новича «Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием». Изв. АН СССР. МТТ, № 6, 1979.

9. *Мартынович Т. Л.* К обоснованию решения плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, № 6, 1979.

10. *Александров В. М., Сумбатян М. А.* Об одном подходе к решению плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, № 6, 1979.

Москва

Поступила в редакцию 25.II.1982

УДК 539.3

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ОБРАТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ВИГДЕРГАУЗ С. Б.

Обратная задача теории упругости для многосвязного однородного и изотропного пространства S с полостями, нагруженного на бесконечности усилиями $\sigma_x{}^\infty=q_1$, $\sigma_y{}^\infty=q_2$, $\sigma_z{}^\infty=q_3$, q_1, q_2, $q_3\geqslant 0$, состоит в определении формы гладкой границы $\Gamma=\cup\Gamma_l$, $l=\overline{1,n}$ замкнутых, непересекающихся полостей, доставляющих минимум максимуму (по области) плотности интеграла энергии формоизменения – локальному критерию Мизеса $F(x,y,z)=I_1{}^2-3I_2$ [1]; I_1, I_2 – инварианты тензора напряжений. Оптимальная в таком смысле граница позволяет увеличить действующую нагрузку до наибольшего возможного предела, при котором ни в одной точке S еще не возникает пластичность.

К настоящему времени по этой задаче имеются определенные результаты. Так, в [2] получены необходимые условия глобального оптимума, а для двумерного случая плоскости с различно расположенными отверстиями в [3–4] найдена и сама граница – методами конформных отображений. Отсутствие их эффективного пространственного аналога серьезно затрудняет процедуру решения рассматриваемой задачи. Установлено [2], что при $n=1$ оптимальной является полость в форме трехосного эллипсоида с отношением осей, зависящим от нагрузки. В публикуемой статье приводится способ отыскания границы для более сложного случая двух одинаковых полостей при наличии силовой и геометрической симметрии задачи по оси цилиндрической системы координат $(z,\ r,\ \theta)$, когда $q_1=q_2$, а полости в форме тел вращения расположены симметрично относительно плоскости $z=0$ и пересекают ось Z в точках $-b_2$, $-b_1$ и b_1, b_2 соответственно, $b_2>b_1>0$.

В [5] показано, что при этом функция Лява $\chi(z,r)$ прямой задачи гармонична в области с оптимальной границей, а для ее производной $\varphi(z,r)=\partial\chi(z,r)/\partial z$ на искомых поверхностях одновременно выполняются краевые условия Дирихле и Неймана:

$$\begin{gathered}\varphi(z,r)=az+C_l,\qquad \partial\varphi/\partial\nu=-\partial z/\partial\nu\\ z,r\in\Gamma_l,\qquad l=1,2,\qquad a=(2q_1-q_3)/q_3\end{gathered}\tag{1}$$

где C_l – постоянные, ν – внутренняя для S нормаль к Γ.

Специальный вид правых частей позволяет установить аналогию с расчетом обтекания твердых тел идеальной жидкостью, поляризации диэлектриков во внешнем однородном электростатическом поле, а также с обратной задачей для ньютоновского потенциала [6] – об определении формы системы однородных тел, внутри которых он является заданной квадратичной формой от z, r. В плоском случае эти аналогии отмечались ранее [1, 3]. В [7] на их основе для произвольной системы тел усилена теорема Полиа – Шиффера [8].

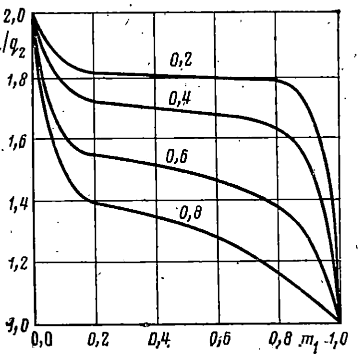
Из (1) следует, что $\varphi(z,r)$ продолжима внутрь полостей (по непрерывности своей нормальной производной) гармонической функцией C_l-z, а значит, представима всюду потенциалом двойного слоя с плотностью $(a+1)z$. Это представление, записанное на границе, дает нелинейное интегральное уравнение относительно функций $z(s)$, $r(s)$, определяющих меридиональное сечение оптимальных полостей в параметрической форме, s – длина дуги, d_l – постоянные

$$z(s)+d_l+\lambda T_\Gamma(z(s)+d_l)=0;\qquad \lambda=q_1/(q_1-q_3)\tag{2}$$

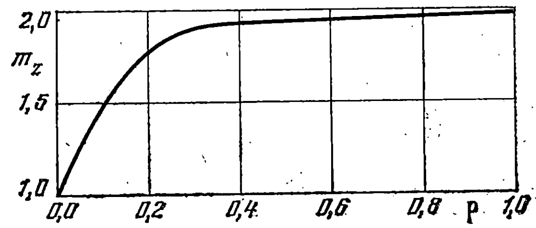
где T_Γ – интегральный оператор потенциала двойного слоя. Спектр оператора T_Γ для произвольной области не лежит внутри единичного отрезка [9], поэтому для разрешимости (2) необходимо, чтобы $\lambda>1$, т. е. $0<q_3\leqslant q_1$ или $\lambda\leqslant -1$, т. е. $q_1\leqslant q_3\leqslant 2q_1$. В частном случае $n=1$ это условие найдено в [5].

Из результатов [10] следует, что уравнение (2) при $n=2$ редуцируется к простой форме (h – постоянная интегрирования):

$$\frac{z_0^2}{2a}+\frac{d_2 z}{a}+h=\int\limits_{b_1}^{b_2}\left\{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}+\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}\right\}dz\tag{3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Функция $r=r(z)$, задающая форму сечения оптимальной границы, с необходимостью является решением уравнения (3).

Второе подынтегральное слагаемое в (3) описывает взаимное влияние полостей на их форму. При b_1, $b_2\to\infty$ оно исчезает, что отвечает случаю $n=1$, когда оптимальной полостью, как указывалось, является эллипсоид вращения, т. е. координатная поверхность в ортогональных криволинейных переменных, разделяющих уравнение Лапласа. По аналогии можно предположить, что это свойство сохраняется и при $n=2$. Такие переменные для осесимметричных областей различной связности изучались Вангерином [11], показавшим, что при $n\geqslant 3$ их не существует, а при $n=2$ все они с точностью до масштаба порождаются конформным отображением в меридиональной плоскости $z+ir=f(u+iv)$, где f – произвольная эллиптическая функция. Ее конкретный вид определяется расположением полостей относительно оси Z. В нашем случае это $\operatorname{sn}(u+iv|m)$, $0\leqslant m\leqslant 1$, переводящая прямоугольник $0\leqslant|u|\leqslant K(m)$, $0\leqslant|v|\leqslant K'(m)$ в плоскость с разрезами вдоль отрезков действительной оси $1\leqslant|z|\leqslant \leqslant m^{-1/2}$, K, K' – четвертьпериоды функции sn. Отрезкам $u=u_0$ отвечают конфокальные бициркулярные кривые четвертого порядка [12], по предположению, сечения оптимальной границы. Переход в (3) к переменной $\xi=\operatorname{dn}(v,|1-m)$ позволяет выразить правую часть через интегралы от элементарных функций и эллиптические; но из-за громоздкости таких выкладок интеграл брался численно для 30–50 равноотстоящих значений параметра $z_0\in[b_1,b_2]$, а коэффициенты параболы в левой части (3) находились затем методом наименьших квадратов. Для всех m и u_0 дисперсия не превышала $8\cdot 10^{-5}$.

На фиг. 1 показана найденная зависимость отношения $1\leqslant q_3/q_2\leqslant 2$ от $m_1= =(1-\sqrt{m})^2/(1+\sqrt{m})^2$ при разных значениях $\operatorname{sn}(u_0/m)$. Величина m наряду с масштабным множителем является, как и в плоском случае [3], независимым геометрическим параметром, определяющим толщину перемычки между полостями. Конкретный вид Г, полученный иным способом, приведен в [10].

Для интервала $0\leqslant q_3/q_2\leqslant 1$ использовалось отображение $z+ir=\mathrm{Z}(u+iv|m)+ +\pi(u+iv)/2KK'$ (Z – дзета-функция Якоби [11]), переводящее прямоугольник во внешность двух разрезов, параллельных оси r. Хотя Z – неэллиптическая функция, а значит, не разделяет переменные, здесь также получаются удовлетворительные результаты с дисперсией не выше $7\cdot 10^{-4}$. Увеличение дисперсии на порядок связано, видимо, с погрешностью при вычислении дзета-функции, тогда как в предыдущем случае эллиптические функции фактически не вычислялись – использовались лишь известные алгебраические соотношения [11] между их квадратами.

Надо отметить, что вопрос существования и единственности решения обратной трехмерной задачи для многосвязной области совершенно не исследован, поэтому не исключено наличие оптимальной границы при $n=2$ в других классах поверхностей.

В гидродинамической постановке обратной задачи функция $\varphi(z,r)$ отождествляется с потенциалом, а второе из условий (2) – с граничным условием обтекания системы твердых тел в форме оптимальных полостей. Тогда первое условие в (2) позволяет свести определение ее присоединенной массы m_z в направлении z к вычислению площади G их меридионального сечения

$$m_z=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_\Gamma\varphi(z,r)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\Gamma=2\pi a\int_\Gamma z\frac{\partial z}{\partial\nu}\,d\Gamma=2\pi Ga$$

В частности, при $q_3\to 0$ полости вырождаются в круговые разрезы, параллельные плоскости $z=0$.

На фиг. 2 представлена найденная численной экстраполяцией сплайнами зависимость m_z для двух плоских дисков единичного радиуса от ρ – половины расстояния между ними; m_z отнесена к присоединенной массе одиночного диска.

Автор благодарит Н. В. Баничука, К. А. Лурье и А. В. Черкаева за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
2. *Вигдергауз С. Б.* Обратная задача трехмерной теории упругости.– Изв. АН СССР. МТТ, 1983, № 2, с. 90–93.
3. *Черепанов Г. П.* Обратные задачи плоской теории упругости.– ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963–979.
4. *Вигдергауз С. Б.* Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости.– ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 566–569.
5. *Вигдергауз С. Б.* Условия оптимальности в осесимметричных задачах теории упругости.– ПММ, 1982, т. 46, вып. 2, с. 278–282.
6. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.– Л.: Гостехиздат, 1946. 318 с.
7. *Вигдергауз С. Б.* Одна точная оценка коэффициентов присоединенных масс.– ПММ, 1985, т. 49, вып. 1, с. 163–166.
8. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
9. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 311 с.
10. *Вигдергауз С. Б.* Оптимальные полости в упругом пространстве с осевой симметрией.– Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 3, с. 51–58.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967. 299 с.
12. *Савелов А. А.* Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960. 293 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
12.III.1985

О ВЛИЯНИИ АДСОРБЦИИ ГАЗОВ НА ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ КВАЗИХРУПКИХ МЕТАЛЛОВ

ДАЛЬ Ю. М.

Отмечается, что в квазихрупких металлах работа пластической деформации γ_p является функционалом, зависящим от поверхностной энергии материала γ_c. В условиях плоской деформации и равновесной трещины $\gamma_p \sim \gamma_c^{1/2}$. Выведены теоретические зависимости, позволяющие оценить влияние физической адсорбции газов на величину γ_p.

1. Энергетическое условие квазихрупкого разрыва имеет вид [1]:

$$\delta W/\delta s = a_p + 2\gamma_c \tag{1.1}$$

Здесь δW – изменение энергии деформации при увеличении площади трещины на величину δs, γ_c – поверхностная энергия материала, a_p – работа пластических деформаций ε_p у вершины трещины.

Согласно экспериментам [2] $\varepsilon_p = \varepsilon_p^* + \varepsilon_p'$, где ε_p^* – пластическая деформация, развивающаяся у конца равновесной трещины до возникновения у ее вершины микроразрыва сплошности, ε_p' – дополнительная пластическая деформация, обусловленная появлением микроразрыва.

Очевидно $a_p = \gamma_p + \gamma_p'$. Здесь γ_p – работа пластических деформаций ε_p^*, γ_p' – работа пластических деформаций ε_p' (для металлов $\gamma_p \gg \gamma_p' > \gamma_c$).

Поскольку величина ε_p^* определяется силами сцепления смежных атомов материала перед концом трещины [3], то

$$\gamma_p = f(\gamma_c) \tag{1.2}$$

Таким образом, в критерии разрушения (1.1) энергия γ_c не является простым аддитивным слагаемым и служит своеобразным «клапаном», регулирующим работу γ_p, а следовательно, и a_p. На это обстоятельство обращалось внимание в [4–6].

Среда воздействует на поверхностную энергию γ_c в вершине трещины, изменяя ее за счет адсорбции и диффузии своих реагентов. В силу функциональной связи (1.2) это приводит к изменению величин γ_p и a_p. Конкретизируем вид соотношения (1.2) для тела с прямолинейным равновесным разрезом в условиях плоской деформации. Поместим начало декартовой системы координат xy в вершину разреза, ось x направим вдоль его берегов. Следуя [7], имеем

$$\gamma_p = \frac{1}{\delta l} \int_0^{\delta l} \sigma_y^*(x) 2v_y^*(x)\,dx \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma_y^*(x)$ и $v_y^*(x)$ – соответственно напряжения и перемещения у оси x в момент появления на ней микроразрыва сплошности длиной δl.

С математической точки зрения $v_y^*(x)$ и $\sigma_y^*(x)$ непрерывные функции, причем