УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА

ПЕРЛИН П. И., ТКАЧЕВ В. А.

В [1, 2] и других работах получены и исследованы интегральные уравнения Фредгольма, соответствующие основным плоским задачам теории упругости для анизотропной среды. В [3] получены и исследованы сингулярные интегральные уравнения для тех же задач. В [4] исследованы спектральные свойства полученных в [3] уравнений, которые позволили доказать сходимость метода последовательных приближений.

В публикуемой работе излагается расчетная схема решения сингулярных уравнений для случая второй основной задачи.

Приведем (в обозначениях [3]) основные положения теории. При отсутствии объемных сил смещения $u(x)$ удовлетворяют в области уравнению

$$\Delta^* u=0 \tag{1}$$

где Δ^* – векторный эллиптический оператор, коэффициенты которого выражаются через упругие постоянные материала A_{ij} $(i,j=1,2,3)$ (для случая плоской деформации). Корни соответствующего характеристического уравнения будем обозначать через $\alpha_k=a_k+ib_k$ и $\bar{\alpha}_k=a_k-ib_k$ $(k=1,2)$, причем $b_k>0$.

Матрица фундаментальных решений уравнения (1) имеет вид

$$\Gamma(x,y)=\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}\begin{Vmatrix} A_k & B_k \\ B_k & C_k \end{Vmatrix}\ln\sigma_k \tag{2}$$

где $\sigma_k=(x_1-y_1)+\alpha_k(x_2-y_2)$ $(k=1,2)$, а постоянные A_k, B_k и C_k выражаются определенным образом через упругие постоянные материала и корни характеристического уравнения.

Исходя из представлений смещений в форме потенциала простого слоя

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{l}\Gamma(x,y)\varphi(y)\,dl_y \tag{3}$$

и осуществляя предельный переход для оператора напряжений к точкам граничного контура l, получаем для плотности $\varphi(x)$ сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_{l}\Gamma_1(x,y)\varphi(y)\,dl_y=-\lambda f(x)=F(x),\qquad x\in l \tag{4}$$

Постоянная λ введена в уравнение для единообразной записи уравнения для внешней и внутренней задач (значению $\lambda=1$ соответствует внешняя задача, значению $\lambda=-1$ – внутренняя), $f(x)$ – краевые значения напряжений. Матрица $\Gamma_1(x,y)$ (получаемая в результате воздействия на матрицу $\Gamma(x,y)$ оператора напряжений) имеет вид

$$\Gamma_1(x,y)=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}\begin{Vmatrix} N_k & L_k \\ M_k & H_k \end{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial S_x}\ln\sigma_k$$

где постоянные N_k, L_k, M_k и H_k также выражаются через упругие постоянные материала и корни характеристического уравнения.

Решение уравнения (4) будем разыскивать в виде ряда

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(x)$$

что приводит к рекуррентным соотношениям

$$\varphi_{n+1}(x)=\int\limits_{l}\Gamma_1(x,y)\varphi_n(y)\,dl_y,\qquad \varphi_0(x)=F(x) \tag{5}$$

Таким образом, реализация метода последовательных приближений, как и других методов, приводит к построению квадратурных формул для одномерных сингулярных интегралов. В [5] для построения кубатурных формул для двумерных сингулярных интегралов было предложено осуществлять преобразование специального вида (так называемое регулярное представление), которое приводило их к несобственным интегралам, что давало возможность обращаться к известным кубатурным формулам. Аналогичный прием можно осуществить и в данном случае, однако далее предлагается иной прием, также приводящий к несобственному интегралу, но требующий меньшего числа операций. Заметим, что в [5] рассматривалась изотропная среда и поэтому объем вычислений был вполне приемлемым.

Воспользовавшись равенством

$$\frac{\partial}{\partial S_x}\ln \sigma_k = \frac{\partial}{\partial S_x}\ln\frac{\sigma_k}{r} + \frac{\partial}{\partial S_x}\ln r$$

преобразуем подынтегральное выражение в (5) к виду

$$\Gamma_1(x,y)\varphi(y) = -\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}\left\|\begin{matrix} N_k & L_k \\ M_k & H_k\end{matrix}\right\| \frac{\partial}{\partial S_x}\ln\frac{\sigma_k}{r}\left\|\begin{matrix}\varphi_1(y)\\ \varphi_2(y)\end{matrix}\right\| -$$

$$-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}\left\|\begin{matrix} N_k & L_k \\ M_k & H_k\end{matrix}\right\| \left\{\left\|\begin{matrix}\varphi_1(y)\\ \varphi_2(y)\end{matrix}\right\|\frac{\partial}{\partial S_x}\ln r + \left\|\begin{matrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{matrix}\right\|\frac{\partial}{\partial S_y}\ln r\right\} + \qquad (6)$$

$$+\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}\left\|\begin{matrix} N_k & L_k \\ M_k & H_k\end{matrix}\right\| \frac{\partial}{\partial S_y}\ln r\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{matrix}\right\|$$

Сингулярное слагаемое присутствует лишь в последнем слагаемом. Поскольку главное значение интеграла от последнего слагаемого равно нулю, так как

$$\oint \frac{\partial}{\partial S_y}\ln r\, dl_y = \oint d\ln r = 0$$

можно опустить в (6) соответствующее слагаемое.

Напомним, что при реализации подхода, предложенного в [5], необходимо было вычесть из подынтегрального выражения сопряженную матрицу, умноженную на $\varphi(x)$.

Отметим следующее обстоятельство. Уравнение (4) в случае внутренней задачи расположено на собственном значении, однако процесс последовательных приближений (при точной реализации алгоритма) должен сходиться, поскольку правая часть – краевое условие – по постановке краевой задачи ортогональна собственным функциям союзного уравнения. Погрешность расчетной схемы может привести к расходимости приближений. Для обеспечения сходимости можно (аналогично [5]) осуществлять должную корректировку каждой итерации.

В [6] показано (на основании принципа Робена), что и при расходящемся процессе решение в напряжениях может оказаться сходящимся. Приведенные рассуждения справедливы и для рассматриваемого уравнения (4).

Изложенный алгоритм был применен для решения ряда задач в случае ортотропной среды. Найденные численно результаты сравнивались с решениями, полученными в [7] на основе аппарата комплексного переменного посредством введения малого параметра. Разумеется, использовались те же значения упругих постоянных. В связи с дискуссией [8–10] были проведены расчеты для пластинки из фанеры с отверстием, контур которого имеет параметрическое представление в виде

$$x={}^9/_8(\cos\theta-{}^1/_9\cos 3\theta),\qquad y={}^9/_8(\sin\theta+{}^1/_9\sin 3\theta),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \qquad (7)$$

Приведем значения коэффициентов концентрации напряжений в двух характерных точках контура (на пересечении с осями координат): $K_x=-0{,}59(-0{,}57)$ и $K_y=2{,}26(2{,}22)$. В скобках приведены значения, полученные в [7].

Высокая точность (в пределах 2–3%) наблюдалась и для других задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Плоская деформация в анизотропной среде.– Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1936, № 76, 19 с.
2. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды.– Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1938, № 86, с. 51–77.
3. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
4. *Лазарев М. И.* О решении основных задач теории упругости анизотропной среды методом потенциала.– В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-е Горьк. ун-та, 1978, вып. 9, с. 3–7.
5. *Перлин П. И.* Применение регулярного представления сингулярных интегралов к решению второй основной задачи теории упругости.– ПММ, 1976, т. 40, вып. 2, с. 366–371.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
7. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.– Л.: Гостехиздат, 1947. 364 с.
8. *Космодамианский А. С., Лехницкий С. Г., Ложкин В. Н.* О работе Т. Л. Марты-

новича «Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием». Изв. АН СССР. МТТ, № 6, 1979.
9. *Мартынович Т. Л.* К обоснованию решения плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, № 6, 1979.
10. *Александров В. М., Сумбатян М. А.* Об одном подходе к решению плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. Изв. АН СССР. МТТ, № 6, 1979.

Москва

Поступила в редакцию
25.II.1982

УДК 539.3

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ОБРАТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ВИГДЕРГАУЗ С. Б.

Обратная задача теории упругости для многосвязного однородного и изотропного пространства S с полостями, нагруженного на бесконечности усилиями $\sigma_x^\infty=q_1$, $\sigma_y^\infty=q_2$, $\sigma_z^\infty=q_3$, q_1, q_2, $q_3\geqslant 0$, состоит в определении формы гладкой границы $\Gamma=\cup\Gamma_l$, $l=\overline{1,n}$ замкнутых, непересекающихся полостей, доставляющих минимум максимуму (по области) плотности интеграла энергии формоизменения – локальному критерию Мизеса $F(x,y,z)=I_1^2-3I_2$ [1]; I_1, I_2 – инварианты тензора напряжений. Оптимальная в таком смысле граница позволяет увеличить действующую нагрузку до наибольшего возможного предела, при котором ни в одной точке S еще не возникает пластичность.

К настоящему времени по этой задаче имеются определенные результаты. Так, в [2] получены необходимые условия глобального оптимума, а для двумерного случая плоскости с различно расположенными отверстиями в [3–4] найдена и сама граница – методами конформных отображений. Отсутствие их эффективного пространственного аналога серьезно затрудняет процедуру решения рассматриваемой задачи. Установлено [2], что при $n=1$ оптимальной является полость в форме трехосного эллипсоида с отношением осей, зависящим от нагрузки. В публикуемой статье приводится способ отыскания границы для более сложного случая двух одинаковых полостей при наличии силовой и геометрической симметрии задачи по оси цилиндрической системы координат (z, r, θ), когда $q_1=q_2$, а полости в форме тел вращения расположены симметрично относительно плоскости $z=0$ и пересекают ось Z в точках $-b_2$, $-b_1$ и b_1, b_2 соответственно, $b_2>b_1>0$.

В [5] показано, что при этом функция Лява $\chi(z,r)$ прямой задачи гармонична в области с оптимальной границей, а для ее производной $\varphi(z,r)=\partial\chi(z,r)/\partial z$ на искомых поверхностях одновременно выполняются краевые условия Дирихле и Неймана:

$$\begin{gathered}\varphi(z,r)=az+C_l,\qquad \partial\varphi/\partial\nu=-\partial z/\partial\nu\\ z,r\in\Gamma_l,\qquad l=1,2,\qquad a=(2q_1-q_3)/q_3\end{gathered}\tag{1}$$

где C_l – постоянные, ν – внутренняя для S нормаль к Γ.

Специальный вид правых частей позволяет установить аналогию с расчетом обтекания твердых тел идеальной жидкостью, поляризации диэлектриков во внешнем однородном электростатическом поле, а также с обратной задачей для ньютоновского потенциала [6] – об определении формы системы однородных тел, внутри которых он является заданной квадратичной формой от z, r. В плоском случае эти аналогии отмечались ранее [1, 3]. В [7] на их основе для произвольной системы тел усилена теорема Полиа – Шиффера [8].

Из (1) следует, что $\varphi(z,r)$ продолжима внутрь полостей (по непрерывности своей нормальной производной) гармонической функцией C_l-z, а значит, представима всюду потенциалом двойного слоя с плотностью $(a+1)z$. Это представление, записанное на границе, дает нелинейное интегральное уравнение относительно функций $z(s)$, $r(s)$, определяющих меридиональное сечение оптимальных полостей в параметрической форме, s – длина дуги, d_l – постоянные

$$z(s)+d_l+\lambda T_\Gamma(z(s)+d_l)=0;\qquad \lambda=q_1/(q_1-q_3)\tag{2}$$

где T_Γ – интегральный оператор потенциала двойного слоя. Спектр оператора T_Γ для произвольной области не лежит внутри единичного отрезка [9], поэтому для разрешимости (2) необходимо, чтобы $\lambda>1$, т. е. $0<q_3\leqslant q_1$ или $\lambda\leqslant-1$, т. е. $q_1\leqslant q_3\leqslant 2q_1$. В частном случае $n=1$ это условие найдено в [5].

Из результатов [10] следует, что уравнение (2) при $n=2$ редуцируется к простой форме (h – постоянная интегрирования):

$$\frac{z_0^2}{2a}+\frac{d_2 z}{a}+h=\int\limits_{b_1}^{b_2}\left\{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}+\sqrt{r^2+(z+z_0)^2}\right\}dz\tag{3}$$