МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИЗГИБА НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ВИРТУАЛЬНЫХ РАБОТ

МАТВЕЕВ А. Д., НЕМИРОВСКИЙ Ю. В.

Методы конечных разностей и конечных элементов являются основными методами расчета изгиба пластин. Однако реализация этих методов на ЭВМ имеет определенные трудности [1, 2], связанные с одновременной обработкой большого объема числовой информации вследствие решения систем алгебраических уравнений высокого порядка и приводит к большим погрешностям вычислений [1]. Возникающая в связи с этим необходимость ограничения порядка систем уравнений служит препятствием для получения решения исходной задачи с требуемой точностью. Метод Ритца в энергетических пространствах [3] для решения задач изгиба неоднородных пластин в общем случае не рассматривался. В [4] представлены лишь некоторые частные результаты для прямоугольной пластины без отверстий. При этом важный вопрос о выборе системы координатных функций для построения полной по энергии системы функций не обсуждается.

Для всякой закрепленной пластины всегда можно определить некоторый линеал L ее линейно-упругих решений (прогибов). Тогда, при построении метода расчета изгиба такой пластины для нагружений, порождающих линеал L, можно использовать основные принципы теории упругости.

В публикуемой работе предложен метод решения задачи изгиба неоднородной пластины Кирхгофа произвольной формы для любого линеала L ее линейно-упругих решений. В основе метода лежит принцип виртуальной работы. Предложен один из критериев выбора соответствующих координатных функций.

1. Определим нормированное пространство L_e как линеал L с соответствующим скалярным произведением $(,)_e$ и нормой $\|\cdot\|=\sqrt{(,)_e}$. Тогда решение $w_0\in L_e$ изгибаемой пластины согласно предлагаемому методу имеет вид

$$w_0=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}F(\varphi_n)\varphi_n \qquad (1.1)$$

где $F(\varphi_n)$ — работа внешних сил пластины на перемещениях $\varphi_n\in\{\varphi_n\}$, $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис L_e. Отметим, что структура решения (1.1) аналогична структуре решения таких задач по методу Ритца [1] или Бубнова — Галеркина [1], но процедура вычисления решения в форме (1.1) принципиально отличается от соответствующих процедур методов Ритца и Бубнова — Галеркина.

Функции $\varphi_n\in\{\varphi_n\}$ определяются при помощи процесса ортонормирования [5] некоторой системы $\{f_k\}$ координатных функций по формулам

$$e_1=f_1 \qquad (1.2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$e_k=f_k-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{ki}e_i$$

$$\lambda_{ki}=(f_k,e_i)_e/(e_i,e_i)_e,\qquad (k=2,3,\ldots),\qquad \varphi_n=e_n/\|e_n\|_e$$

где $(,)_e$ — энергетическое скалярное произведение для элементов L_e.

Вычислительная процедура по формулам (1.2) сводится к последовательному вычислению коэффициентов λ_{ki} и не требует одновременной обработки большого объема числовой информации, как в методе конечных элементов и методе конечных разностей, что дает возможность применять ЭВМ с малым объемом памяти.

Легко прослеживается скорость сходимости метода, так как при построении решения w_{n+1} используются результаты вычислений решения w_n и на этой основе определяется функция φ_{n+1} при известной системе ортогональных по энергии функций $e_1, \ldots, e_{n-1}$ и определяется значение работы $F(\varphi_{n+1})$. В методе конечных элементов и методе конечных разностей для выявления скорости сходимости требуется осуществить новое разбиение или строить новую узловую сетку и заново повторять всю процедуру поиска решения.

Решение задачи для нового нагружения в предлагаемом методе сводится к замене функций нагружения пластины в интегралах $F(\varphi_n)$ и вычислению этих интегралов по соответствующим областям интегрирования. Метод обеспечивает получение гладкого решения на всей области пластины, тогда как в методе конечных элементов получаем кусочно-гладкое решение, в разностном методе — табличное. Рассматриваемый метод особенно эффективен при решении задач изгиба прямоугольных и круглых слоистых неоднородных пластин с произвольными вырезами.

2. Рассмотрим задачу изгиба изотропной неоднородной пластины Кирхгофа, средняя плоскость S° которой занимает произвольную область в плоскости xoy декартовой системы координат xyz.

Условия закрепления пластины общего вида

$$w = \partial w/\partial n = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad w = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{2.1}$$

где w — прогиб пластины, $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$ — кусочно-гладкая граница области S, границы Γ_1, Γ_2, Γ_3 не пересекаются, n — нормаль к Γ_1, Γ_3 — не закреплена (пластина не имеет точечных опор).

Определим линеал L_e как множество возможных перемещений данной пластины, т. е. $L_e=\{w$: на $\Gamma_1 : w=\partial w/\partial n=0$, на $\Gamma_2 : w=0$ для всех $w \in C^4(S)\}$. Пусть $\{\varphi_n\} \subset L_e$ — базис, ортонормированный по энергии, т. е. в метрике $\|\cdot\| = \sqrt{(,)_e}$, где $(,)_e$ — скалярное произведение для элементов L_e, которое представим в виде

$$(w, v)_e = \sum_{k=1}^{4} \int_S (A_k w)(A_k v)\, dS \tag{2.2}$$

$$A_1 w = \sqrt{\frac{D(1-\nu)}{2}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad A_2 w = \sqrt{\frac{D(1-\nu)}{2}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$A_3 w = \sqrt{D(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, \qquad A_4 w = \sqrt{\frac{D\nu}{2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

где A_k — линейные операторы, заданные на L_e, D — изгибная жесткость, ν — коэффициент Пуассона, D, ν — кусочно-гладкие на S° функции. Отметим, что $(w, w)_e$ — потенциальная энергия деформаций пластины для прогиба $w \in L_e$, тогда в соответствии с [6] $\forall w \in L_e$: $(w, w)_e \geqslant 0$ и $(w, w)_e = 0$ только при $w=0$. Итак

$$\forall w_0 \in L_e : w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (w_0, \varphi_k)_e \varphi_k \tag{2.3}$$

Согласно принципу виртуальных работ, имеем равенство

$$\forall \varphi_k \in \{\varphi_k\} : F(\varphi_k) = \int_S \int_{-1/2 h}^{1/2 h} (\sigma_x^\circ \varepsilon_x + \ldots + \tau_{xy}^\circ \gamma_{xy})\, dS\, dz \tag{2.4}$$

где $F(\varphi_k)$ — работа внешних сил пластины, которым отвечает прогиб $w_0 \in L_e$ на виртуальном перемещении φ_k; деформации ε_x, ε_y, γ_{xy} порождены прогибом φ_k, а поле напряжений σ_x°, σ_y°, τ_{xy}° отвечает прогибу w_0; $h=h(x, y)$ — толщина пластины.

Используя (2.2), получаем

$$\forall\varphi_k\in\{\varphi_k\}:2(w_0, \varphi_k)_e=\int\limits_S\int\limits_{-{}^1\!/_2 h}^{{}^1\!/_2 h}(\sigma_x^\circ\varepsilon_x+\ldots+\tau_{xy}^\circ\gamma_{xy})\,dS\,dz \qquad (2.5)$$

Из сравнения (2.4) с (2.5) имеем

$$\forall\varphi_k\in\{\varphi_k\} : (w_0, \varphi_k)_e={}^1\!/_2F(\varphi_k). \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.3) получим

$$w_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}F(\varphi_k)\varphi_k \qquad (2.7)$$

Следует отметить, что коэффициенты $(w_0, \varphi_k)_e$ ряда Фурье (2.3) определяются из условия выполнения принципа виртуальных работ для искомого равновесного состояния пластины, следовательно, решение в форме (2.7) уже удовлетворяет принципу виртуальных работ.

Итак, решение задачи изгиба пластины по методу виртуальных работ сводится к построению базиса L_e.

3. Рассмотрим вопрос о построении ортонормированного базиса $\{\varphi_k\}$ пространства L_e для произвольной области S°, занимаемой пластиной. Покажем, что ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$ определяется при выполнении следующих утверждений.

Теорема 1. Пусть $\{u_n^\circ\}\subset C^4(S_0)$ и $\{u_n\}\subset C^4(S)$, где $S\subseteq S_0$, $\{u_n\}=\{u_n : u_n(t)=u_n^\circ(t),\ t\in S$ для всех $u_n^\circ\in\{u_n^\circ\}$. Линейная оболочка системы $\{u_n^\circ\}$ плотна в $C^4(S_0)$ в метрике $C(S_0)$, т. е.

$$\forall u_0\in C^4(S_0):\left\|u_0-\sum_{k=1}^{n}a_ku_k^\circ\right\|_{C(S_0)}\to 0, \quad n\to\infty \qquad (3.1)$$

Тогда

$$\forall u\in C^4(S):\left\|u-\sum_{k=1}^{n}a_ku_k\right\|_{C(S)}\to 0, \quad n\to\infty \qquad (3.2)$$

где a_k — число, $\|\cdot\|_{C(S)}$, $\|\cdot\|_{C(S_0)}$ — метрики пространств $C(S)$, $C(S_0)$, $u(t)=u_0(t)$, $t\in S$, $u\in C^4(S)$ т. е. линейная оболочка $\{u_n\}$ плотна в $C^4(S)$ в метрике $C(S)$.

Доказательство. В силу (3.1) имеем

$$\forall u_0\in C^4(S_0):\max_{t\in S_0}\left|u_0(t)-\sum_{k=1}^{n}a_ku_k^\circ(t)\right|\to 0, \quad n\to\infty$$

Тогда $\forall u\in C^4(S)$: $\max\limits_{t\in S\subseteq S_0}\left|u(t)-\sum\limits_{k=1}^{n}a_ku_k(t)\right|\to 0,\ n\to\infty,$

где $u(t)=u_0(t)$, $u_k(t)=u_k^\circ(t)$, $t\in S$, откуда следует (3.2). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть линейная оболочка системы $\{u_n\}\subset C^4(S)$ плотна в $C^4(S)$ метрике $C(S)$:

$$\forall u\in C^4(S):\left\|u-\sum_{k=1}^{n}a_ku_k\right\|_{C(S)}\to 0, \quad n\to\infty \qquad (3.3)$$

Пусть $\psi\in C^4(S)$ удовлетворяет условиям закрепления пластины на границе области S°, т. е. условиям (2.1) и на $S+\Gamma_3$: $\psi\neq0$. Тогда

$$\forall u\in C^4(S): w=\psi\cdot u: \left\|w-\sum_{k=1}^{n} a_k f_k\right\|_{C(S)}\to 0, \quad n\to\infty \tag{3.4}$$

$$w=u\cdot\psi,\ u\in C^4(S),\ f_k=\psi\cdot u_k,\ u_k\in\{u_k\},\ w\in C^4(S)$$

т. е. линейная оболочка системы координатных функций $\{f_k\}$ плотна в L_e в метрике $C(S)$ (функции w, f_k удовлетворяют условиям закрепления пластины).

Доказательство. Представим $w\in L_e$ в виде

$$w=\psi u,\ (\psi,\ u\in L_e\subset C^4(S)) \tag{3.5}$$

Учитывая, что $\forall v,\ \varphi\in C^4(S): \|v\varphi\|_{C(S)}\leqslant\|v\|_{C(S)}\|\varphi\|_{C(S)}$ имеем $\|\psi u-\sum_{k=1}^{n} a_k\psi u_k\|_{C(S)}\leqslant\|\psi\|_{C(S)}\left\|u-\sum_{k=1}^{n} a_k u_k\right\|_{C(S)}$. Отсюда в силу (3.3) с учетом обозначений (3.5) выполняется (3.4). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть линейная оболочка системы $\{f_k\}$ координатных функций данной пластины плотна в L_e в метрике $C(S)$, т. е.

$$\forall w\in L_e: \left\|w-\sum_{k=1}^{n} a_k f_k\right\|_{C(S)}\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{3.6}$$

Тогда

$$\forall w\in L_e: \left\|w-\sum_{k=1}^{n} a_k f_k\right\|_{e}\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{3.7}$$

т. е. линейная оболочка системы $\{f_k\}$ координатных функций плотна в L_e в метрике $\|\cdot\|_e$ (полна по энергии).

Доказательство. В силу (3.6) имеем $w=w_\infty=\sum a_k f_k (k=1, 2, \ldots)$, причем [5] этот ряд равномерно сходится к функции $w\in L_e$ во всей области S, т. е. $\forall t\in S: w(t)=w_\infty(t)$.

Так как w, $w_\infty\in L_e$ и $w-w_\infty=0$, то [5]: $\|w-w_\infty\|_e=0$, т. е. $\|w-\sum a_k f_k\|_e=0$, $k=1, 2, \ldots$, что эквивалентно (3.7). Теорема доказана.

Пусть выполняется условие (3.6) для системы $\{f_n\}$ координатных функций данной пластины. В общем случае $f_n\in\{f_n\}$ — линейно зависимые функции на S. Выбираем из $\{f_n\}$ систему линейно независимых функций и, ортонормируя ее в L_e, получим систему $\{\varphi_n\}$. Поскольку линейные оболочки систем $\{f_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ совпадают [5], а в силу теоремы 3 линейная оболочка системы $\{f_n\}$ плотна в L_e по энергии, т. е. в метрике $\|\cdot\|_e$, то и линейная оболочка системы $\{\varphi_n\}$ плотна в L_e по энергии, т. е. $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис L_e.

Итак, условие (3.6) является критерием выбора системы координатных функций для построения ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}$.

Согласно теоремам 1—3, для построения ортонормированного базиса L_e достаточно на некоторой области $S_0\supseteq S$ определить систему функций $\{u_n^\circ\}\subset C^4(S_0)$, удовлетворяющих условию (3.1) и функцию $\psi\in L_e$, удовлетворяющую условию $\psi\neq0$ на $S+\Gamma_3$.

Как известно [7] для прямоугольной области S_0°, включающей область S, в качестве такой системы функций $\{u_n^\circ\}\subset C^4(S_0)$ можно использовать систему функций двойного тригонометрического ряда Фурье. Таким образом, возможность построения базиса L_e определяется возможностью построения для данной области $S\subseteq S_0$ функции ψ. В качестве функции ψ можно взять любое частное решение данной задачи, не равное нулю на $S+\Gamma_3$. Такое частное решение для ряда пластин сложной формы определяется просто, например, для прямоугольной (круглой) пластины свободно опертой (защемленной) по сторонам с произвольными вырезами, границы которых не закреплены. Следовательно, для решения задачи изгиба таких прямоугольных пластин переменной толщины с произвольными вырезами при произвольном нагружении следует использовать метод виртуальных работ, который, как отмечалось ранее, эффективнее методов конечных элементов и конечных разностей.

Следует отметить, что вместо системы функций двойного тригонометрического ряда Фурье можно использовать другие системы функций, линейная оболочка которых плотна в $C^4(S_0)$ в метрике $C(S_0)$ однако не для всякой такой системы процесс ортогонализации является численно устойчивым. Например, для полиномов Лежандра этот процесс численно неустойчив [5]. Это обстоятельство следует иметь в виду при решении вопроса о том, какую из возможных систем функций, плотных в $C^4(S_0)$ в метрике $C(S_0)$, использовать для решения конкретных задач предлагаемым методом.

4. Рассмотрим сходимость в метрике $\|\cdot\|_e$. Пусть $w_0 \in L_e$ — точное решение, система $\{\varphi_n\}$ полна по энергии, т. е.

$$\|w_n - w_0\| \to 0 \quad (n \to \infty), \qquad w_n \in L_e, \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \tag{4.1}$$

Тогда можно показать, что

$$\|M_x{}^n - M_x{}^\circ\|_{L_2(S,\delta_1)} \to 0, \quad \|M_y{}^n - M_y{}^\circ\|_{L_2(S,\delta_1)} \to 0, \tag{4.2}$$
$$\|M_{xy}{}^n - M_{xy}{}^\circ\|_{L_2(S,\delta_2)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

где $M_x{}^n$, $M_y{}^n$, $M_{xy}{}^n$ — изгибающие и крутящие моменты пластины, отвечающие соответственно прогибам w_n, w_0; $\|\cdot\|_{L_2(S,\delta_1)}$, $\|\cdot\|_{L_2(S,\delta_2)}$ нормы вещественных пространств $L_2(S, \delta_1)$, $L_2(S, \delta_2)$ [3], для которых $\delta_1 = (1-\nu)/D$, $\delta_2 = [D(1-\nu)]^{-1}$. Действительно, подставляя $A_k w$ в (2.2) и учитывая, что $A_k L \subset L_2(S)$ $(k' = 1, \ldots, 4)$, так как $L_e \subset C^4(S)$ получим

$$\forall w \in L_e : \|w\|_e{}^2 = \sum_{k=1}^{4} \|A_k w\|^2_{L_2(S)} \tag{4.3}$$

Откуда в силу (4.1) имеем

$$\|A_k(w_n - w_0)\|_{L_2(S)} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{4.4}$$

При помощи неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\|\nu A_k(w_n - w_0)\|^2_{L_2(S)} \leqslant \|\nu^2 A_k(w - w_0)\|_{L_2(S)} \|A_k(w_n - w)\|_{L_2(S)}$$

Отсюда в силу (4.4), учитывая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\nu^2 A_k(w_n - w_0)\|_{L_2(S)} < \infty \quad (k = 1, 2), \text{ получим}$$

$$\|\nu A_k(w_n - w_0)\|_{L_2(S)} \to 0 \quad (n \to \infty), \quad (k = 1, 2) \tag{4.5}$$

Используя неравенство треугольника для норм и выражения для $A_k w$ будем иметь

$$\|A_1(w_n - w_0)\|_{L_2(S)} + \|\nu A_2(w_n - w_0)\|_{L_2(S)} \geqslant$$

$$\geqslant \left\| \sqrt{\frac{D(1-\nu)}{2}} \left[\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] \right\|_{L_2(S)}$$

Отсюда в силу (4.4), (4.5) следует

$$\|\sqrt{(1-\nu)/D}\,(M_x{}^n - M_x{}^\circ)\|_{L_2(S)} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{4.6}$$

Из неравенства $\|A_2(w_n - w_0)\|_{L_2(S)} + \|\nu A_1(w_n - w_0)\|_{L_2(S)} \geqslant \|A_2(w_n - w_0) + \nu A_1(w_n - w_0)\|_{L_2(S)}$, рассуждая аналогично, получим

$$\|\sqrt{(1-\nu)/D}\,(M_y{}^n - M_y{}^\circ)\|_{L_2(S)} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{4.7}$$

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,01277	0,02316	0,03517	0,04692
y_2	0,02426	0,04827	0,07156	0,09454
y_3	0,03567	0,07346	0,10818	0,14214
y_4	0,04818	0,09721	0,1440	0,18905

Таблица 2

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,01278	0,02316	0,03519	0,04694
y_2	0,02425	0,04832	0,0716	0,09458
y_3	0,03567	0,07354	0,1082	0,14220
y_4	0,04820	0,09725	0,14410	0,1891

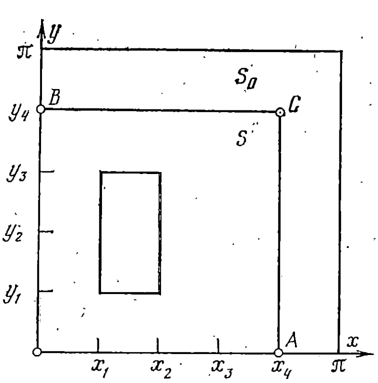
А из условия $\|A_3(w_n-w_0)\|_{L_2(S)}\to 0$ $(n\to\infty)$ используя (1.3) найдем

$$\|(\sqrt{D(1-\nu)})^{-1}(M_{xy}^{(n)}-M_{xy}{}^{\circ})\|_{L_2(S)}\to 0 \quad (n\to\infty) \tag{4.8}$$

Так как функции $[(1-\nu)/D]^{1/2}$, $[D(1-\nu)]^{-1/2}$ неизменны для всех элементов L_2 и $D>0$, $0<\nu<0,5$ на S, то соотношения (4.6) — (4.8) в пространствах $L_2(S, \delta_1)$, $L_2(S, \delta_2)$ примут вид (4.2). Если функции D, ν постоянны на S, то $\|M_x{}^n-M_x{}^{\circ}\|_{L_2(S)}\to 0$, $\|M_y{}^n-M_y{}^{\circ}\|_{L_2(S)}\to 0$, $\|M_{xy}{}^n-M_{xy}{}^{\circ}\|_{L_2(S)}\to 0$ при $n\to\infty$.

Итак, последовательности $\{M_x{}^n\}$, $\{M_y{}^n\}$, $\{M_{xy}{}^n\}$ изгибающих и крутящих моментов, полученные по методу виртуальных работ, сходятся к точным $M_x{}^{\circ}$, $M_y{}^{\circ}$, $M_{xy}{}^{\circ}$ в среднеквадратичном, если система $\{\varphi_k\}$ полна по энергии, и D, $\nu=\mathrm{const}$ на S.

5. В качестве примера рассмотрим изгиб квадратной пластины с прямоугольным вырезом (фигура), свободно опертой по сторонам OA, OB (остальная часть границы не закреплена). Пластина нагружена сосредоточенной силой $P=0,04$ в точке C при $\nu=0,3$, $D=1$, $x_i=y_i=0,59i$ $(i=1,\dots,4)$. Впишем область, занимаемую данной пластиной, в прямоугольную область $[0, \pi, 0, \pi]$.



Известно [8], что линейная оболочка системы функций $\{\sin nx \sin my\}$ плотна во множестве возможных решений квадратной пластины со стороной π, свободно опертой по сторонам, в метрике $C(S_0)$. Используя неравенство $\|v\|_{C(S)}\leqslant\|u\|_{C(S_0)}$, где $v\in C^4(S)$, $u\in\in C^4(S_0)$, $S\subseteq S_0$, $v(t)=u(t)$, $t\in S$, нетрудно показать, что линейная оболочка системы функций $\{\sin nx \sin my\}$, определенных на области $S\subset[0, \pi, 0 \pi]$, плотна во множестве возможных перемещений данной пластины в метрике $C(S)$. Следовательно, система функций $\{f_k\}=\{\sin nx \sin my\}$, $k=1,\dots,{}^1/_2 n_0(n_0+1)$, $n+m\leqslant n_0+1$ $(n_0=1, 2, 3,\dots)$ удовлетворяет условию (3.6) и может быть использована для построения базиса $\{\varphi_n\}$.

Пусть определены ортогональные функции $e_1,\dots,e_{k-1}$. Тогда $e_k=f_k-\sum\lambda_{ki}e_i$, $\lambda_{ki}=(f_k, e_i)_e/(e_i, e_i)_e$, $i=1, 2$, где $(\ ,\ )_e$ — скалярное произведение пространства L_e. Если $(e_k, e_k)_e=0$, то $e_k=0$, т. е. $f_k=\sum\lambda_{ki}e_i$.

Учитывая, что функции e_i линейно выражаются через функции $f_1,\dots,f_{k-1}$, имеем $f_k=\sum\alpha_i f_i$ $(i=1, 2,\dots,k-1)$ (α_i — число), т. е. функция f_k линейно зависима с $f_1,\dots,f_{k-1}$ и поэтому не используется. Тогда e_k ищем в виде $e_k=f_{k+1}-\sum\lambda_{ki}e_i$.

В табл. 1, 2 представлены значения прогибов пластины, подсчитанных по предлагаемому методу, соответственно, при $n_0=17$, 18. В табл. 3 даны значения прогибов, полученных по методу конечных элементов для данной задачи. Пластина представлялась 224 квадратными элементами Клафа [1] и численно решалась система

Таблица 3

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,0129	0,0242	0,0356	0,0482
y_2	0,0231	0,0486	0,0740	0,0975
y_3	0,0354	0,0720	0,1088	0,1446
y_4	0,0473	0,0953	0,1430	0,1898

771 уравнения. Сравнение результатов (табл. 2, 3) показывает достаточную их близость. Однако реализация метода виртуальных работ не требует одновременной обработки большого объема числовой информации и большого объема памяти ЭВМ, как это требуется в методе конечных элементов.

Сравнение результатов решения данным методом задачи об изгибе свободно опертой на всем контуре квадратной пластины со стороной π под действием сосредоточенной силы в центре с точным решением [8] показывает, что при $n_0=18$ их различие в центре пластины составляет не более 0,02% по перемещениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Постнов В. А.* Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977. 279 с.
2. *Зенкевич О. К.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 541 с.
3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике М.: Наука, 1970. 512 с.
4. *Литвинов В. Г.* Задачи изгиба пластин переменной толщины.– Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 5, с. 54–61.
5. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980, 495 с.
6. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 367 с.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматгиз, 1960. 655 с.
8. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.

Красноярск, Новосибирск

Поступила в редакцию 21.XI.1983