

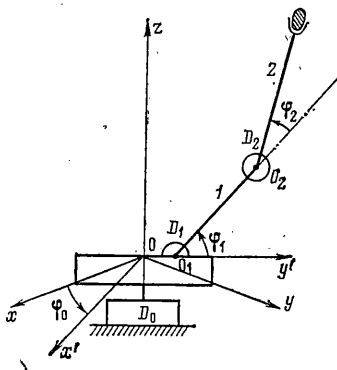
УДК 531.8

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

АКУЛЕНКО Л. Д., БОЛОТНИК Н. Н.

Рассматривается задача об оптимальном по быстродействию управлении транспортными движениями электромеханического манипуляционного робота с тремя степенями свободы. Построена расчетная модель такого робота. В пренебрежении взаимным влиянием различных степеней свободы, которое для многих современных промышленных роботов мало и может быть учтено методами теории возмущений, определено оптимальное управление в форме синтеза, обеспечивающее наискорейшее приведение робота в заданную конфигурацию с торможением движения в конце процесса. Приведены оценки мощности тепловыделения в обмотках роторов электродвигателей приводов, соответствующие построенному управлению.

1. Расчетная модель манипулятора. Уравнения движения. Рассматривается антропоморфный манипулятор типичной конструкции [1], состоящий из подвижной платформы и механической руки со схватом (фиг. 1). Рука представляет собой два абсолютно твердых тела (звена) 1, 2, соединенных шарниром O_2 . Свободный конец звена 1 связан посредством шарнира O_1 с платформой, а на конце звена 2 расположен схват с грузом. Шарниры O_1 , O_2 идеальные цилиндрические, их оси горизонтальны и параллельны друг другу. Платформа может поворачиваться вокруг неподвижной вертикальной оси. Управление транспортными движениями манипулятора осуществляется при помощи электромеханических приводов D_0 , D_1 , D_2 , каждый из которых содержит линейный электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением [2] и редуктор. Привод D_0 управляет поворотом платформы, статор электродвигателя и корпус редуктора этого привода закреплены на неподвижном основании. Приводы D_1 , D_2 управляют соответственно поворотом звена 1 руки относительно платформы и звена 2 относительно звена 1. Статоры электродвигателей и корпуса редукторов приводов D_1 , D_2 жестко связаны с платформой и звеном 1 руки манипулятора соответственно.



Фиг. 1

Для простоты расчетов предполагается, что оси вращения роторов электродвигателей и оси выходных валов редукторов приводов D_1 , D_2 совпадают с осями шарниров O_1 , O_2 соответственно; оси вращения роторов электродвигателей суть их главные центральные оси инерции, которые также являются осями динамической симметрии. Предполагается также, что с достаточной степенью точности звенья руки можно считать тонкими прямолинейными стержнями (не обязательно однородными), расположенными во вращающейся (вертикальной) плоскости π , перпендикулярной осям шарниров O_1 , O_2 ; в этой плоскости лежат также центры инерции роторов электродвигателей D_1 , D_2 . Инерционностью редукторов пренебрегаем. Изменения ориентации груза, осуществляемые посредством поворота схвата манипулятора относительно звена 2 руки, не рассматриваются.

Для описания движения введем две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z$ с общим началом O и осью Oz , совпадающей с осью вращения платформы (и вертикальной плоскости π). Система координат $Oxyz$ неподвижная, а $Ox'y'z$ жестко связана с платформой; координатная плоскость $Oy'z$ совпадает с плоскостью руки манипулятора. Введем обозначения: φ_0 — угол поворота системы координат $Ox'y'z$ относительно $Oxyz$ (угол поворота платформы), φ_1 — угол между первым звеном и осью Oy' (угол поворота первого звена руки относительно основания), φ_2 — угол между звеньями руки манипулятора, a — расстояние от оси вращения платформы до оси шарнира O_1 , $L = |O_1O_2|$ — длина первого звена, l_1 — расстояние от оси шарнира O_1 до центра масс первого звена, l_2 — расстояние от оси шарнира O_2 до центра масс второго звена, g — ускорение силы тяжести, I_0 — момент инерции платформы относительно оси ее вращения, I_1, I_2 — моменты инерции первого и второго звеньев соответственно относительно осей, проходящих через точки O_1, O_2 и перпендикулярных соответствующим стержням, J_0 — момент инерции ротора электродвигателя привода D_0 относительно оси его вращения, $J_1^{(1)}, J_1^{(2)}$ — моменты инерции роторов электродвигателей приводов D_1, D_2 соответственно относительно осей их вращения, $J_2^{(1)}, J_2^{(2)}$ — центральные моменты инерции роторов электродвигателей приводов D_1, D_2 соответственно относительно осей, перпендикулярных осям шарниров O_1, O_2 , m_1, m_2 — массы электродвигателей приводов D_1, D_2 соответственно, M_1, M_2 — массы первого и второго звеньев руки манипулятора соответственно, n_i — передаточное число редуктора привода D_i ($i=0, 1, 2$), μ_i ($i=0, 1, 2$) — момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя i -го привода, относительно оси его вращения, L_i ($i=0, 1, 2$) — коэффициент индуктивности обмотки ротора электродвигателя i -го привода, R_i — электрическое (омическое) сопротивление обмотки ротора электродвигателя i -го привода, k_i ($i=0, 1, 2$) — коэффициент пропорциональности между электрическим током цепи ротора электродвигателя i -го привода и моментом μ_i действующих на него электромагнитных сил, u_i ($i=0, 1, 2$) — электрическое напряжение, подаваемое на вход электродвигателя i -го привода.

Для вывода уравнений движения механической системы робота используется метод Лагранжа. Кинетическая энергия механической системы

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{1}{2} [A_{00} + B \cos^2 \varphi_1 + C \cos \varphi_1 + I_2 \cos^2 (\varphi_1 + \varphi_2) + \\
 & + D \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + 2F \cos \varphi_1 \cos (\varphi_1 + \varphi_2)] \varphi_0'^2 + \\
 & + \frac{1}{2} (A_{11} + 2F \cos \varphi_2) \varphi_1'^2 + \frac{1}{2} A_{22} \varphi_2'^2 + (A_{12} + F \cos \varphi_2) \varphi_1' \varphi_2' \\
 & A_{00} = J_0 n_0^2 + J_2^{(1)} + J_2^{(2)} + I_0 + (M_1 + M_2 + m_1 + m_2) a^2 \\
 & B = I_1 + (M_2 + m_2) L^2, \quad C = 2a [M_1 l_1 + (M_2 + m_2) L] \\
 & D = 2M_2 a l_2, \quad F = M_2 L l_2, \quad A_{11} = J_1^{(1)} n_1^2 + J_1^{(2)} + I_1 + I_2 + \\
 & + (m_2 + M_2) L^2, \quad A_{22} = J_1^{(2)} n_2^2 + I_2, \quad A_{12} = J_1^{(2)} n_2 + I_2
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Потенциальная энергия сил тяжести

$$\Pi = [M_1 l_1 + (m_2 + M_2) L] g \sin \varphi_1 + M_2 l_2 g \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \tag{1.2}$$

Движения манипулятора в рамках принятой модели описываются системой механических уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial E}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} + n_i \mu_i \quad (i=0, 1, 2) \tag{1.3}$$

и уравнений баланса напряжений в цепях роторов электродвигателей

$$L_i \dot{j}_i + R_i j_i + k_i n_i \dot{\varphi}_i = u_i \quad (i=0, 1, 2) \tag{1.4}$$

Здесь j_i — ток в цепи ротора электродвигателя i -го привода. Используя соотношение $\mu_i = k_i j_i$ [2], уравнение (1.4) приводим к виду

$$L_i \dot{\mu}_i + R_i \mu_i + k_i^2 n_i \dot{\varphi}_i = k_i u_i \quad (i=0, 1, 2) \tag{1.5}$$

Из (1.1), (1.2) вытекает, что уравнения (1.3) имеют вид

$$\begin{aligned} A_{00}\varphi_0'' + f_0(\varphi, \varphi', \varphi'') &= n_0\mu_0 & (1.6) \\ A_{11}\varphi_1'' + A_{12}\varphi_2'' + f_1(\varphi, \varphi', \varphi'') &= n_1\mu_1 \\ A_{12}\varphi_1'' + A_{22}\varphi_2'' + f_2(\varphi, \varphi', \varphi'') &= n_2\mu_2 \end{aligned}$$

где символами $f_i(\varphi, \varphi', \varphi'')$, $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ обозначены нелинейные члены соответствующих уравнений. Функции f_i , $i=0, 1, 2$ зависят от обобщенных координат φ_i , φ_2 , обобщенных скоростей φ_i' , $i=0, 1, 2$ и ускорений φ_i'' , $i=0, 1, 2$.

2. Постановка задачи оптимального управления. Для системы (1.5), (1.6) ставится следующая задача синтеза оптимального по быстродействию управления. Найти зависимости управляющих напряжений $u_i = u_i(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_0', \varphi_1', \varphi_2', \mu_0, \mu_1, \mu_2)$ от фазовых координат φ_i , φ_i' , μ_i , $i=0, 1, 2$ рассматриваемой электромеханической системы, которые обеспечивают приведение манипулятора за минимальное время T из произвольной точки некоторой области допустимых начальных состояний в заданное конечное положение с торможением движения в конце процесса

$$\varphi_i(T) = \varphi_i^T, \quad \varphi_i'(T) = 0 \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.1)$$

На управляющие напряжения наложены ограничения

$$|u_i| \leq U_i, \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.2)$$

После перехода к новым безразмерным переменным

$$t' = t/T_*, \quad \mu_i' = n_i\mu_i T_*^2/A_{ii}, \quad u_i' = u_i/U_i \quad (2.3)$$

$$L_i' = L_i A_{ii} / k_i n_i U_i T_*^3, \quad R_i' = R_i A_{ii} / k_i n_i U_i T_*^2$$

$$k_i' = k_i n_i / T_* U_i \quad (i=0, 1, 2)$$

с последующим опусканием штрихов уравнения (1.5), (1.6) и ограничения (2.2) принимают вид

$$L_i \mu_i' + R_i \mu_i' + k_i \varphi_i' = u_i \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.4)$$

$$\varphi_0'' + f_0(\varphi, \varphi', \varphi'') = \mu_0, \quad \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1'' + A_{12}\varphi_2''/A_{11} + f_1(\varphi, \varphi', \varphi'') = \mu_1, \quad \varphi_2'' + A_{12}\varphi_1''/A_{22} + f_2(\varphi, \varphi', \varphi'') = \mu_2, \\ |u_i| \leq 1 \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

В замене (2.3) T_* — принятое за единицу измерения характерное время рабочей транспортной операции, осуществляемой манипулятором, которое может быть конструктивно оценено (см. далее). Отметим, что фазовые переменные системы (2.4)–(2.6) суть φ_i , φ_i' , μ_i ($i=0, 1, 2$). Если управления u_i ($i=0, 1, 2$) известны как функции времени и (или) фазовых координат, то для однозначного решения системы дифференциальных уравнений (2.4)–(2.6) необходимо в некоторый момент времени задать начальные значения углов поворота звеньев манипулятора, угловых скоростей и моментов (или токов в обмотках роторов электродвигателей в силу соотношений $\mu_i = k_i j_i$). Физически необходимость задания начальных значений моментов (токов) объясняется ненулевой индуктивностью обмоток роторов электродвигателей, которая обуславливает возможность наличия токов (сравнительно быстро затухающих) в обмотках роторов при нулевых значениях управляющих напряжений. В большинстве практических случаев естественно задавать нулевые начальные значения моментов электромагнитных сил, если движение начинается из состояния покоя ($\varphi_i' = 0$, $i=0, 1, 2$). В дальнейшем предполагается, что рабочие углы поворота платформы и звеньев руки манипулятора суть величины порядка единицы ($\varphi_i \sim 1$, $i=0, 1, 2$). Тогда для безразмерных переменных и параметров (2.5) выполняются следующие соотношения порядков: $u_i \sim 1$, $\mu_i \sim 1$, $\varphi_i' \sim 1$, $\varphi_i'' \sim 1$ ($i=0, 1, 2$). В дальнейшем предполагается, что $L_i \ll R_i$.

В терминах исходных размерных физических параметров последнее неравенство означает, что времена $\tau_i^{(1)} = L_i/R_i$ ($i=0, 1, 2$) установления токов в цепях электродвигателей много меньше времени T_* рабочей операции. Это предположение выполняется практически для всех типов современных промышленных манипуляционных роботов.

3. Приближенный синтез оптимального управления. Рассматривается случай, когда параметры системы (2.4), (2.5) удовлетворяют соотношениям $|f_i| \ll 1$, $A_{12} \ll A_{11}$, $A_{12} \ll A_{22}$ ($i=0, 1, 2$), имеющим место, если постоянные слагаемые диагональных элементов матрицы квадратичной формы кинетической энергии (1.1) много больше всех других слагаемых. Такие соотношения типичны для ряда современных промышленных манипуляционных роботов, в частности для робота типа «Универсал-5». При этих предположениях система уравнений (2.4), (2.5) записывается в виде

$$\varepsilon L_i^\circ \varepsilon_i^\cdot + R_i \mu_i + k_i \varphi_i^\cdot = u_i, \quad \varepsilon \ll 1, \quad |u_i| \leq 1 \quad (3.1)$$

$$\varphi_i^{\cdot\cdot} = \mu_i + \varepsilon F_i(\varphi, \varphi^\cdot, \varphi^{\cdot\cdot}), \quad \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \quad (3.2)$$

$$(L_i^\circ, F_i \sim 1, \quad 0 < R_i \leq A_R, \quad 0 < k_i \leq A_k, \quad A_{R,k} \sim 1)$$

и с математической точки зрения представляет систему сингулярно и регулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [3, 4]. В нулевом приближении ($\varepsilon=0$) вырожденная система уравнений (3.1), (3.2) распадается на три несвязанные системы второго порядка $R_i \mu_i + k_i \varphi_i^\cdot = u_i$, $\varphi_i^\cdot = \mu_i$ ($i=0, 1, 2$), которые удобно представить в виде трех скалярных дифференциальных уравнений второго порядка

$$R_i \varphi_i^{\cdot\cdot} + k_i \varphi_i^\cdot = u_i \quad (i=0, 1, 2) \quad (3.3)$$

Таким образом, в нулевом приближении отсутствует взаимное влияние движений, отвечающих различным степеням свободы.

Построим синтез оптимальных управлений для систем второго порядка, описываемых каждым из уравнений (3.3), приводящих указанные системы из произвольного начального состояния в состояние (2.1) при ограничениях (2.6) за минимальное время. Поскольку функции входят в уравнения (3.3) линейно, то в силу принципа максимума Л. С. Понтрягина [5] оптимальные управления u_i° релейны и имеют вид $u_i^\circ = \text{sign } \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^\cdot)$. Корни характеристических полиномов уравнений (3.3) вещественны ($\lambda_{i,1} = 0$, $\lambda_{i,2} = -k_i/R_i$) и, следовательно, каждое из управлений u_i° имеет не более одной точки переключения на оптимальной траектории [6]. Отсюда вытекает, что в общем случае оптимальная траектория на фазовой плоскости $(\varphi_i, \varphi_i^\cdot)$ уравнения (3.3) состоит из отрезков двух фазовых кривых, одна из которых отвечает значению $u_i=1$, а другая — $u_i=-1$. Один из отрезков фазовых кривых, составляющих оптимальную траекторию, проходит через конечную точку $(\varphi_i^T, 0)$. Кривая переключения оптимального управления $\Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^\cdot) = 0$ состоит из двух полутраекторий, приводящих изображающую точку уравнения (3.3) в состояние $(\varphi_i^T, 0)$ при $u_i = -1$ и $u_i = 1$.

Общее решение уравнения (3.3) при $u_i = \text{const}$ имеет вид

$$\varphi_i = \frac{u_i}{k_i} (t - t_0) + \frac{R_i}{k_i} \left(\frac{u_i}{k_i} - \omega_i^\circ \right) (e^{-p_i} - 1) + \varphi_i^\circ \quad (3.4)$$

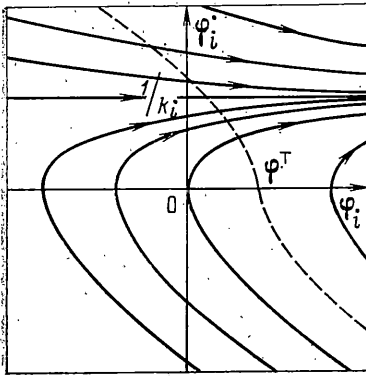
$$\varphi_i^\cdot = u_i/k_i - (u_i/k_i - \omega_i^\circ) e^{-p_i} \quad (i=0, 1, 2)$$

$$p_i = k_i(t - t_0)/R_i$$

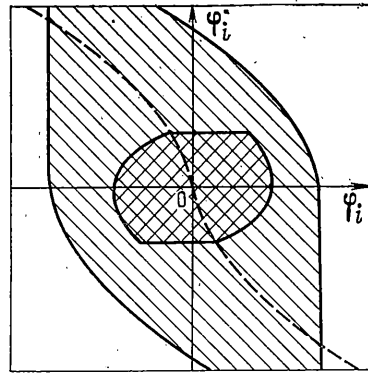
Здесь φ_i° , ω_i° — значения переменных φ_i , φ_i^\cdot соответственно в некоторый момент времени t_0 .

Исключая время t из соотношений (3.4), получим уравнение семейства фазовых кривых уравнения (3.3) при $u_i = \text{const}$ (φ_i° , ω_i° — параметры указанного семейства):

$$\varphi_i = \varphi_i^\circ - \frac{u_i R_i}{k_i^2} \ln \frac{u_i - k_i \varphi_i^\cdot}{u_i - k_i \omega_i^\circ} + \frac{R_i}{k_i} (\omega_i^\circ - \varphi_i^\cdot) \quad (i=0, 1, 2) \quad (3.5)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнение (3.5) инвариантно относительно следующей замены фазовых переменных и параметров: $u_i \rightarrow -u_i$, $\omega_i^{\circ} \rightarrow -\omega_i^{\circ}$, $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$, $\varphi_i^{\circ} \rightarrow -\varphi_i^{\circ}$. Отсюда вытекает, что семейства фазовых траекторий, отвечающих значениям управляющей величины $u_i=1$ и $u_i=-1$, симметричны относительно начала координат. Ограничимся поэтому только исследованием траекторий, соответствующих $u_i=1$. Поскольку выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, из (3.5) следует, что на любой фазовой траектории семейства (3.5) выполняются неравенства $\varphi_i^{\circ} < 1/k_i$, $\omega_i^{\circ} < 1/k_i$ или $\varphi_i^{\circ} > 1/k_i$, $\omega_i^{\circ} > 1/k_i$.

Из выражения для производной функции (3.5) по φ_i° при $u_i=1$ $\partial \varphi_i / \partial \varphi_i^{\circ} = R_i \varphi_i^{\circ} / (1 - k_i \varphi_i^{\circ})$ следует, что в области $\varphi_i^{\circ} < 1/k_i$, $\omega_i^{\circ} < 1/k_i$ функция $\varphi_i(\varphi_i^{\circ})$ монотонно убывает при $\varphi_i^{\circ} < 0$ и монотонно возрастает при $\varphi_i^{\circ} > 0$; в области $\varphi_i^{\circ} > 1/k_i$, $\omega_i^{\circ} > 1/k_i$ функция $\varphi_i(\varphi_i^{\circ})$ монотонно убывает. Кривые семейства (3.5) имеют асимптоту $\varphi_i = 1/k_i$. Отметим, что прямая $\varphi_i = 1/k_i$ также является фазовой траекторией уравнения (3.3) при $u_i=1$, отвечающей стационарному вращению соответствующего звена манипулятора с постоянной скоростью. На фиг. 2 изображены фазовые кривые уравнения (3.3), отвечающие значению $u_i=1$. Стрелками показано направление движения изображающей точки.

Анализ фазовых кривых показывает, что единственной полутраекторией, приводящей изображающую точку системы (3.3) в заданное состояние $\varphi_i = \varphi_i^T$, $\varphi_i^{\circ} = 0$ при $u_i=1$, является кривая

$$\varphi_i = \varphi_i^T - R_i k_i^{-2} [\ln(1 - k_i \varphi_i^{\circ}) + k_i \varphi_i^{\circ}], \quad \varphi_i^{\circ} \leq 0 \quad (3.6)$$

В силу отмеченной центральной симметрии семейств фазовых траекторий, отвечающих $u_i=1$ и $u_i=-1$, единственной полутраекторией, приводящей изображающую точку в состояние $\varphi_i = \varphi_i^T$, $\varphi_i^{\circ} = 0$ при $u_i=-1$, является кривая

$$\varphi_i = \varphi_i^T + R_i k_i^{-2} [\ln(1 + k_i \varphi_i^{\circ}) - k_i \varphi_i^{\circ}], \quad \varphi_i^{\circ} \geq 0 \quad (3.7)$$

Уравнения (3.6), (3.7) в совокупности задают кривую переключения оптимального управления, которая изображена на фиг. 2 штриховой линией. Оптимальное по быстродействию управление системой (3.3) имеет вид

$$u_i^{\circ} = \text{sign } \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^{\circ}), \quad \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^{\circ}) \neq 0 \quad (3.8)$$

$$u_i^{\circ} = 1, \quad \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^{\circ}) = 0, \quad \varphi_i^{\circ} \leq 0; \quad u_i^{\circ} = -1, \quad \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^{\circ}) = 0, \quad \varphi_i^{\circ} > 0$$

$$\Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^{\circ}) = \varphi_i^T - \varphi_i + R_i k_i^{-2} [\ln(1 + k_i |\varphi_i^{\circ}|) - k_i |\varphi_i^{\circ}|] \text{sign } \varphi_i^{\circ}$$

Соответствующее этому управлению минимальное время приведения системы (3.3) из произвольного начального состояния $(\varphi_i, \varphi_i^{\circ})$ в заданное конечное состояние $\varphi_i = \varphi_i^T$, $\varphi_i^{\circ} = 0$ (функция Беллмана рассматриваемой задачи оптимального управления для i -й степени свободы манипулятора, $j=0, 1, 2$) вычисляется по формуле

$$T_i(\varphi_i, \varphi_i^{\circ}) = R_i/k_i \ln(1 + k_i \gamma_i \varphi_i^{\circ}) (1 + P_i)/(1 - P_i) \quad (3.9)$$

$$P_i(\varphi_i, \varphi_i^*) = [1 - (1 + k_i \gamma_i \varphi_i^*) \exp(k_i^2 R_i^{-1} \gamma_i (\varphi_i^T - \varphi_i) - k_i \gamma_i \varphi_i^*)]^{1/2}$$

$$\gamma_i = -\text{sign } \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^*), \quad \Psi_i \neq 0$$

$$\gamma_i = 1, \quad \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^*) = 0, \quad \varphi_i^* \leq 0$$

$$\gamma_i = -1, \quad \Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^*) = 0, \quad \varphi_i^* > 0$$

Функция Беллмана (3.9) вычисляется стандартным способом [6]. Сначала рассчитывается время $T_i^{(1)}$ движения изображающей точки из исходного положения (φ_i, φ_i^*) на фазовой плоскости вдоль фазовой траектории, отвечающей управлению (3.8), до пересечения с кривой переключения. Затем вычисляется время $T_i^{(2)}$ движения по кривой переключения до точки назначения $(\varphi_i^T, 0)$. Полное время $T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)}$. Для определения величин $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}$ используется вторая формула (3.4).

Отметим некоторые предельные случаи. Из (3.8), (3.9) вытекает, что

$$\Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^*) \rightarrow \varphi_i^T - \varphi_i, \quad T_i(\varphi_i, \varphi_i^*) \rightarrow |\varphi_i^T - \varphi_i| k_i, \quad R_i \rightarrow 0, \quad k_i \sim 1 \quad (3.10)$$

$$\Psi_i(\varphi_i, \varphi_i^*) \rightarrow \varphi_i^T - \varphi_i^{-1/2} R_i \varphi_i^{*2} \text{sign } \varphi_i^* \quad (3.11)$$

$$T_i(\varphi_i, \varphi_i^*) \rightarrow R_i \{ \gamma_i \varphi_i^* + 2 [1/2 \varphi_i^{*2} - \gamma_i (\varphi_i^T - \varphi_i) / R_i]^{1/2} \}, \quad k_i \rightarrow 0, \quad R_i \sim 1$$

Случай (3.10) имеет место, когда характерное время $\tau_i^{(2)} = A_{ii} R_i / n_i^2 k_i^2$ установления стационарного значения угловой скорости ротора электродвигателя i -го привода много меньше времени рабочей операции. В пределе (при $R_i \rightarrow 0$) это соответствует кинематическому управлению степенью свободы, отвечающей обобщенной координате φ_i (обобщенная скорость $\dot{\varphi}_i$ пропорциональна управляющей величине u_i (см. (3.3)). Случай (3.11) реализуется, когда, наоборот, время установления стационарного значения угловой скорости ротора электродвигателя привода D_i много больше времени рабочей операции. В пределе (при $k_i \rightarrow 0$) уравнение (3.3) формально совпадает с уравнением прямолинейного движения материальной точки, управляемой приложенной к ней силой. Предельный переход (3.11) приводит к известным выражениям для кривой переключения оптимального управления и функции Беллмана в задаче оптимального по быстродействию управления движением материальной точки при ограниченном модуле силы [6].

Отметим, что формула (3.9) выражает минимальное время, необходимое для приведения манипулятора в заданное конечное состояние по одной (i -й) степени подвижности. Минимальное время приведения всей системы в требуемое положение с торможением движения в конце процесса равно $T = \max_i T_i(\varphi_i, \varphi_i^*)$, $i = 0, 1, 2$.

4. Оценка тепловых потерь в электродвигателе. Одной из существенных характеристик режима работы электропривода является количество «джоулевого» тепла, выделяющегося в обмотке ротора электродвигателя при прохождении в ней электрического тока. Известно [7], что количество тепла q , выделяющееся в проводнике в единицу времени, равно $q = j^2 R$, где j — сила тока, R — омическое сопротивление проводника. Используя соотношение $\mu_i = k_i j_i$, связывающее ток в обмотке ротора электродвигателя привода D_i с величиной момента электромагнитных сил, получим (в исходных размерных переменных) следующее выражение для количества тепла, выделяющегося в единицу времени в обмотке ротора электродвигателя i -го привода:

$$q_i = \mu_i^2 R_i / k_i^2 \quad (4.1)$$

При переходе к безразмерным переменным (2.3) величина q_i преобразуется по формуле $q_i' = T_*^3 q_i / A_{ii}$, а соотношение (4.1) принимает вид (штрихи опущены):

$$q_i = \mu_i^2 R_i / k_i \quad (4.2)$$

Подставляя μ_i из (3.1) при $\varepsilon = 0$ в (4.2), получим

$$q_i = (u_i - k_i \varphi_i^*)^2 / k_i R_i \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4.3)$$

Во избежание сильного перегрева и перегорания обмотки двигателя

допустимая величина q_i ограничивается сверху ($q_i \leq q_i^\circ$), что приводит к ограничениям на угловые скорости движения звеньев манипулятора и на допустимые значения входных напряжений

$$|u_i - k_i \dot{\varphi}_i| \leq (q_i^\circ k_i R_i)^{1/2} \quad (i=0, 1, 2) \quad (4.4)$$

Оценим величину мощности тепловыделения q_i (4.3) для транспортных движений манипуляционного робота. При выполнении роботом транспортных операций в начальный и конечный моменты времени вся система находится в состоянии покоя ($\dot{\varphi}_i = 0$). Из анализа фазовых траекторий системы (3.3) при управлении (3.8) и формулы (4.3) вытекает следующая зависимость величины q_i от времени:

$$q_i(t) = (1 - k_i |\dot{\varphi}_i|)^2 / k_i R_i, \quad 0 \leq t < t_{i*} \quad (4.5)$$

$$q_i(t) = (1 + k_i |\dot{\varphi}_i|)^2 / k_i R_i, \quad t_{i*} \leq t \leq T_i$$

Здесь t_{i*} — момент переключения управления. Если в начальный ($t=0$) и конечный ($t=T_i$) моменты времени $\dot{\varphi}_i = 0$, то $|\dot{\varphi}_i| \leq 1/k_i$ для всех $0 \leq t \leq T_i$, причем величина $|\dot{\varphi}_i|$ монотонно возрастает на интервале $0 \leq t < t_{i*}$ и монотонно убывает при $t_{i*} < t < T_i$. Отсюда и из (4.5) вытекает, что минимальное и максимальное значения величины $q_i(t)$ соответственно равны

$$q_i^{\min} = (1 - k_i |\dot{\varphi}_i(t_*)|)^2 / k_i R_i, \quad q_i^{\max} = (1 + k_i |\dot{\varphi}_i(t_*)|)^2 / k_i R_i$$

$$|\dot{\varphi}_i(t_*)| = [1 - \exp(-k_i^2 |\varphi_i^T - \varphi_i^\circ| / R_i)]^{1/2} / k_i \quad (i=0, 1, 2)$$

и справедлива двусторонняя оценка мощности тепловыделения

$$\{1 - [1 - \exp(-k_i^2 |\varphi_i^T - \varphi_i^\circ| / R_i)]^{1/2}\}^2 \leq k_i R_i q_i \leq \quad (4.6)$$

$$\leq \{1 + [1 - \exp(-k_i^2 |\varphi_i^T - \varphi_i^\circ| / R_i)]^{1/2}\}^2 \leq 4$$

Из (4.6) следует, что если максимально допустимая величина мощности тепловыделения $q_i \geq 4/k_i R_i$, то ограничение (4.4) выполняется для любых значений $\varphi_i^\circ, \varphi_i^T$. С другой стороны, из (4.5) вытекает, что $q_i(0) = q_i(T_i) = 1/k_i R_i$ и, следовательно, если $q_i^\circ < 1/k_i R_i$, то управление (3.8) не удовлетворяет ограничению на мощность тепловыделения ни при каких значениях начальных φ_i° и конечных φ_i^T углов поворота звеньев манипулятора.

5. Замечания. 1. Для большинства промышленных манипуляционных роботов величины допустимых углов между звеньями ограничены:

$\varphi_i^{\min} \leq \varphi_i \leq \varphi_i^{\max}$. Эти ограничения обусловлены конструкцией манипулятора (например, наличием жестких упоров). Для программных транспортных движений, когда в начале и конце процесса система покоится, управление (3.8) обеспечивает удовлетворение неравенств $\varphi_i^{\min} \leq \varphi_i \leq \varphi_i^{\max}$, если начальные (φ_i°) и конечные (φ_i^T) значения углов между звеньями являются допустимыми. Это следует из вида фазовых траекторий системы (3.3) при управлении (3.8), которые изображены на фиг. 2. Из вида фазовых кривых также следует, что если $\varphi_i^{\min} < \varphi_i^\circ < \varphi_i^{\max}$, $\varphi_i^{\min} < \varphi_i^T < \varphi_i^{\max}$, то оптимальная программная фазовая траектория принадлежит допустимой области вместе с некоторой окрестностью. В этом случае при малых возмущениях программной траектории, например вследствие слабых ударов во время движения, управление в форме синтеза (3.8) обеспечивает приведение системы в заданное конечное состояние без нарушений наложенных ограничений.

Рассмотрим более детально вопрос об области практической применимости оптимального управления в форме синтеза (3.8). Пусть кроме ограничений на углы поворота $\varphi_i^{\min} \leq \varphi_i \leq \varphi_i^{\max}$ наложены ограничения (4.4) на мощность тепловыделения в обмотках роторов электродвигателей, а также условия: $\varphi_i \geq 0$ при $\varphi_i = \varphi_i^{\min}$, $\varphi_i \leq 0$ при $\varphi_i = \varphi_i^{\max}$.

Последние соотношения будем называть условиями безударности движения, так как их нарушение приводит к ударам, если манипулятор имеет упоры, ограничивающие углы поворота звеньев. В соотношениях (4.4) предполагается, что $q_i^0 > 1/k_i R_i$, поскольку в противном случае управление (3.8) не обеспечивает приведение манипулятора в заданное конечное положение с торможением движения в конце процесса без нарушения ограничений (4.4) (см. п. 4). Из вида фазовых кривых системы (3.3) при управлении (3.8) следует, что условия безударности движения удовлетворяются, если $(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) \in \Sigma_i^{(1)}$, где

$$\Sigma_i^{(1)} = \{ \varphi_i, \dot{\varphi}_i : \varphi_i^{\min} \leq \varphi_i \leq \varphi_i^{\max} + R_i k_i^{-2} [\ln(1 + k_i \dot{\varphi}_i) - k_i \dot{\varphi}_i], \quad \dot{\varphi}_i \geq 0$$

$$\varphi_i^{\min} - R_i k_i^{-2} [\ln(1 - k_i \dot{\varphi}_i) + k_i \dot{\varphi}_i] \leq \varphi_i \leq \varphi_i^{\max}, \quad \dot{\varphi}_i \leq 0 \} \quad (i=0, 1, 2)$$

Область $\Sigma_i^{(1)}$ схематически представлена на фиг. 3 (заштрихована) в случае $\varphi_i^T = 0$; штриховой линией показана кривая переключения оптимального управления.

Из геометрии фазовых кривых системы (3.3) при управлении (3.8) вытекает процедура построения области $\Sigma_i^{(2)}$ на фазовой плоскости $(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$, обеспечивающей удовлетворение ограничения на мощность тепловыделения в обмотке ротора электродвигателя для движений, начинающихся в любой точке указанной области. Проводятся прямые $\varphi_i = \pm 1/k_i \mp (q_i^0 R_i/k_i)^{1/2}$ ($i=0, 1, 2$), ограничивающие допустимые значения угловых скоростей согласно (4.4). Если $(k_i q_i^0 R_i)^{1/2} < 2$, то через точки пересечения указанных прямых с участками кривой переключения оптимального управления, отвечающими $u_i = -1$ и $u_i = 1$, проводятся фазовые траектории $\Gamma_i^{(1)}$, $\Gamma_i^{(2)}$ для значений управления $u_i = 1$ и $u_i = -1$ (соответственно). Множество точек фазовой плоскости, ограниченное кривыми $\Gamma_i^{(1)}$, $\Gamma_i^{(2)}$ и отмеченными выше прямыми, и есть область $\Sigma_i^{(2)}$ (показана на фиг. 3 двойной штриховкой). Аналитическое выражение для области $\Sigma_i^{(2)}$ имеет вид

$$\Sigma_i^{(2)} = \left\{ \varphi_i, \dot{\varphi}_i : -R_i k_i^{-2} \left[\ln \frac{1 - k_i \dot{\varphi}_i}{\sqrt{k_i q_i^0 R_i} (2 - \sqrt{k_i q_i^0 R_i})} + k_i \dot{\varphi}_i \right] \leq \right. \\ \left. \leq \varphi_i - \varphi_i^T \leq R_i k_i^{-2} \left[\ln \frac{1 + k_i \dot{\varphi}_i}{\sqrt{k_i q_i^0 R_i} (2 - \sqrt{k_i q_i^0 R_i})} - k_i \dot{\varphi}_i \right] \right.$$

$$\left. \left. 1/k_i - (q_i^0 R_i/k_i)^{1/2} \leq \dot{\varphi}_i \leq -1/k_i + (q_i^0 R_i/k_i)^{1/2} \right\} \quad (i=0, 1, 2)$$

Если $(q_i^0 R_i/k_i)^{1/2} \geq 2$, то

$$\Sigma_i^{(2)} = \{ \varphi_i, \dot{\varphi}_i : 1/k_i - (q_i^0 R_i/k_i)^{1/2} \leq \dot{\varphi}_i \leq -1/k_i + (q_i^0 R_i/k_i)^{1/2} \}$$

Множество Σ_i на фазовой плоскости $(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$, удовлетворяющее всем наложенным ограничениям, очевидно, есть $\Sigma_i = \Sigma_i^{(1)} \cap \Sigma_i^{(2)}$. На фиг. 3 это множество совпадает с областью $\Sigma_i^{(2)}$.

2. После того как под действием управления (3.8) угловая координата φ_i примет требуемое значение $\varphi_i^T = \varphi_i(T_i)$ при нулевой угловой скорости (практически попадает в достаточно малую окрестность конечного положения при малом значении $|\dot{\varphi}_i|$); желательно, чтобы величина $\varphi_i = \varphi_i^T$ в дальнейшем сохранялась в отсутствие напряжения на клеммах электродвигателя привода D_i . Для этого необходимо предусмотреть возможность арретирования отдельных звеньев манипулятора. Это может быть обеспечено применением специальных тормозных устройств или необратимых передаточных механизмов (типа червячных). В противном случае часть обобщенных координат (для модели манипулятора, рассматриваемого в публикуемой работе, это углы φ_1, φ_2) при нулевом значении управляющего напряжения будет «уходить» от номинального значения вследствие постоянного действия силы тяжести. Для поддержания в этом случае величин угловых координат вблизи номинальных значений потребуется периодически включать электромеханическую систему управления, что приведет к неоправданному расходу энергии и перегреву обмоток роторов электродвигателей.

3. Наличие малых регулярных возмущений порядка ε , а также возмущений, неучтенных в уравнениях (3.1), (3.2), на интервале времени $T \sim 1$ приведет к малой погрешности порядка ε по времени быстрого действия, фазовой траектории и точности позиционирования. В малой окрестности конечного положения следует предусмотреть режим стабилизации [1, 8].

Сингулярные возмущения в системе (3.1), (3.2) для более точного решения задачи оптимального быстрого действия требуют учета пограничных слоев в начале и конце процесса управления [3]. Это потребует весьма высокого быстрого действия системы управления и системы измерений. Повышение точности позиционирования, как и выше, может быть обеспечено дополнительным режимом стабилизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козырев Ю. Г. Промышленные роботы: Справочник. М.: Машиностроение, 1983. 376 с.
2. Чиликин М. Г., Ключев В. И., Сандлер А. С. Теория автоматизированного электропривода. М.: Энергия, 1979. 616 с.
3. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1982, т. 20, с. 3-77.
4. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
6. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
7. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Наука, 1983. 687 с.
8. Летов А. М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 359 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.II.1985