МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1986

УДК 539.376

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

МАЗЬЯ В. Г., СЛУЦКИЙ А. С., ФОМИН В. Л.

Рассматривается задача об установившейся ползучести скручиваемого стержня, имеющего трещину, параллельную оси. Найдено выражение для главного члена асимптотики функции напряжений в окрестности вершины трещины, получена явная формула для коэффициента при старшем члене асимптотики в виде контурного интеграла. Даны оценки этого коэффициента.

1. Публикуемая работа посвящена исследованию асимптотического поведения функции напряжений вблизи вершины трещины в задаче о кручении стержня из физически нелинейного материала со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций сдвига. Как известно [1], решение имеет вблизи конца трещины асимптотику

$$u(r,\ \theta)=Cr^{\lambda}\Phi(\theta)+o(r^{\lambda}) \qquad (1.1)$$

где C — постоянная, $(r,\ \theta)$ — полярные координаты с началом в вершине трещины, $r>0$, $|\theta|>\pi$ [1]. Основной результат исследования — представление для функций Φ, которая является решением некоторой нелинейной задачи на «собственные значения» для обыкновенного дифференциального уравнения, а также явное выражение для константы C в терминах инвариантного J-интеграла [2, 3]. Следует отметить [2], что обе формулы могут быть получены пересчетом из аналогичных результатов для функции Прандтля, установленных в [4], где решена задача об антиплоском сдвиге полупространства с краевой трещиной и используется преобразование годографа (см. [5, 6] и др.), а затем полученная линейная краевая задача решается при помощи метода Винера — Хопфа. В предлагаемой статье функция Φ находится из нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, а константа C — прямым вычислением некоторого интеграла. Такой подход, возможно, более прост и не исключено, что он окажется полезным в других задачах, где применение преобразования годографа и метода Винера — Хопфа невозможно. Далее показано, что асимптотика (1.1) для функции напряжений в рассматриваемой задаче имеет вид

$$u(x,y)=((n+1)^{n-1}n^{p/2-1-n}2^p\pi^{-2})^{1/2(n+1)}J^{1/(n+1)}r^{n/(n+1)}\times$$
$$\times\frac{((4n+(n-1)^2\cos\theta)^{1/2}+(n+1)\cos\theta)^{1/2}}{((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+|n-1|\cos\theta)^{|n-1|/2(n+1)}}+o(r^{n/(n+1)}),$$
$$p=|n-1|-n+1$$
$$J=\int\limits_\Gamma\left(\frac{1}{n+1}|\nabla u|^{n+1}\cos(N,x)-\frac{\partial u}{\partial x}|\nabla u|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial N}\right)ds$$

---

[1] К настоящему моменту можно считать формулу (1.1) полностью обоснованной лишь при $n\geqslant(\sqrt{5}-1)/2$, так как именно при этом ограничении установлен упомянутый результат [1]. Представляется маловероятным, чтобы указанное ограничение на n было существенным. Впрочем, обычно показатель n в законе ползучести не меньше единицы. Вопрос о виде функции Φ в [1] не обсуждается.

[2] Авторы благодарны Р. В. Гольдштейну, обратившему их внимание на работу [4], с которой они не были знакомы при выполнении публикуемой работы.

Здесь Γ — произвольный гладкий контур, охватывающий вершину трещины, N — внешняя нормаль к Γ, (x, y) — декартовы координаты с началом в вершине трещины и осью $0y$, перпендикулярной к трещине, n — показатель степени в законе ползучести $\xi=B\sigma^n$, ξ — интенсивность скорости деформации ползучести, σ — интенсивность напряжений, B и n — постоянные, характерные для данного материала при данной температуре.

В заключение работы приведен пример получения эффективной оценки для коэффициента C.

2. Приведем постановку задачи о кручении стержня поперечного сечения Ω, находящегося в условиях установившейся ползучести и имеющего трещину. Пусть Ω_0 — односвязная область на плоскости с компактным замыканием и гладкой (класса C^2) границей. Область Ω определим равенством $\Omega=\Omega_0\backslash T$, где T — прямолинейная трещина длины d, начинающаяся на $\partial\Omega_0$ и направленная по нормали. Введем декартовы координаты (x, y) с началом в вершине разрета T так, чтобы выполнялось равенство $T=\{(x, y):y=0;\ -d\leqslant x\leqslant 0\}$. В области Ω рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(|\nabla u|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(|\nabla u|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=G \text{ в } \Omega \tag{2.1}$$

$$u=0 \text{ на } \partial\Omega \tag{2.2}$$

где $G=\text{const}>0$. Решение u называется функцией напряжений $\partial u/\partial x=-\tau_{zy}$, $\partial u/\partial y=\tau_{zx}$, а $G=2\omega/B$, где ω — угловая скорость кручения на единицу длины стержня, B — коэффициент, входящий в закон ползучести. Согласно [1] (см. также [7]), функция напряжений u принадлежит пространству $C^{1,\alpha}(\Omega\backslash K_\varepsilon)$, где K_ε — круг малого радиуса ε с центром в точке 0. В малой окрестности вершины трещины она имеет допускающее дифференцирование асимптотическое представление (1.1), где λ — «собственное число», а Φ — неотрицательная «собственная функция» краевой задачи

$$(\lambda^2\Phi^2+(\Phi')^2)^{(n-1)/2}(\lambda+(\lambda-1)(n-1))\Phi+ \tag{2.3}$$
$$+\partial/\partial\theta[(\lambda^2\Phi^2+(\Phi')^2)^{(n-1)/2}\Phi']=0 \text{ при } \theta\in(-\pi, \pi)$$

$$\Phi(\pm\pi)=0 \tag{2.4}$$

Равенства (2.3), (2.4) получены подстановкой функции $r^\lambda\Phi(\theta)$, удовлетворяющей однородному условию Дирихле на разрезе, в однородное уравнение (2.1), которое в полярных координатах записывается в форме

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\right)^{(n-1)/2}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-$$
$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\right)^{(n-1)/2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$$

3. Для решения задачи (2.3), (2.4) проинтегрируем уравнение (2.3) при краевом условии (2.4). Допустим, что неотрицательное решение этой задачи существует и является четной функцией, монотонно возрастающей на интервале $(-\pi, 0)$. Предположим также, что

$$\lambda^2\Phi^2+(\Phi')^2\neq 0, \quad |\theta|\leqslant\pi \tag{3.1}$$

$$1>\lambda>1-1/n \tag{3.2}$$

Примем Φ за новую независимую переменную и запишем равенство (2.3) в виде уравнения относительно $Z=\Phi'$:

$$\left(\lambda\left(\frac{n\lambda}{n-1}-1\right)\Phi+(n-1)^{-1}ZZ'\right)(\lambda^2\Phi^2+Z^2)+Z^2(\lambda^2\Phi+ZZ')=0$$

Введем функцию $Y=\Phi^{-1}Z$. Тогда из последнего уравнения вытекает соотношение

$$-\Phi\frac{dY}{d\Phi}\left(\frac{\lambda^2}{n-1}Y+\frac{n}{n-1}Y^3\right)=\lambda^3\left(\frac{\lambda n}{n-1}-1\right)+\lambda\left(\frac{2n\lambda}{n-1}-1\right)Y^2+\frac{n}{n-1}Y^4 \tag{3.3}$$

Поскольку справедливо неравенство (3.1), то (3.3) приводится к виду

$$\left(\frac{\lambda Y}{Y^2+\lambda^2}+\frac{(1-\lambda)Y}{Y^2+\lambda^2-\lambda\dfrac{n-1}{n}}\right)\frac{dY}{d\Phi}=-\Phi^{-1} \tag{3.4}$$

Интегрируя (3.4) и заменяя Y на $\Phi'\Phi^{-1}$, находим

$$c=((\Phi')^2+\lambda^2\Phi^2)^{\lambda/2}((\Phi')^2+\lambda(\lambda-(n-1)/n)\Phi^2)^{(1-\lambda)/2} \tag{3.5}$$

где c — произвольная постоянная, определяемая при нормировании функции Φ. Таким образом из уравнения второго порядка (2.3) получено уравнение (3.5), содержащее только первые производные функции Φ. Из равенства (3.5) следует, что

$$\log c-\log\Psi={}^1/_2\lambda\log((\Psi')^2+\lambda^2)+{}^1/_2(1-\lambda)\log((\Psi')^2+\lambda(\lambda-(n-1)/n)) \tag{3.6}$$

где $\Psi=\log\Phi$. Поскольку функция Φ четная, положим $\theta\in[0,\pi]$. В силу (3.6):

$$d\theta=-\left(\frac{\lambda}{(\Psi')^2+\lambda^2}+\frac{1-\lambda}{(\Psi')^2+\lambda(\lambda-(n-1)/n)}\right)d\Psi' \tag{3.7}$$

Так как Φ строго монотонна, из уравнения (2.3) вытекает строгая монотонность функции Ψ'. Таким образом, интегрируя (3.7) с учетом (3.2), получим равенство

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\Psi'}{\lambda}\right)+\frac{1-\lambda}{(\lambda(\lambda-(n-1)/n))^{1/2}}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\Psi'}{(\lambda(\lambda-(n-1)/n))^{1/2}}\right)=-\theta \tag{3.8}$$

Определим собственное число λ. Полагая в (3.8) $\theta=\pi$, имеем

$$^1/_2\pi(1+(1-\lambda)/[\lambda(\lambda-(n-1)/n]^{1/2})=\pi$$

откуда следует, что $\lambda=n(n+1)^{-1}$. С учетом полученного значения λ уравнение (3.8) примет вид

$$(\Psi')^2+\operatorname{ctg}\theta\Psi'-n(n+1)^{-2}=0 \tag{3.9}$$

Так как величина Ψ' удовлетворяет граничному условию $\lim\Psi'=-\infty$ $(\theta\to\pi)$, из (3.9) следует соотношение

$$\Psi'={}^1/_2(\operatorname{ctg}\theta-(\operatorname{ctg}^2\theta+4n(n+1)^{-2})^{1/2}) \tag{3.10}$$

Интегрируя полученное равенство, найдем выражение для функции Φ:

$$\Phi(\theta)=c_1\exp\left(\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\operatorname{ctg}\varphi\,d\varphi+I(\theta)\right)\right) \tag{3.11}$$

$$I(\theta)=\int\limits_{\pi/2}^{\theta}(\operatorname{ctg}^2\varphi+a)^{1/2}d\varphi,\qquad a=4n(n+1)^{-2}$$

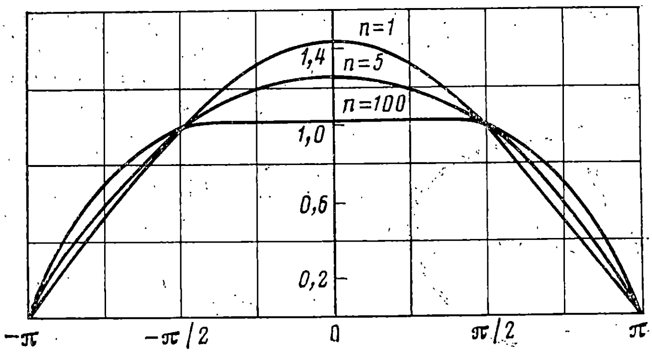
c_1 — постоянная, выбираемая при нормировании функции Φ. Преобразуем интеграл I к виду

$$I(\theta)=\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\frac{d\varphi}{\sin\varphi(a+(1-a)\cos^2\varphi)^{1/2}}+(a-1)\int\limits_{\pi/2}^{\theta}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(a+(1-a)\cos^2\varphi)^{1/2}}$$

Отсюда заключаем, что

$$I(\theta)=(1+a)^{1/2}\log\left(\left(\frac{1-a}{a}\right)^{1/2}\cos\theta+\left(1+\frac{(1-a)}{a}\cos^2\theta\right)^{1/2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{(a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}+\cos\theta}{(a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}-\cos\theta}$$



Фиг. 1

Подставим это выражение в формулу (3.11) (нормировочный множитель c_1 выбираем равным единице):

$$\Phi(a,\theta)=(\sin\theta)^{1/2}\left(\frac{(a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}+\cos\theta}{(a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}-\cos\theta}\right)^{1/4}\times$$

$$\times\left(a^{-1/2}\left((1-a)^{1/2}\cos\theta+(a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}\right)\right)^{-(1-a)^{1/2}/2}$$

Переходя к параметру n и используя соотношение

$$\frac{(a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}+\cos\theta}{(a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}-\cos\theta}=\frac{((a+(1-a)\cos^2\theta)^{1/2}+\cos\theta)^2}{a\sin^2\theta}$$

найдем следующую формулу для функции Φ:

$$\Phi(n,\theta)=(4n)^{p/4(n+1)}\frac{((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+(n+1)\cos\theta)^{1/2}}{((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+|n-1|\cos\theta)^{|n-1|/2(n+1)}}\tag{3.12}$$

Отметим, что Φ нормирована таким образом, что $\Phi(n,\pi/2)=1$ при любом n. График функции Φ при некоторых значениях n приведен на фиг. 1. Из формулы (3.12) следует, что Φ удовлетворяет априорным предположениям о четности, монотонности, а также соотношению (3.1).

4. Найдем постоянную C в представлении (1.1), используя известную методику [2, 3]. Умножим уравнение (2.1) на u_x и проинтегрируем по частям в области Q, $\bar{Q}\subset\Omega$. Получим тождество

$$\int\limits_Q (u_{xx}|\nabla u|^{n-1}u_x+u_{xy}|\nabla u|^{n-1}u_y)\,dx\,dy=\tag{4.1}$$

$$=\int\limits_{\partial Q}u_x|\nabla u|^{n-1}(u_x\cos(N,x)+u_y\cos(N,y))\,ds$$

Здесь N — внешняя нормаль к ∂Q. Используя соотношение

$$u_{xx}|\nabla u|^{n-1}u_x+u_{xy}|\nabla u|^{n-1}u_y=\frac{1}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}|\nabla u|^{n+1}$$

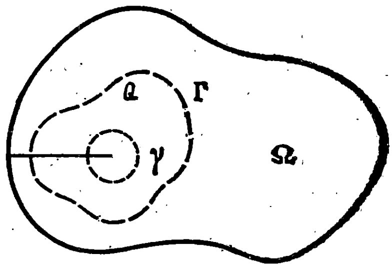
приведем равенство (4.1) к виду $J=0$, где

$$J=\int\limits_{\partial Q}\left(\frac{1}{n+1}|\nabla u|^{n+1}\cos(N,x)-u_x|\nabla u|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial N}\right)ds\tag{4.2}$$

Выберем область Q как показано на фиг. 2. Устремляя радиус окружности γ к нулю, найдем формулу для постоянной C в представлении (1.1):

$$C^{n+1}=\frac{1}{k(n)}\int\limits_\Gamma\left(\frac{1}{n+1}|\nabla u|^{n+1}\cos(N,x)-\frac{\partial u}{\partial x}|\nabla u|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial N}\right)ds\tag{4.3}$$

где Γ — произвольный контур, охватывающий вершину трещины, $k(n)$ — интеграл (4.2) по единичной окружности для функции $u=r^\lambda\Phi$.



Фиг. 2

Вычислим $k(n)$. Из соотношения (4.2) с учетом уравнения (2.3) получим равенство

$$k(n)=\frac{1}{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(\frac{n}{n+1}\Phi\right)^2+(\Phi')^2\right)^{(n+1)/2}\times$$
$$\times\cos\theta\,d\theta-\frac{n}{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{n}{n+1}\Phi\cos\theta-\right.$$
$$\left.-\Phi'\sin\theta\right)\left(\left(\frac{n}{n+1}\Phi\right)^2+(\Phi')^2\right)^{(n-1)/2}d\theta \tag{4.4}$$

Преобразуя в (4.4) интеграл, содержащий $\sin\theta$, при помощи формулы интегрирования по частям и используя (2.3), представим $k(n)$ в виде

$$k(n)=2\int_0^\pi\left((\Phi')^2+\left(\frac{n}{n+1}\Phi\right)^2\right)^{(n-1)/2}\left((\Phi')^2-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)\cos\theta\,d\theta \tag{4.5}$$

Подставим в равенство (4.5) собственную функцию Φ, найденную в п. 3 (для определения Φ' воспользуемся соотношением $\Phi'=\Phi\Psi'$ и уравнением (3.10)):

$$k(n)=\frac{2^{(p-n-1)/2}n^{(p-2)/4}}{(n+1)^{(n+1)/2}}\int_0^\pi\frac{((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+(n+1)\cos\theta)^{(n+1)/2}}{((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+|n-1|\cos\theta)^{|n-1|/2}}$$
$$(2n-(n-1)\cos^2\theta-\cos\theta(4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2})^{(n-1)/2}(\sin\theta)^{-n-1}\cos\theta$$
$$((n+1)^{-1}(3n^2+1)\cos^2\theta-(n+1)^{-1}2n(n-1)-\cos\theta(4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2})\,d\theta$$

Непосредственно проверяются следующие два тождества:

$$\frac{(4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+(n+1)\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{4n}{(4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}-(n+1)\cos\theta}$$
$$\frac{2n-(n-1)\cos^2\theta-\cos\theta(4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}}{((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+|n-1|\cos\theta)^{\operatorname{sign}(n-1)}}= \tag{4.6}$$
$$=n^{1/2}(4n)^{-1/2\operatorname{sign}(n-1)}((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}-(n+1)\cos\theta)$$

С учетом соотношений (4.6) интеграл (4.5) принимает вид

$$k(n)=$$
$$=\frac{n^{1/2}}{2(n+1)^{(n+1)/2}}\int_0^\pi\frac{\frac{3n^2+1}{n+1}\cos^2\theta-\frac{2n(n-1)}{n+1}-(4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}\cos\theta}{(4n+(n-1)^2\cos\theta)^{1/2}-(n+1)\cos\theta}\times$$
$$\times\cos\theta\,d\theta \tag{4.7}$$

Поскольку справедливо тождество

$$((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}-(n+1)\cos\theta)^{-1}=$$
$$=(4n)^{-1}(\sin\theta)^{-2}((4n+(n-1)^2\cos\theta)^{1/2}-(n+1)\cos\theta)$$

то равенство (4.7) преобразуется так:

$$k(n)=\frac{n^{(n-1)/2}}{2(n+1)^{(n+1)/2}}\left(\int_0^\pi\left(\frac{2(2n^2+n+1)}{n+1}\cos^2\theta-\frac{2n(n-1)}{n+1}\right)\times\right.$$

$$\times((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}-(n+1)\cos\theta)\cos\theta(\sin\theta)^{-2}d\theta-$$
$$-2n(n+1)\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta\Big)$$

Если в первом интеграле сделать замену переменных $\varphi=\pi/2-\theta$, то получим интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку. Поэтому $k(n)={}^1/{}_2\pi(n^n(n+1)^{1-n})^{1/2}$. Подставляя это значение $k(n)$ в равенство (4.3), найдем следующее выражение для постоянной C из представления (1.1):

$$C^{n+1}=-\frac{2(n+1)^{(n-1)/2}}{\pi n^{n/2}}\int_\Gamma\left(\frac{|\nabla u|^{n+1}}{n+1}\cos(N,x)-\frac{\partial N}{\partial x}|\nabla u|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial N}\right)dS \tag{4.8}$$

Отметим, что если в (4.8) выбрать контур Γ равным $\partial\Omega_0$, то в силу граничного условия (2.2) имеем

$$C^{n+1}=\frac{2(n+1)^{(n-3)/2}}{\pi n^{(n-2)/2}}\int_{\partial\Omega_0}\left|\frac{\partial u}{\partial N}\right|^{n+1}\cos(N,x)\,ds$$

5. Оценим интеграл в правой части равенства (4.8) через жесткость стержня при кручении P, равную интегралу $2\int u\,dx\,dy$ по области Ω_ε. Пусть H — липшицева функция, равная нулю на границе $\partial\Omega_0$ и удовлетворяющая условию $H(0)=1$. Умножая обе части уравнения (1.1) на Hu_x и интегрируя по частям, получим

$$-\int_\Omega(\nabla H\cdot\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x}|\nabla u|^{n-1}dx\,dy+C^{n+1}k(n)+$$
$$+\int_\Omega\frac{|\nabla u|^{n+1}}{n+1}\frac{\partial H}{\partial x}dx\,dy=G\int_\Omega u\frac{\partial H}{\partial x}dx\,dy \tag{5.1}$$

Так как справедливо соотношение $\int_\Omega|\nabla u|^{n+1}d\Omega=GP/2$, то из (5.1) следует оценка

$$C^{n+1}\leqslant\frac{PG}{2k(n)}\left(\sup_\Omega\left(|\nabla u|^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{n+1}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\sup_\Omega\frac{\partial H}{\partial x}\right) \tag{5.2}$$

Введем угол β, такой, что выполняются условия $\cos\beta=|\nabla u|^{-1}\partial u/\partial x$, $\sin\beta=|\nabla u|^{-1}\partial u/\partial y$. Тогда из неравенства (5.2) находим, что

$$C^{n+1}\leqslant\left(\sup_\Omega\max_{\beta\in[0,2\pi)}\left(\frac{n-1}{2(n+1)}\frac{\partial H}{\partial x}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\cos 2\beta+\frac{\partial H}{\partial y}\sin 2\beta\right)\right)+\sup_\Omega\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{PG}{2k(n)} \tag{5.3}$$

Из (5.3) вытекает следующая оценка постоянной C в асимптотическом представлении (1.1):

$$C^{n+1}\leqslant\frac{PG}{2k(n)}\left(\sup_\Omega\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{2}\sup_\Omega\left(|\nabla H|+\frac{n-1}{n+1}\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right) \tag{5.4}$$

Покажем на простейшем примере, как из (5.4) можно получать явные оценки коэффициента C. Пусть Ω_0 — эллипс $\{(x,y):x^2/a^2+y^2/b^2<1\}$, $a\leqslant b$, имеющий трещину $T=\{(x,0):-a<x\leqslant 0\}$. Положим (не стремясь к оптимальному выбору) $H(x,y)=1-x^2/a^2-y^2/b^2$. Тогда из (5.4) вытекает оценка $C^{n+1}\leqslant PG(3n+1)/2ak(n)(n+1)$. Согласно вариационному опреде-

лению жесткости при кручении, P мажорируется жесткостью при кручении стержня без трещины. Последняя не превосходит жесткости при кручении круглого стержня, имеющего ту же площадь поперечного сечения [8]. Поскольку жесткость при кручении круглого стержня радиуса ρ равна $(G/2)^{1/n}\rho^{3+1/n}2\pi n/(3n+1)$, то окончательно получаем неравенство

$$C^{n+1}\leqslant 4(n+1)^{(n-3)/2}/n^{(n-2)/2}(G/2)^{1+1/n}(ab)^{(n+1)/2n}a$$

Функция кручения v связана с функцией напряжений u соотношениями

$$\partial u/\partial y=B^{-1}|\nabla u|^{1-n}(-\omega y+\partial v/\partial x)$$

$$-\partial u/\partial x=B^{-1}|\nabla u|^{1-n}(\omega x+\partial v/\partial y)$$

Отсюда в результате прямых, но громоздких преобразований находим следующую асимптотику функции v в окрестности вершины трещины:

$$v=\left(\frac{BJ^n r(4n)^{pn/4}}{(n+1)^{(n-1)/2}\pi^n}\right)^{1/(n+1)}((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+(n-1)\cos\theta)^{(n-1)/2}$$

$$((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}-(n+1)\cos\theta)^{1/2}((4n+(n-1)^2\cos^2\theta)^{1/2}+$$

$$+|n-1|\cos\theta)^{-\eta}+o(r^{1/(n+1)})$$

$$\eta=n|n-1|/(n+1)2$$

При $n>1$ эта формула, записанная в несколько ином виде, содержится в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tolksdorf P.* On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points.— Communs Partial Different. equat., 1983, v. 8, No. 7, p. 773–817.
2. *Черепанов Г. П.* О распространении трещин в сплошной среде.— ПММ, 1967, т. 31, № 3, с. 476–488.
3. *Rice J. R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, v. 35, No. 2, p. 379–386.
4. *Amazigo J. C.* Fully plastic crack in an infinite body under anti-plane shear.— Intern. J. Solid and Struct., 1974, v. 10, No. 9, p. 1003–1015.
5. *Rice J. R.* Stresses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, v. 34, No. 2, p. 287–298.
6. *Neuber H.* Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law.— Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1961, v. 28, No. 4, p. 544–550.
7. *Tolksdorf P.* Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.— J. Different. Equat., 1984, v. 51, No. 1, p. 126–150.
8. *Вылекжанин В. Д.* Некоторые изопериметрические соотношения в теории кручения призматических стержней при установившейся ползучести.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 4, с. 151–154.

Ленинград

Поступила в редакцию
22.X.1984