из этих режимов соответствует своя область начальных условий.

На фиг. 2 на плоскости параметров  $\mu, \eta=\Omega/\omega_{c1}$ , где  $\omega_{c1}$  — низшая собственная частота малых поперечных колебаний гибкого элемента, заштрихована область основного параметрического резонанса ( $\Omega=2\omega_{c1}$ ), построенная по результатам аналогового моделирования. Выше на той же фиг. 2 изображена резонансная кривая  $abc$ , соответствующая параметрическим колебаниям гибкого элемента по первой форме. В качестве амплитуды колебаний по оси ординат отложена безразмерная величина  $u_0/l$ , где  $u_0$  — пиковое значение поперечного перемещения гибкого элемента в пучности первой формы колебаний. Для определенности принято, что параметры расчетной схемы при этом удовлетворяют условиям  $\rho lg/EF=6 \cdot 10^{-6}$ ,  $b\omega_{c1}=0,003$ ,  $T_0/EF=2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu=0,15$ .

Возможность возникновения параметрических колебаний во многом зависит от начальных условий. В частотном интервале  $ab$  параметрическое возбуждение имеет место при любых начальных условиях, кроме нулевых ( $y(x, t=0)=0, y'(x, t=0)=0$ ).

Для выхода на параметрический режим, соответствующий участку  $bc$  резонансной кривой (зона нелинейного затягивания колебаний), необходима реализация начальных условий, существенно отличающихся от нулевых. На фиг. 3, б изображена диаграмма областей притяжения, полученная при  $x=1/2l$  и  $\eta=2,7$ . В этом случае существуют две области начальных условий, приводящие к двум устойчивым параметрическим режимам (устойчивые фокусы  $S'$  и  $S''$ ). Все другие начальные значения приводят к устойчивому тривиальному решению  $y(x, t)=0, y'(x, t)=0$ , которому соответствует устойчивый фокус  $S_0$ .

На основе анализа областей притяжения можно утверждать, что параметрические колебания гибкого элемента обладают ограниченным запасом устойчивости (в качестве количественной меры запаса устойчивости режима можно использовать величину  $r$ , характеризующую расстояние от устойчивого фокуса до границы соответствующей области). Потеря устойчивости возможна, например, при некотором возмущении координат  $y, y'$  режима движения. Внутри области параметрического резонанса потеря устойчивости одним из режимов ( $S'$ ) приводит к возбуждению другого режима ( $S''$ ), сдвинутого по фазе относительно первого на  $\pi$ . Амплитуда установившихся параметрических колебаний при этом остается неизменной. В ре-

№	$T_0/(EF) \cdot 10^4$	$b\omega_{c1} \cdot 10^3$	$\mu$	$u_0/l$	$h_*/l$	$\nu = \omega/\omega_{c1}$
1	5	8	0,45	0,0130	0,0038...0,0043	0,15...0,84
2	2	3	0,10	0,0200	0,0049...0,0060	0,20...0,79
3	1,5	10	0,50	0,0165	0,0042...0,0053	0,19...0,82
4	3	14	0,05	0,0032	0,0008...0,0010	0,23...0,83
5	4,5	16	0,25	0,0056	0,0014...0,0019	0,21...0,78
6	0,5	12	0,20	0,0076	0,0019...0,0025	0,18...0,75
7	1	4	0,40	0,0230	0,0055...0,0077	0,16...0,77
8	2,5	18	0,35	0,004	0,0011...0,0015	0,20...0,80
9	3,5	2	0,30	0,0215	0,0052...0,0071	0,21...0,79
10	4	6	0,15	0,0108	0,0028...0,0035	0,23...0,77

жиме же затягивания возмущение координат  $y(x, t)$ ,  $y^*(x, t)$  способно привести к срыву параметрических колебаний и переходу системы в состояние устойчивого покоя (устойчивый фокус  $S_0$ ). Практически это означает, что в частотном интервале, соответствующем участку  $bc$ , стабилизация состояния покоя нелинейной параметрической системы может быть достигнута с помощью соответствующим образом подобранных внешних возмущений фазовых координат.

3. Рассмотрим результирующие колебания, обусловленные одновременным приложением к гибкому элементу кинематического и параметрического воздействий.

В этом случае, как показали исследования, путем надлежащего выбора параметров  $h$  и  $\omega$  кинематического возбуждения может быть достигнуто возмущение фазовых координат  $y(x, t)$ ,  $y^*(x, t)$ , обеспечивающее срыв нелинейных параметрических колебаний гибкого элемента в режиме затягивания (частотный интервал, соответствующий  $bc$  на фиг. 2). Более того, оказалось, что при определенных значениях  $h$  и  $\omega$  можно добиться полного исчезновения затягивания параметрических колебаний, т. е. осуществить в соответствующем частотном интервале стабилизацию нелинейной системы к параметрическому возбуждению.

Значения  $h$  и  $\omega$ , способствующие такой стабилизации, устанавливались на основе факторного эксперимента. Основные параметры системы (факторы), приведенные к безразмерному виду, при этом варьировались в следующих пределах:  $T_0/EF = (0,5 \dots 5) \cdot 10^{-4}$ ;  $b\omega_{c1} = 0,002 \dots 0,018$ ;  $\mu = 0 \dots 0,5$ ;  $\eta = \Omega/\omega_{c1} = 2 \dots 3$ . Для факторов:  $T_0/EF$ ,  $b\omega_{c1}$  и  $\mu$  внутри диапазона варьирования было выбрано по 10 уровней. Значение фактора  $\eta = \Omega/\omega_{c1}$  выбиралось в процессе моделирования из условия настройки системы на частоту, большую верхней границы области параметрического резонанса на 2...3% (на фиг. 2 этому значению  $\eta$  соответствует точка резонансной кривой  $abc$ , расположенная немного правее точки  $b$ ). Тем самым система настраивалась на параметрический режим, имеющий в пределах области затягивания  $bc$  наибольший запас устойчивости. Размещение экспериментальных точек в пространстве факторов осуществлялось на основе плана равномерного распределения [15].

Результаты факторного эксперимента представлены в таблице (через  $h_*$  обозначено минимальное значение  $h$ , обеспечивающее при заданном  $\nu = \omega/\omega_{c1}$  подавление параметрических колебаний гибкого элемента):

Как показывает анализ приведенных данных, вне зависимости от величин  $T_0/EF$ ,  $b\omega_{c1}$ ,  $\mu$  приложение к гибкому элементу внешнего кинематического воздействия  $h \sin \omega t$  наиболее эффективно в дорезонансной области частот возбуждения  $\nu$  ( $\nu = 0,2 \dots 0,8$ ), когда стабилизация параметрически неустойчивого состояния системы осуществляется при наименьших возможных значениях  $h = (0,25 \dots 0,33)u_0$ .

В качестве иллюстрации на фиг. 2 изображена резонансная кривая  $de$ , соответствующая результирующим колебаниям гибкого элемента после приложения кинематического возбуждения  $h \sin \omega t$  ( $h = 0,25u_0 = 0,05l$ ;  $\nu = 0,5$ ). Из сопоставления кривых  $de$  и  $abc$  следует, что в результате приложения к системе внешнего кинематического воздействия удается полностью устранить затягивание параметрических колебаний. При этом, однако, несколько увеличивается амплитуда результирующих колебаний гибкого элемента внутри области параметрического резонанса (примерно на 25%). Кроме того, за пределами частотного интервала  $ab$  возбуждаются обычные вынужденные колебания (линии  $kd$  и  $mn$ ). В целом же после приложения внешнего кинематического воздействия интенсивность поперечных колебаний гибкого элемента в рассматриваемом частотном интервале существенно уменьшается.

4. Выявленная закономерность поведения системы может быть использована на практике для подавления нелинейно параметрических колебаний гибкого элемента. Для этого необходимо к одной из опор гибкого элемента приложить внешнее дополнительное вибрационное кинематическое воздействие  $h \sin \omega t$ , амплитуда  $h$  которого выбирается в 3...4 раза меньшей амплитуды  $u_0$  установившихся параметрических колебаний, а частота  $\omega$  назначается в пределах 20...80% по отношению к собственной частоте системы  $\omega_{c1}$ .

Практическое использование эффекта вибрационной стабилизации позволяет предотвратить затягивание колебаний гибкого элемента за пределы области параметрического резонанса и существенно расширить допустимый частотный диапазон работы машины. Последнее особенно важно в тех случаях, когда по условиям работы машины частотная отстройка от опасных резонансных режимов либо затруднена, либо вообще невозможна. Конструктивная реализация предложенного способа

подавления параметрических колебаний во многих случаях упрощается, поскольку в качестве внешнего вибрационного воздействия может использоваться вибрация самой машины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Erdelyi A. Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängerpunkt. — Z. angew. Math. und Mech., 1934, Bd. 14, H. 4, s. 235–247.
2. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. — Ж. эксперим. и теорет. физики, 1951, т. 21, вып. 5, с. 588–597.
3. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. — Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3, с. 345–347.
4. Валеев К. Г. Динамическая стабилизация неустойчивых систем. — Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 4, с. 13–21.
5. Семенов В. А. К параметрической стабилизации систем с несколькими степенями свободы. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 5, с. 56–60.
6. Стрижаков Т. Г. Асимптотический метод нормализации. (Метод усреднения и метод нормальных форм). Киев: Вища шк., 1984. 280 с.
7. Алифов А. А. Автоколебательная система с источником энергии при периодическом и параметрическом возбуждениях. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 4, с. 45–63.
8. Фролов К. В. Некоторые проблемы параметрических колебаний элементов машин. — В кн.: Колебания и устойчивость приборов, машин и элементов систем управления. М.: Наука, 1968, с. 5–20.
9. Светлицкий В. А. Передачи с гибкой связью: Теория и расчет. М.: Машиностроение, 1967. 155 с.
10. Бондарь Н. Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем. Киев: Будивельник, 1971. 140 с.
11. Цыфанский С. Л., Ожиганов В. М., Бересневич В. И., Витениекс А. А. Гибридная электрическая модель — аналог для исследования колебаний механических систем ЭМАГ-8. — В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1981, вып. 39, с. 86–92.
12. Цыфанский С. Л. Электрическое моделирование колебаний сложных нелинейных механических систем. Рига: Зинатне, 1979. 180 с.
13. Бересневич В. И. Параметрические колебания гибких связей машин и механизмов. — В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1981, вып. 39, с. 110–119.
14. Веников В. А. Теория подобия и моделирование применительно к задачам электроэнергетики. М.: Высш. шк., 1966. 487 с.
15. Аудзе П. П., Эглайс В. О. Новый подход к планированию многофакторных экспериментов. — В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1977, вып. 35, с. 104–108.

Рига

Поступила в редакцию  
9.X.1984