МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 531.8

ДИНАМИКА УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА В ИНЕРЦИОННОЙ ВЗВОЛНОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

КОНОПЛЕВ В. А.

С усложнением задач, решаемых манипуляторами, возрастают требования к точности управления движением схвата с грузом. Это приводит к необходимости учета в расчетах таких факторов, как упругие деформации элементов конструкции, наличие инерционной взволнованной среды, установка на звеньях вращающихся частей (роторов электродвигателей, шестерен и валов редукторов) управляющих силовых модулей (УСМ).

В работах [1–7] учитываются деформации звеньев роботов простых схем (стержневых с вращательными кинематическими парами). В [8, 9] рассматриваются общие методы, но без учета наличия УСМ и инерционной среды. Учет последнего фактора сделан в [10, 11], но в линейной постановке для неупругих роботов без учета влияния УСМ.

В данной статье предложена удобная для реализации на ЭВМ математическая модель с высокой степенью адекватности, воспроизводящая совместное взаимно влияющее движение основания, упругих звеньев манипулятора и вращающихся частей УСМ при условии движения системы в инерционной взволнованной жидкости ограниченной глубины. Все уравнения являются точными в части учета сил инерционного происхождения.

Рассматриваются механизмы общего типа с кинематическими парами любого класса при произвольных внешних обводах звеньев и распределении по ним масс.

1. Обозначим, для краткости, одним символом $E_k=(o_k, [f^k])$ звено манипулятора и связанную с ним систему координат с началом в точке o_k и ортонормированным базисом $[f^k]=(f_1^k, f_2^k, f_3^k)$. Вычислим векторы квазискоростей $V_k^{\circ k}=\|v_k^{\circ k}, \omega_k^{\circ k}\|^T$ и квазиускорений $V_k^{\circ k*}=\|v_k^{\circ k*}, \omega_k^{\circ k*}\|^T$ звена E_k относительно инерциальной системы координат $E_0=(o_0, [f^\circ])$ (верхний внешний индекс).

Вывод формул основан на разложении любого движения звена на простейшие составляющие: параллельные переносы в направлении ортов связанных систем координат при отсутствии вращений и повороты с этими ортами при отсутствии переносов [12, 13].

Рассматривается упругий робот из n звеньев, первое из которых E_1 — основание (подвижное или стационарное), предпоследнее E_{n-1} — схват, последнее E_n — груз.

Движение E_k относительно E_{k-1} определяется не только перемещениями по обобщенным координатам кинематической пары $(k-1, k)$, но и упругими деформациями E_{k-1}. В этом случае звенья механизма являются свободными твердыми телами и вся система имеет $6n$ степеней свободы.

Вектор (6×1) положения E_k в E_{k-1} запишем в виде

$$r_k^{k-1}=\|s_{6k-5}^{6k-6}, s_{6k-4}^{6k-5}, s_{6k-3}^{6k-4}, \theta_{6k-2}^{6k-3}, \theta_{6k-1}^{6k-2}, \theta_{6k}^{6k-1}\| \tag{1.1}$$

где s_{6k+l-1}^{6k+l}, $(l\in\overline{6,4})$, θ_{6k+l-1}^{6k+l}, $(l\in\overline{3,1})$ — либо обобщенные координаты кинематической пары $(k-1, k)$, либо $s_{6k+l-1}^{6k+l}=p_{6k+l-1}^{6k+l}+\delta_{6k+l-1}^{6k+l}$; $\theta_{6k+l-1}^{6k+l}=$ $=\alpha_{6k+l-1}^{6k+1}+\Delta_{6k+l-1}^{6k+1}$; p_{6k+l-1}^{6k+l}, α_{6k+l-1}^{6k+l} — линейные и угловые конструктивные параметры этой кинематической пары, δ_{6k+l-1}^{6k+l}, Δ_{6k+l-1}^{6k+l} — линейная и угловая деформации E_{k-1}.

Тогда вектор ($6k\times1$) положения E_k в E_0, его скорость и ускорение примут вид

$$r_k^{\circ}=\|\overset{\circ}{s}_{6k},\overset{\circ}{\theta}_{6k}\|^T,\quad r_k^{\circ\cdot}=\|\overset{\circ\cdot}{s}_{6k},\overset{\circ\cdot}{\theta}_{6k}\|^T,\quad r_k^{\circ\cdot\cdot}=\|\overset{\circ\cdot\cdot}{s}_{6k},\overset{\circ\cdot\cdot}{\theta}_{6k}\|^T \tag{1.2}$$

где векторы $(3k\times1)$ $\overset{\circ}{s}_{6k},\overset{\circ\cdot}{s}_{6k},\overset{\circ\cdot\cdot}{s}_{6k}$ и $\theta^{\circ}_{6k},\theta^{\circ\cdot}_{6k},\theta^{\circ\cdot\cdot}_{6k}$ составлены из линейных и угловых координат векторов $r_k^{k-1}, r_k^{k-1\cdot}$ и $r_k^{k-1\cdot\cdot}$ (1.1), выписанных в порядке возрастания нижних индексов.

Используя результаты работ [12, 13], получаем

$$V_k^{\circ k}=A_k^{\circ k}r_k^{\circ\cdot},\quad V_k^{\circ k*}=A_k^{\circ k}r_k^{\circ\cdot\cdot}+D_k^{\circ k}r_k^{\circ\cdot} \tag{1.3}$$

$$A_k^{\circ k}=[C_k^{\circ T}]A_k^{\circ\circ},\qquad D_k^{\circ k}=[C_k^{\circ T}](B_k^{\circ\circ}+[\langle\omega_k^{\circ}\rangle^{\circ T}]A_k^{\circ\circ})$$

$$A_k^{\circ\circ}=\left\|\begin{array}{c|c} K_{6k}^{\circ s} & L_{6k}^{\circ\theta} \\ \hline 0 & K_{6k}^{\circ\theta}\end{array}\right\|,\quad B_k^{\circ\circ}=\left\|\begin{array}{c|c} 2K_{6k}^{\circ s\cdot} & M_{6k}^{\circ\theta} \\ \hline 0 & K_{6k}^{0\theta\cdot}\end{array}\right\|$$

$$C_k^{\circ}=C_1^{\circ}\cdot C_2^{1}\cdots C_k^{k-1},\qquad C_{p+1}^{p}=C_i(\theta_{p+1}^{p}),\qquad (i\in\overline{1,3};\ p\in\overline{0,\ k-1})-$$

— простейшая матрица вращения (3×3) на угол θ_{p+1}^{p} с ортом f_i^p, $[A]$ — блочно-диагональная матрица (6×6) с блоками размерности (3×3) на главной диагонали, $\langle a\rangle$ — кососимметрическая матрица, порожденная вектором a, T — операция транспонирования.

Матрицы K_{6k}°, L_{6k}°, $K_{6k}^{\circ\cdot}$ и M_{6k}° заданы процедурами вычисления столбцов по индексам соответствующих координатам векторов $r_k^{\circ\cdot}$ и $r_k^{\circ\cdot\cdot}$, причем блочные ($6\times3k$) столбцы с индексами s и θ соответствуют поступательным и вращательным частям этих векторов

$$\begin{gathered}
\overset{\circ}{K}_{6k}=\|\cdots e_{p+1}^{p\circ}\cdots\|,\quad \overset{\circ\cdot}{K}_{6k}=\|\cdots\langle e_{p+1}^{p}\rangle^{\circ T}K_p^{\circ\theta}\theta_p^{\circ\cdot}\cdots\|\\
\overset{\circ}{M}_{6k}=\Big\|\cdots\Big(\sum_{m=p+1}^{6k-1}\langle e_{m+1}^{m}\rangle^{\circ T}s_{m+1}^{m}\Big)\langle e_{p+1}^{p}\rangle^{\circ T}K_p^{\circ\theta}\theta_p^{\circ\cdot}+\\
+\langle e_{p+1}^{p}\rangle^{\circ}\Big(\sum_{m=p+1}^{6k-1}\langle e_{m+1}^{m}\rangle^{\circ T}K_m^{\circ s}\theta_m^{\circ\cdot}s_{m+1}^{m}\Big)\cdots\Big\|\\
\overset{\circ}{L}_{6k}=\|\cdots\langle e_{p+1}^{p}\rangle^{\circ}K_{6k}^{p+1}s_{6k}^{p+1}\cdots\|
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Формулы (1.3) отличаются от внешне похожих на них зависимостей из работ [14, 15]. Они универсальны относительно выбора класса кинематических пар (0—5), что позволяет использовать их для исследования манипуляторов любых конструкций. Громоздкие алгоритмы формирования матриц заменены простыми, легко реализуемыми на ЭВМ алгоритмами вычисления их столбцов, соответствующих (по индексам) координатам векторов $r_k^{\circ\cdot}$ и $r_k^{\circ\cdot\cdot}$.

2. Получим матричное уравнение движения в инерционной жидкости k-го звена манипулятора с учетом установленных на нем вращающихся частей УСМ в количестве m_k штук.

Используя разложение кинетического винта системы «звено — жидкость — вращающиеся части» в E_0 на простейшие слагаемые и сомножители, согласно [16], получаем

$$Z_0^{\circ}=L_k^{\circ\circ}\Theta_k^kV_k^{\circ k}+L_b^{\circ\circ}\Lambda_{b_k}^{b_k}+V_{b_k}^{\circ b_k}\sum_{s_k=1}^{m_k}L_{s_k}^{\circ\circ}\Theta_{s_k}^{s_k}V_{s_k}^{\circ s_k} \tag{2.1}$$

где Θ_k^k, $\Theta_{s_k}^{s_k}$ — матрицы (6×6) Мизеса [17] E_k и s_k-й вращающейся части E_{s_k} в E_k, $E_{s_k}=(o_{s_k},[f^{s_k}])$, $[f^{s_k}]=(f_1^{s_k},f_2^{s_k},f_3^{s_k})$, $\Lambda_{b_k}^{b_k}=\Lambda_{b_k}^{b_k}(t)$ — матрица (6×6) присоединенных масс во вспомогательной, также связанной с E_k

системе координат E_{b_k}, обеспечивающей простоту ее вычисления и записи; $L_{b_k}^{oo}=L_k^{oo}L_{b_k}^{kk}$; $L_{s_k}^{oo}=L_k^{oo}L_{s_k}^{kk}$; $V_p^{op}=\|v_p^{op},\omega_p^{op}\|^T$ — вектор квазискоростей E_p в E_0 ($p=k$, b_k или s_k).

Выделим из векторов V_p^{op} ($p=b_k$ или s_k) вектор V_k^{ok} (1.3). Согласно [12], имеем

$$v_p^{op}=C_p^{kT}(v_k^{ok}+\langle o_p^k\rangle^{kT}\omega_k^{ok}),\quad \omega_p^{op}=C_p^{kT}\omega_k^{ok}+\omega_p^{kp} \tag{2.2}$$

где o_p^{kk}, C_p^k — радиус-вектор точки o_p в E_k и базисе $[f^k]$ и матрица ориентации $[f^p]$ в $[f^k]$, $[f^p]=[f^k]C_p^k$, $C_p^k=C_3(\psi_p)C_2(\theta_p)C_1(\varphi_p)$, где, если $p=s_k$, то ψ_{s_k}, θ_{s_k} — постоянные углы ориентации s_k-й вращающейся части E_{s_k} в $[f^k]$, φ_{s_k} — угол ее вращения $\omega_{s_k}^{ks_k}=f_1^{s_k}\dot\varphi_{s_k}$, $f_1^{s_k}$ — орт оси вращения E_{s_k}.

Объединяя равенства (2.2) в матричной (6×6) записи, получаем

$$V_p^{op}=L_p^{kkT}V_k^{ok}+V_p^{kp}\qquad (p=b_k, s_k) \tag{2.3}$$

где при $p=s_k$ $\quad V_{s_k}^{ks_k}=\|0,\omega_{s_k}^{k,s_k}\|^T=f_k^{s_k}\dot\varphi_{s_k}$, $f_k^{s_k}=\|0,f_1^{s_k}\|^T\in R_6$.

Подстановка (2.3) в (2.1) после преобразований приводит к равенству

$$Z_0^{o}=L_k^{oo}\mathbf{K}_k^kV_k^{ok}+\sum_{s_k=1}^{m_k}L_{s_k}^{oo}\Theta_{s_k}^{s_k}f_k^{s_k}\dot\varphi_{s_k} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{K}_k^k=\Theta_k^k+L_{b_k}^{kk}\Lambda_{b_k}^{b_k}L_{b_k}^{kkT}+\sum_{s_k=1}^{m_k}L_{s_k}^{kk}\Theta_{s_k}^{s_k}L_{s_k}^{kkT}$$

Теорема об изменении кинетического винта E_k имеет вид [16, 17]

$$Z_0^{o\cdot}=F_0^{o};\qquad F_0^{o}=L_k^{oo}F_k^k;\qquad F_k^k=P_k^k+\sum_{s_k=1}^{m_k}L_{s_k}^{kk}Q_{s_k}^{s_k} \tag{2.5}$$

где P_k^k, $Q_{s_k}^{s_k}$ — динамические винты сил внешнего воздействия на E_k и E_s^k без учета сил, обусловленных изменением кинетического винта инерционной жидкости (второе слагаемое в (2.1))

$$P_k^k=Q_k^k+\Gamma_k^k-L_{b_k}^{kb_k}\mathbf{R}_{b_k}^{b_k}L_{b_k}^{kb_kT}V_k^{ok}+R_k^k(k-1,k)+R_k^k(k+1,k) \tag{2.6}$$

где Q_k^k, Γ_k^k — винты сил тяготения [16], волнового и аэродинамического воздействия внешней среды на E_k, $\mathbf{R}_{b_k}^{b_k}=\mathbf{R}_{b_k}^{b_k}(r_k^o, r_k^{o\cdot}, t)$ — матрица диссипации энергии на свободной поверхности жидкости при движении E_k, вычисленная в E_{b_k}, $R_k^k(k-1,k)$, $R_k^k(k+1,k)$ — динамические винты воздействия E_{k-1} и E_{k+1} на E_k в E_k.

Подстановка (2.4) и (2.6) в (2.5) после преобразований дает искомое уравнение движения E_k в пространстве квазискоростей

$$\mathbf{K}_k^kV_k^{ok*}+\mathbf{M}_k^kV_k^{ok}+\sum_{s_k=1}^{m_k}(\mathbf{I}_k^{s_k}\ddot\varphi_{s_k}+\mathbf{J}_k^{s_k}\dot\varphi_{s_k})=T_k^k+R_k^k(k-1,k)+R_k^k(k+1,k) \tag{2.7}$$

$$T_k^k=Q_k^k+\Gamma_k^k+\sum_{s_k=1}^{m_k}L_{s_k}^{kk}Q_{s_k}^{s_k}$$

$$\mathbf{M}_k^k=\Phi_k^{ok}\mathbf{K}_k^k+\mathbf{K}_k^{k\cdot}+\mathbf{D}_k^k,\qquad \mathbf{D}_k^k=L_{b_k}^{kk}\mathbf{R}_{b_k}^{b_k}L_{b_k}^{kkT}$$

$$\mathbf{K}_k^{k\cdot}=L_{b_k}^{kk}\Lambda_{b_k}^{b_k\cdot}L_{b_k}^{kkT}+\sum_{s_k=1}^{m_k}L_{b_k}^{kk}([\langle f_1^{s_k}\rangle]\Theta_{s_k}^{s_k}-\Theta_{s_k}^{s_k}[\langle f_1^{s_k}\rangle])L_{s_k}^{kkT}\dot\varphi_{s_k}$$

$$\mathbf{I}_k^{s_k}=L_{s_k}^{kk}\Theta_{s_k}^{s_k}f_k^{s_k};\qquad \mathbf{J}_k^{s_k}=(\Phi_k^{ok}L_{s_k}^{kk}+L_{s_k}^{kk}[\langle f_1^{s_k}\rangle]\dot\varphi_{s_k})\Theta_{s_k}^{s_k}f_k^{s_k}$$

Заметим, что если оси вращения частей E_{s_k} являются осями их динамической симметрии ($\theta_{22}{}^{s_k}=\theta_{33}{}^{s_k}$ в матрице (3×3) тензора инерции $\theta^{s_k}_{s_k}$), то второе слагаемое в выражении для $\mathbf{K}_k{}^{k^\bullet}$ равно нулю.

Из анализа уравнения (2.7) следует практически важное утверждение: поступательное и вращательное движения E_k вблизи свободной поверхности инерционной жидкости и при наличии на нем динамически несимметричных механизмов в отличие от случая [14] инерционно неотделимы.

Если манипулятор работает вдали от свободной поверхности жидкости, то $\Lambda_{b_k}{}^{b_k^\bullet}\equiv 0$, $\mathbf{R}_{b_k}{}^{b_k}\equiv 0$, $\mathbf{D}_k{}^k\equiv 0$, если среда неинерционна, то $\Lambda^{b_k}_{b_k}\equiv 0$, $(k\in\overline{1,n})$.

Подставляя в (2.7) зависимости (1.3), получаем уравнение движения E_k $(k=1,\ 2,\ldots,n)$ в пространстве векторов $r_k{}^\circ$:

$$\mathbf{I}_k{}^k r_k{}^{\circ\cdot\cdot}+\mathbf{J}_k{}^k r_k{}^{\circ\cdot}+\sum_{s_k=1}^{m_k}(\mathbf{I}_k{}^{s_k}\ddot{\varphi}_{s_k}+\mathbf{J}_k{}^{s_k}\dot{\varphi}_{s_k})=T_k{}^k+R_k{}^k(k-1,k)+R_k{}^k(k+1,k)$$

$$\mathbf{I}_k{}^k=\mathbf{K}_k{}^k A_k{}^{\circ k},\quad \mathbf{J}_k{}^k=\mathbf{K}_k{}^k D_k{}^{\circ k}+\mathbf{M}_k{}^k A_k{}^{\circ k} \tag{2.8}$$

3. Перейдем к выводу уравнения движения манипулятора. Считая звенья механизма «гуковыми» твердыми телами, для винтов воздействия $(k-1)$-го и $(k+1)$-го звеньев на E_k получаем

$$R_k{}^k(k-1,k)=\mathbf{Z}_k^{k-1}d_k^{k-1}+\sum_{l_{k-1}=1}^{n_{k-1}}f_k^{l_{k-1}}\lambda_k^{l_{k-1}} \tag{3.1}$$

$$R_k{}^k(k+1,k)=-L_{k+1}^{kk}\Big(\mathbf{Z}_{k+1}^k d_{k+1}^k+\sum_{l_k=1}^{n_k}f_{k+1}^{l_k}\lambda_{k+1}^{l_k}\Big) \tag{3.2}$$

где $\lambda_k^{l_{k-1}},\lambda_{k+1}^{l_k}$ — величины управляющих усилий (сил или моментов), передаваемых l_{k-1}-м и l_k-м УСМ, установленными на E_{k-1}, E_k, на E_k и E_{k+1}, $l_{k-1}\in\overline{1,\ n_{k-1}}$, $l_k\in\overline{1,n_k}$, $f_k^{l_{k-1}},f_{k+1}^{l_k}$ — орты с единицей на месте расположения чисел $\lambda_k^{l_{k-1}},\ \lambda_{k+1}^{l_k}$ в динамическом винте управления движением E_k и E_{k+1}; $\mathbf{Z}_k^{k-1},\mathbf{Z}_{k+1}^k$ — матрицы жесткости E_{k-1} и E_k с нулевыми строками, соответствующими ненулевым координатам вышеуказанных винтов; n_{k-1}, n_k — количество УСМ, установленных на E_{k-1} и E_k (полагая, что изменением каждой обобщенной координаты кинемитической пары управляет один УСМ); d_k^{k-1}, d_{k+1}^k — векторы деформаций звеньев E_{k-1} и E_k.

Обозначим $r^{6k+l_{k-1}}_{6k+l_{k-1}-1}=s^{6k+l_{k-1}}_{6k+l_{k-1}-1}(l_k\in\overline{6,4})$, $r^{6k+l_{k-1}}_{6k+l_{k-1}-1}=\theta^{6k+l_{k-1}}_{6k+l_{k-1}-1}(l_{k-1}\in\overline{3,1})$ координаты вектора r_k^{k-1} (1.1), изменением которых управляют l_{k-1}-й УСМ, установленный на E_{k-1} $(l_{k-1}\in\overline{1,n_{k-1}})$.

Запишем уравнение вращения ротора электродвигателя l_{k-1}-го УСМ звена E_{k-1} в виде [18]:

$$I_{l_{k-1}}\ddot{\varphi}_{l_{k-1}}=M^+_{l_{k-1}}-M^c_{l_{k-1}} \tag{3.3}$$

где $I_{l_{k-1}}$ — момент инерции ротора относительно оси вращения, $\dot{\varphi}_{l_{k-1}}$ — скорость вращения ротора, $M^+_{l_{k-1}}$ — электромагнитный вращающий момент, $M^c_{l_{k-1}}$ — момент сопротивления на валу двигателя.

Уравнение (3.3) можно преобразовать к виду [18]:

$$\lambda_k^{l_{k-1}}=a_k^{l_{k-1}}M^+_{l_{k-1}}-b_k^{l_{k-1}}\ddot{r}^{6k+l_{k-1}}_{6k+l_{k-1}-1} \tag{3.4}$$

$$a_k^{l_{k-1}}=c_k^{l_{k-1}}\eta_k^{l_{k-1}},\quad b_k^{l_{k-1}}=I_{l_{k-1}}(c_k^{l_{k-1}})^2\eta_k^{l_{k-1}}$$

$$c_k^{l_k-1}=(\gamma_k^{l_k-1})^{-1}\in R_1 \quad (l_k\in\overline{6,4}),\quad c_k^{l_k-1}=j_k^{l_k-1}\in R_1 \quad (l_k\in\overline{3,1})$$

$$\gamma_k^{l_k-1}=j_k^{l_k-1}R_k^{l_k-1},\quad \eta_k^{l_k-1},\ j_k^{l_k-1}$$

есть КПД и передаточное число редуктора l_{k-1}-го УСМ, $R_k^{l_k-1}$ — радиус шестерни, преобразующей вращение выходного вала l_{k-1}-го УСМ в поступательное движение E_k $(l_k\in\overline{6,4})$.

Кроме того, для скорости и ускорения вращения s_k-й вращающейся части E_{s_k}, установленной на E_k (2.7), получаем

$$\dot\varphi_{s_k}=c_{k+1}^{s_k}\overset{\circ}{r}{}_{6(k+1)+l_k-1}^{6(k+1)+l_k},\quad \ddot\varphi_{s_k}=c_{k+1}^{s_k}\overset{\circ\circ}{r}{}_{6(k+1)+l_k-1}^{6(k+1)+l_k} \tag{3.5}$$

где $c_{k+1}^{s_k}=(\gamma_{k+1}^{s_k})^{-1}$ $(l_k\in\overline{6,4})$, $c_{k+1}^{s_k}=j_{k+1}^{s_k}$ $(l_k\in\overline{3,1})$, $j_{k+1}^{s_k}$ — передаточное число от E_{s_k} звена E_k к звену E_{k+1}, $\gamma_{k+1}^{s_k}=j_{k+1}^{s_k}R_{k+1}^{s_k}$.

Подставляя (3.5), (3.1) и (3.2) с учетом (3.3) в (2.8), получаем матричное $(6\times 6n)$ уравнение движения k-го звена E_k манипулятора в виде

$$\mathbf{A}_k{}^k\overset{\circ\circ}{r}_k+\mathbf{J}_k{}^k\overset{\circ}{r}_k+\sum_{s_k=1}^{m_k}I_k^{s_k}c_{k+1}^{s_k}\overset{\circ\circ}{r}{}_{6(k+1)+l_k-1}^{6(k+1)+l_k}+\sum_{s_k=1}^{m_k}\mathbf{J}_k^{s_k}c_{k+1}^{s_k}\overset{\circ}{r}{}_{6(k+1)+l_k-1}^{6(k+1)+l_k}=$$

$$=T_k{}^k+\mathbf{Z}_k^{k+1}d_k^{k-1}-L_{k+1}^{kk}\mathbf{Z}_{k+1}^k d_{k+1}^k+\sum_{l_{k-1}=1}^{n_{k-1}}f_k^{l_k-1}a_k^{l_k-1}M_{l_{k-1}}^+-$$

$$-L_{k+1}^{kk}\sum_{l_k=1}^{n_k}f_{k+1}^{l_k}a_{k+1}^{l_k}M_{l_k}^++L_{k+1}^{kk}\sum_{l_k=1}^{n_k}f_{k+1}^{l_k}b_{k+1}^{l_k}\overset{\circ\circ}{r}{}_{6(k+1)+l_k-1}^{6(k+1)+l_k} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{A}_k{}^k=\mathbf{I}_k{}^k+(f_k^{l_k-1}b_k^{l_k-1})_{n_{k-1}}^1$$

где $(t)_{n_{k-1}}^1$ — матрица размерности $(6\times 6n)$ со столбцами $t=f_k^{l_k-1}b_k^{l_k-1}$ на местах, соответствующих координатам $\overset{\circ\circ}{r}{}_{6k+l_{k-1}-1}^{6k+l_{k-1}}$ в векторе $\overset{\circ\circ}{r}_k$ по всем $l_{k-1}\in\overline{1,n_{k-1}}$ УСМ, установленным на E_{k-1}, и остальными нулевыми.

Осталось записать систему уравнений (3.6) $(k\in\overline{1,n})$ в виде одного матричного равенства $(6n\times 6n)$:

$$\mathbf{A}\overset{\circ\circ}{r}_n+\mathbf{B}\overset{\circ}{r}_n=\mathbf{Z}d_n{}^\circ+T+\Phi_M M \tag{3.7}$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Z}$ — блочные матрицы размерности $(6n\times 6n)$ и $(6n\times\Sigma\dim d_k^{k-1})$ с матричными строками размерности $(6\times 6n)$ и $(6\times\Sigma\dim d_k^{k-1})$ вида

$$\|\,\mathbf{I}_k{}^k+(f_k^{l_k-1}b_k^{l_k-1})_{n_{k-1}}^1+(\mathbf{I}_k^{s_k}c_{k+1}^{s_k})_{m_k}^1+(L_{k+1}^{kk}f_{k+1}^{l_k}b_{k+1}^{l_k})_{n_k}^1\|$$

$$\|\,\mathbf{J}_k{}^k+(\mathbf{J}_k^{s_k}c_{k+1}^{s_k})_{m_k}^1\,\|,\quad \|\,0\,|\,\mathbf{Z}_k^{k-1}\,|-L_{k+1}^{kk}\mathbf{Z}_{k+1}^k|\,0\,\|.$$

Φ_M — блочная матрица $(6n\times\dim M)$ с матричными строками $(6\times\dim M)$ со столбцами $f_k^{l_k-1}a_k^{l_k-1}$ и $-L_{k+1}^{kk}f_{k+1}^{l_k}a_{k+1}^{l_k}$ на местах, соответствующих координатам $M_{l_{k-1}}^+$, $M_{l_k}^+$ вектора управляющих моментов M:

$$d_n{}^\circ=\|\ldots d_k^{k-1}\ldots\|^{\mathrm T},\quad T=\|\ldots T_k{}^k\ldots\|^{\mathrm T}$$

Во многих задачах допускается использование линеаризованного уравнения вращения ротора электродвигателя. В этом случае каждая координата вектора M может быть представлена в виде [18]:

$$M_{l_k}^+=k_1^{l_k}u_{l_k}-k_2^{l_k}\dot\varphi_{l_k}=k_1^{l_k}u_{l_k}-k_2^{l_k}c_{k+1}^{l_k}\overset{\circ}{r}{}_{6(k+1)+l_k-1}^{6(k+1)+l_k} \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.6), после преобразований получаем вторую форму уравнений движения манипулятора

$$\mathbf{A}\ddot{r}_n^\circ + \mathbf{B}\dot{r}_n^\circ = \mathbf{Z}d + T + \mathbf{\Phi}_u u \qquad (3.9)$$

где u — вектор управляющих напряжений u_{l_k} $(l_k \in \overline{1, n_k},\ k \in \overline{1, n})$ (3.8), матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{\Phi}_u$ получаются соответствующими преобразованиями матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{\Phi}_M$ из (3.7).

Если манипулятор установлен на подвижном основании (первое звено E_1 — свободное твердое тело), то $r_1^\circ = q_1^\circ$ — вектор обобщенных координат носителя. Если основание E_1 стационарно, то считается, что его движение в E_0 определяется упругими деформациями места его крепления, $r_1^\circ = d_1^\circ = \|\delta_1^\circ, \delta_2^1, \delta_3^2, \Delta_4^3, \Delta_5^4, \Delta_6^5\|^T$.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Л. Черноусько за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лакота, Рахманов Е. В., Шведов В. Н.* Управление упругим манипулятором на траектории.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53—59.
2. *Вукобратович М., Поздняк В.* Численный метод моделирования динамики манипулятора с упругими свойствами.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 131—141.
3. *Михайлов А. С.* Собственные колебания упругого двухзвенника с точечной массой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 72—75.
4. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управлении поворотом упругого звена манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1984, № 1, с. 167—173.
5. *Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Динамика упругого манипулятора при заданных управляющих моментах и движениях перемещающегося груза.— Изв. АН СССР. МТТ, 1984, № 5, с. 19—25.
6. *Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Исследование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. МТТ 1984, № 2, с. 51—58.
7. *Болотник Н. А., Каплунов А. А.* О синтезе управления двухзвенным манипулятором.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 3, с. 57—62.
8. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142—152.
9. *Черноусько Ф. Л.* Динамика систем с упругими элементами большой жесткости.— Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 4, с. 101—118.
10. *Ястребов В. С., Игнатьев М. Б.* Подводные работы. Л.: Судостроение, 1976. 256 с.
11. *Филатов А. М., Ястребов В. С.* Подводные исследовательские роботы.— В кн.: Принципы построения технических средств исследования океана. М.: Наука, 1982, с. 274—276.
12. *Коноплев В. А.* Исследование кинематики сложного движения тела с помощью матричных методов.— Прикл. механика, 1984, т. 20, № 9, с. 130—131.
13. *Коноплев В. А.* Матричные методы в кинематике сложного движения твердого тела и систем твердых тел: Сб. научн.-метод. статей по теор. мех. Вып. 17. М.: Высш. шк., 1985. с. 46—54.
14. *Медведев В. С., Лесков А. Г., Ющенко А. С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978. 415 с.
15. *Кулаков Ф. М.* Супервизорное управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1980. 448 с.
16. *Коноплев В. А.* Матричные формы уравнений движения свободного твердого тела.— Изв. АН СССР. МТТ, 1985, № 6, с. 42—47.
17. *Диментберг Ф. М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982. 335 с.
18. *Чиликин М. Г., Сандлер А. С.* Общий курс электропривода. М.: Энергоиздат, 1981. 576 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
4.II.1985